

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬН ОМ ОБРАЗОВАНИИ

- ❖ Модели и моделирование
- ❖ Тематика контрольных работ

МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

КЛЮЧЕВЫЕ ВОПРОСЫ:

- Роль моделирования в познании мира
- Метод и методология
- Определение модели
- Свойства моделей
- Цели моделирования
- Классификация моделей
- Когнитивные, концептуальные и формальные модели

МЕТОДЫ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ



ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ И ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

МОДЕЛЬ – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

МОДЕЛИРОВАНИЕ – процесс построения и использования модели с целью получения новых знаний об объекте.

ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Изучить строение объекта (структура, свойства, внешние связи и т.д.)
2. Научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях
3. Прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ



КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ



ПРЕИМУЩЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

- ❑ экономичность
- ❑ возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов
- ❑ возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в натуре
- ❑ возможность изменения масштаба времени
- ❑ простота многоаспектного анализа
- ❑ большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей
- ❑ универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

КЛЮЧЕВЫЕ ВОПРОСЫ:

- ☐ Понятие математической модели
- ☐ Структура математической модели
- ☐ Свойства математической модели

ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Объект моделирования – материальное тело, природный, технологический, социальный процесс или явление.



ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕКТА МОДЕЛИРОВАНИЯ

X

- Входные (управляемые) воздействия

E

- Воздействия внешней среды (неуправляемые)

G

- Внутренние (собственные) параметры

Y

- Выходные характеристики

X, G, E – независимые (экзогенные) величины

Y – зависимые (эндогенные) величины

Пример

$$U = IR$$

I – входной параметр

R – внутренний параметр

U – выходной параметр

$$I = U / R$$

U – входной параметр

I – выходной параметр

$$F = mv^2$$

v^2 – входной параметр

m – внутренний параметр

F – выходной параметр

$$v^2 = F / m$$

v^2 – выходной параметр

F – входной параметр

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель - математический оператор, позволяющий по значениям входных параметров установить выходные значения параметров объекта моделирования.

$$A: \{X, G, E\} \rightarrow Y$$

Оператор модели **A** преобразует экзогенные параметры в эндогенные

СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

$$L = (u(z)) = 0$$

L – математический оператор

0 – нулевой элемент пространства, в котором действует этот оператор

z – вектор независимых переменных (время и пространственные координаты)

u – вектор *фазовых переменных* (параметры объекта которые характеризуют его состояние)

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

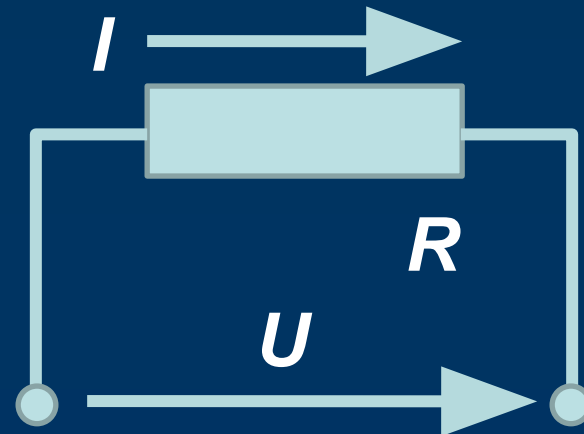
$$y = f(x, g)$$

Прямая задача	Обратная задача
(x, g) - задано	(x, y) - задано
y - найти	g - найти

СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

- ☐ Полнота
- ☐ Точность
- ☐ Адекватность
- ☐ Экономичность
- ☐ Робастность
- ☐ Продуктивность
- ☐ Наглядность

ПОЛНОТА – способность отразить интересующие характеристики объекта моделирования.



$$U = IR$$

Невозможно определить размеры, массу, стоимость и другие характеристики электрической цепи

ТОЧНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

ТОЧНОСТЬ – способность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи математической модели.

$$\varepsilon_i = \frac{y_i^M - y_i^p}{y_i^p}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \boxtimes \varepsilon_n)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \max_{i=1, n} |\varepsilon|$$

АДЕКВАТНОСТЬ И ЭКОНОМИЧНОСТЬ

АДЕКВАТНОСТЬ – модели отражать характеристики объекта с относительной погрешностью не более некоторого заданного значения δ .

$$X = \{x : \varepsilon \leq \delta\}$$

Область
адекватности
модели

ЭКОНОМИЧНОСТЬ – оценка затрат на вычислительные ресурсы при реализации модели на ПК.

Экономичность



**Полнота
Точность
Адекватность**

ДРУГИЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Робастность

Устойчивость модели к погрешностям исходных данных

Продуктивность

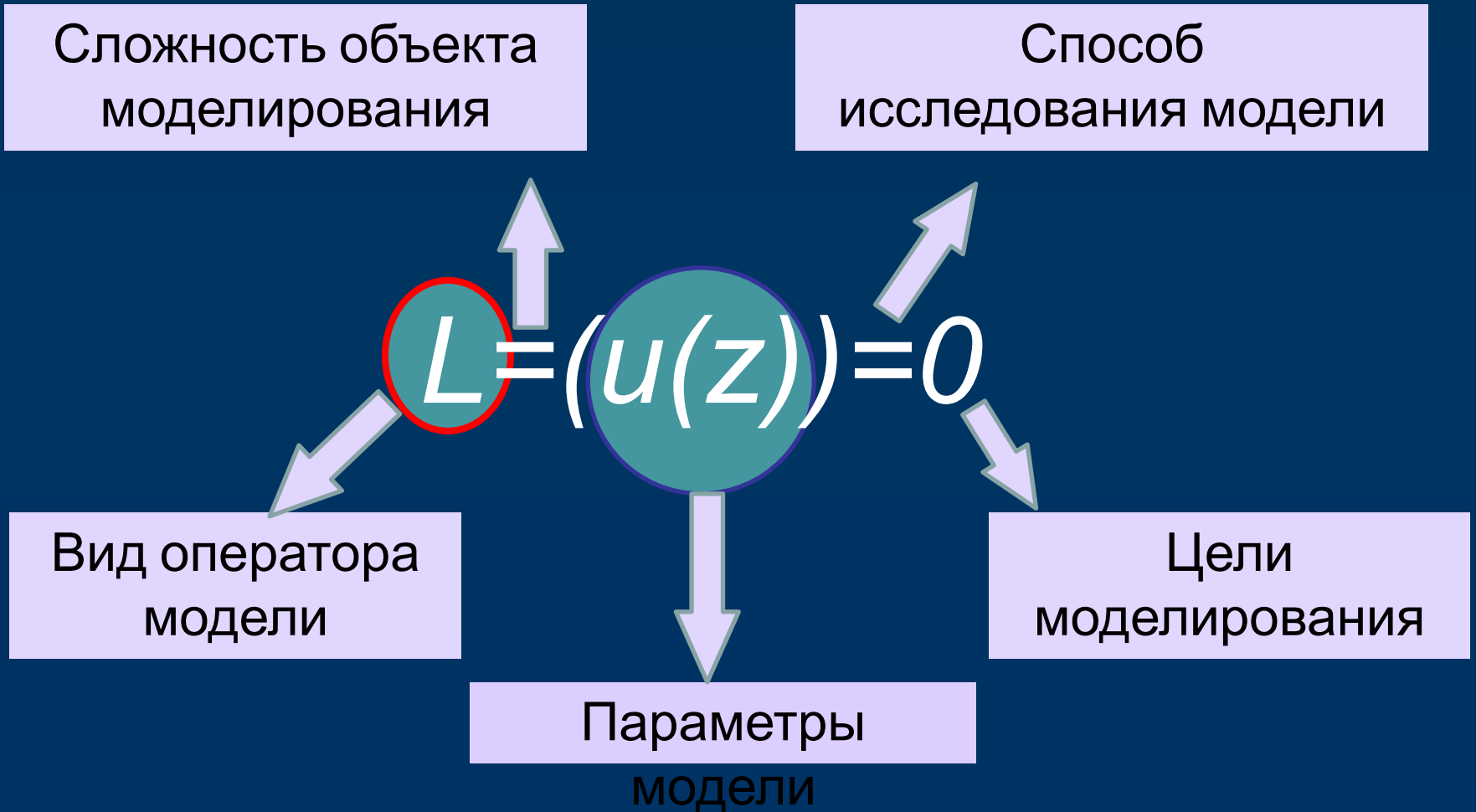
Возможностью располагать достоверными исходными данными

Наглядность

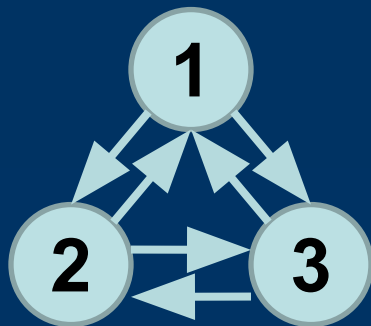
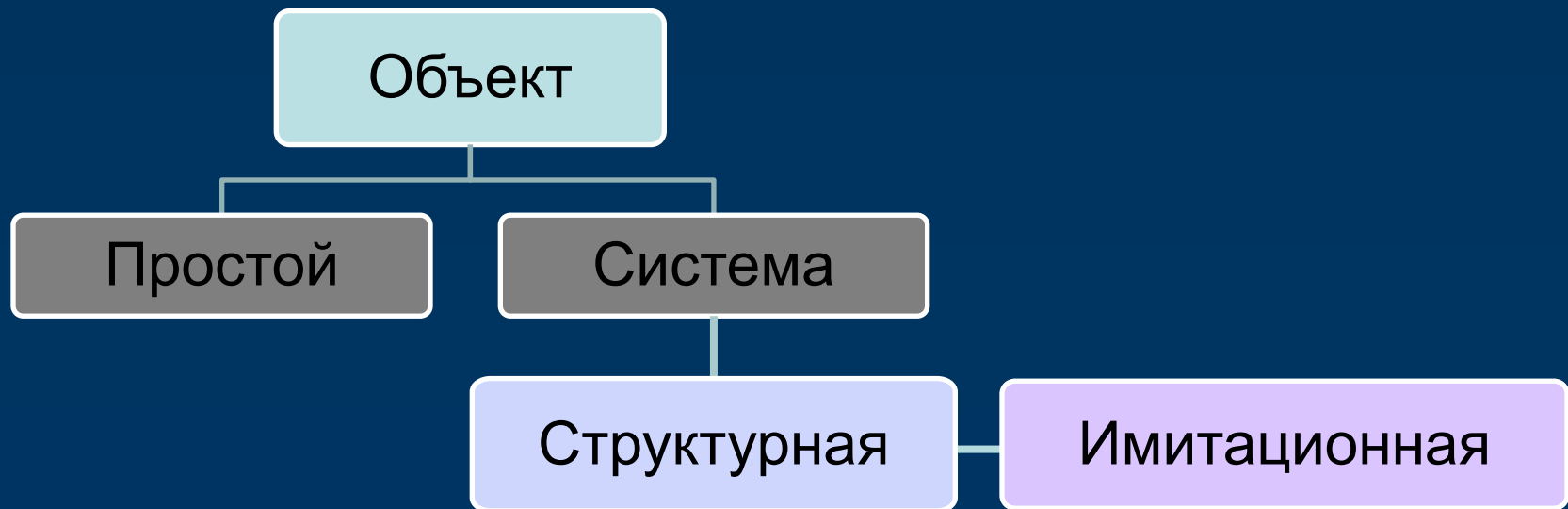
Параметры модели имеют ясный содержательный смысл

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПРИЗНАКИ КЛАССИФИКАЦИИ



ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ



$N = 3$ – число элементов

$M = 2$ – число состояний элемента

Число связей $N(N-1) = 6$

Число состояний $S = M^N = 8$

МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМ

СТРУКТУРНАЯ

- отображает устройство объекта и связи между составляющими его элементами

ИМИТАЦИОННАЯ

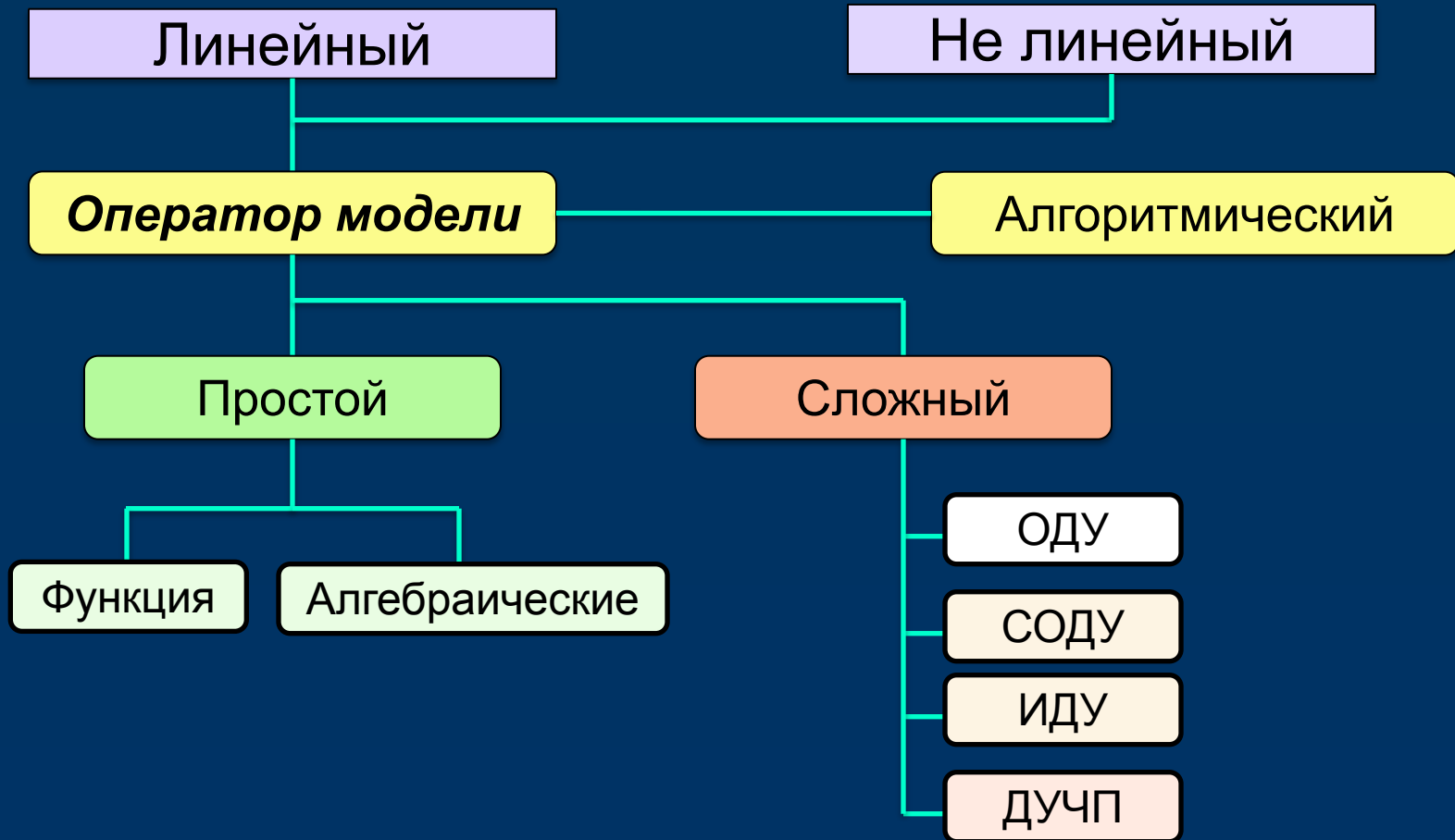
- моделирование взаимодействий элементов внутри системы по алгоритму на компьютере (модель-имитатор, модель «черного ящика»)

СТРУКТУРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Пространственная	Описание геометрии объекта и пространственное расположение его элементов
Временная	Описание этапов процесса или состояние системы в некоторый момент времени
Физическая	Описание физических свойств объекта с помощью структурных элементов
Иерархическая	Распределение функций обработки информации и принятие решений между отдельными элементами

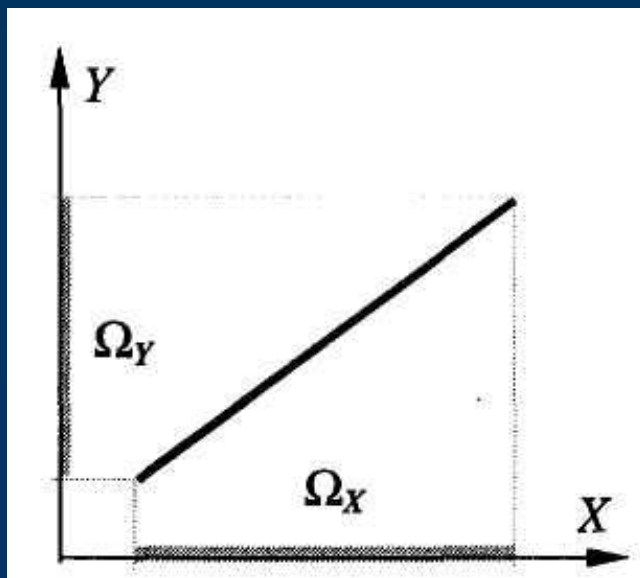
КЛАССИФИКАЦИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОПЕРАТОРА

Классификация в зависимости
от оператора модели



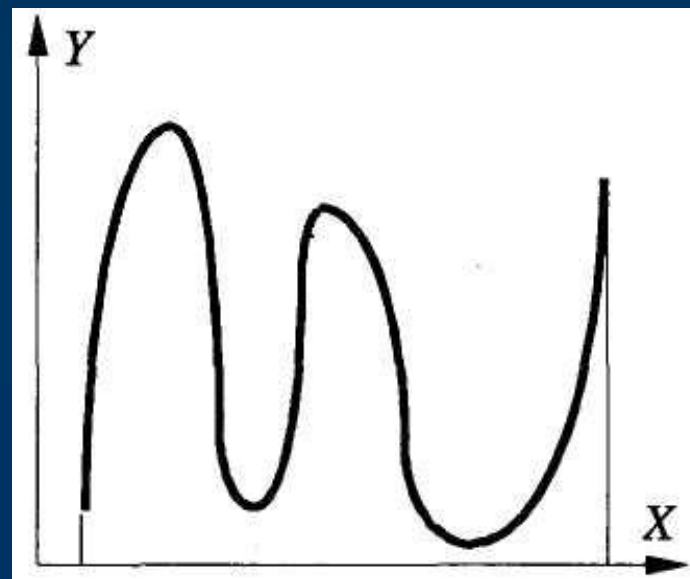
ОПЕРАТОР МОДЕЛИ

Линейный



$$X = X_1 + X_2 \rightarrow Y = Y_1 + Y_2$$

Нелинейный



ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

По составу

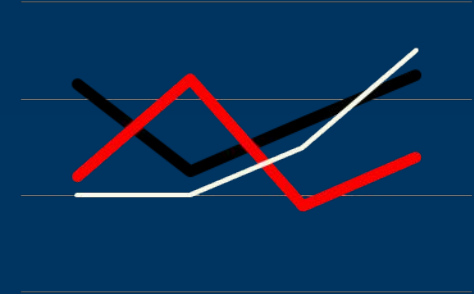
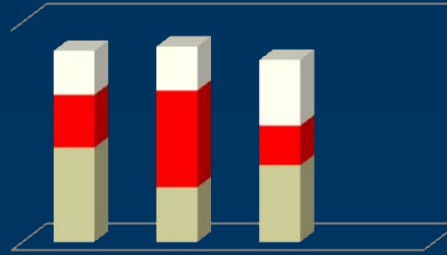
Детерминированные

Неопределенные

По отношению ко времени

По отношению к размерности

Состав параметров модели



Качественные

Количественные

Дискретные

Непрерывные

Смешанные

ПАРАМЕТРЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ

Детерминированные

Каждому параметру соответствует конкретное число или функция

Стохастические

Определяются случайными числами, заданными плотностями вероятности

Случайные

Случайные величины, заданные оценками плотностей вероятности

Интервальные

Заданы интервалом

Нечеткие

Описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству

ПАРАМЕТРЫ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Одномерные

Двухмерные

Трёхмерные

СОСТОЯНИЕ ОБЪЕКТА –
совокупность значений
параметров модели в
некоторый момент времени

Статические

Динамические

Стационарные

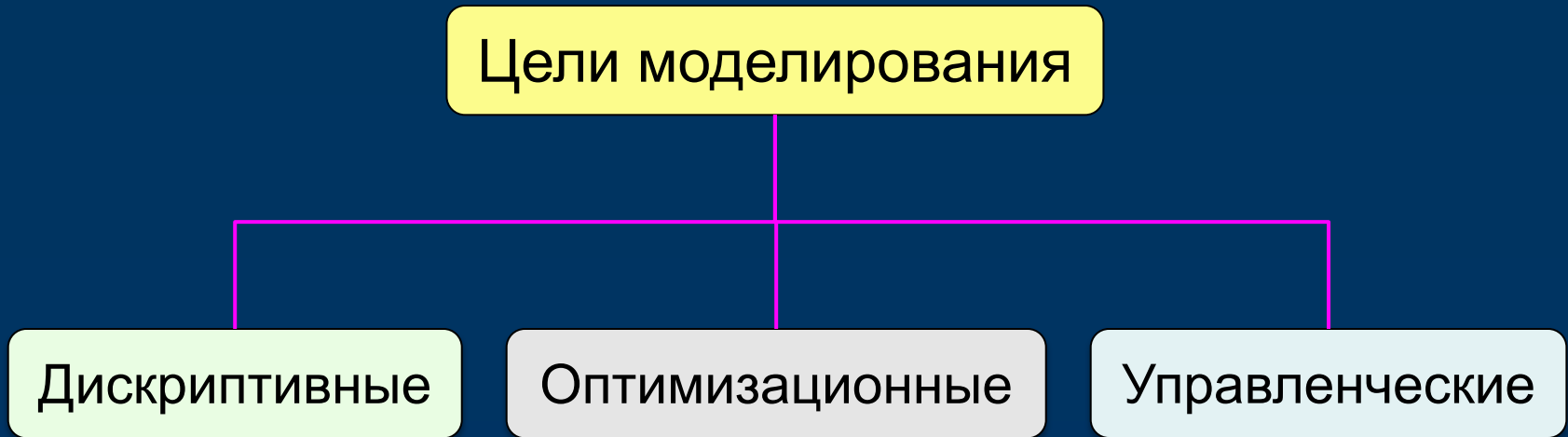
Нестационарные

КЛАССИФИКАЦИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ



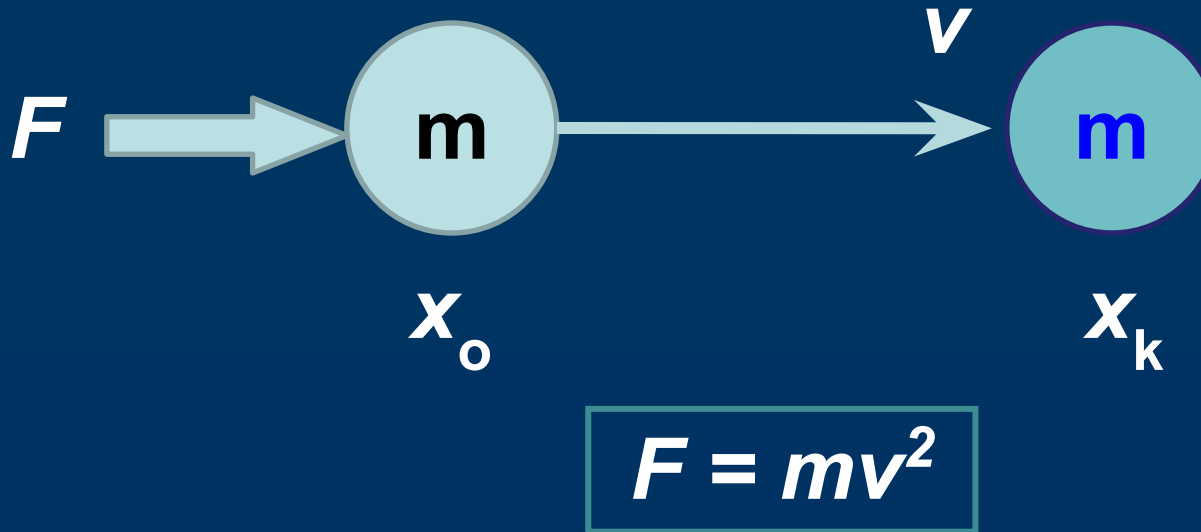
КЛАССИФИКАЦИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЦЕЛЕЙ

Классификация моделей в зависимости от целей моделирования



ДИСКРИПТИВНЫЕ МОДЕЛИ

Цель – установление законов изменения параметров модели



ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

- Определение оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта.
- Поиск оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом.

КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ – необходимое условие.

ЗАДАЧИ – многокритериальная оптимизация нескольких критериев

УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

- ❖ принятие эффективных управленческих решений.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ:

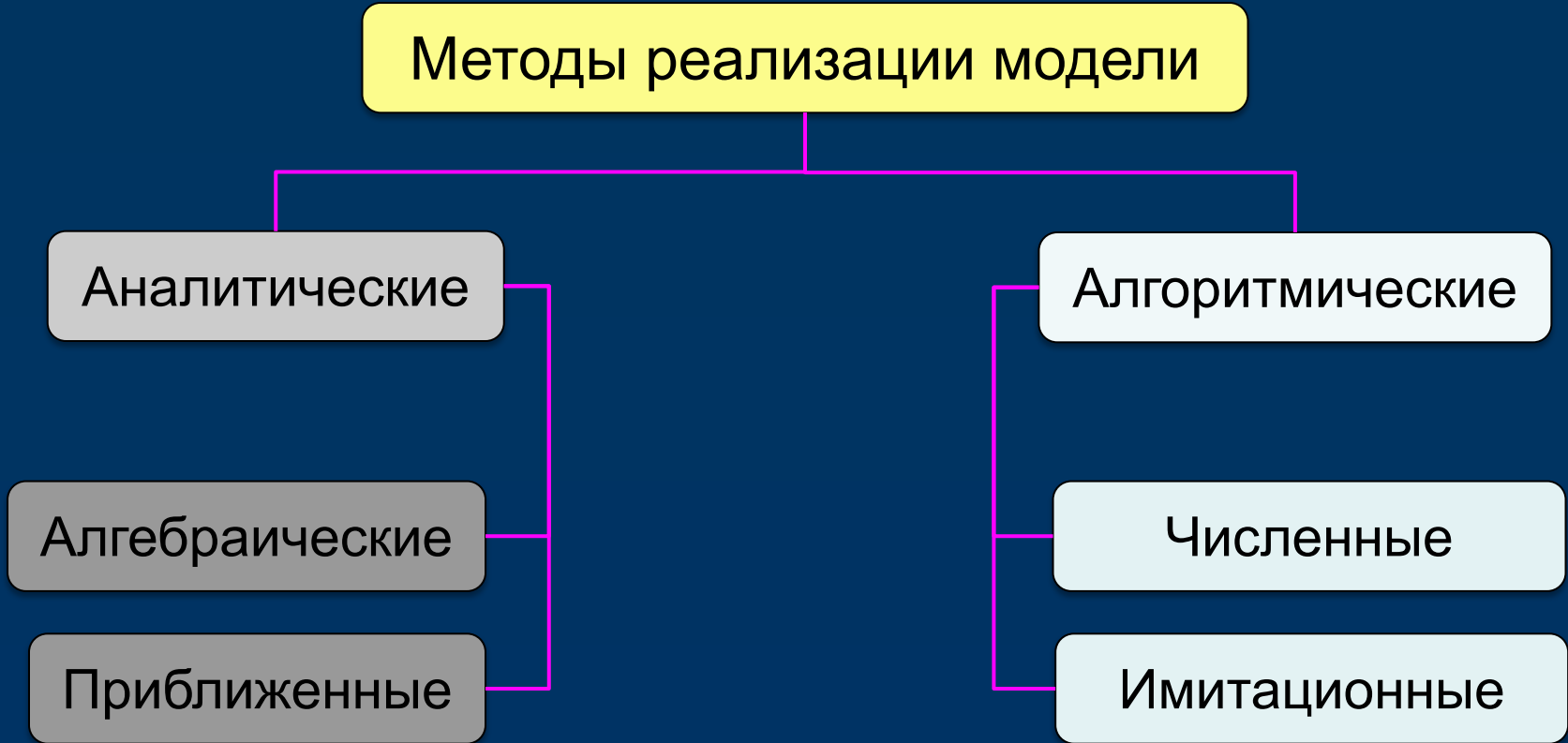
- ❖ выбор некоторых альтернатив из заданного их множества.

Специфические критерии оптимальности:

- ❖ позволяют сравнивать альтернативы при различных неопределенностях задачи.

КЛАССИФИКАЦИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ МЕТОДОВ

Классификация моделей в зависимости от методов реализации



ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1

- Содержательная постановка задачи

2

- Концептуальная постановка задачи

3

- Концептуальная постановка задачи

4

- Выбор метода решения задачи

5

- Поиск решения

6

- Проверка адекватности модели

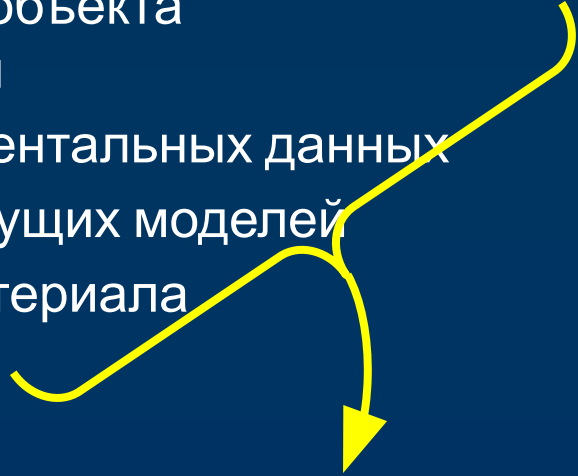
7

- Практическое использование модели

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В словесной форме записаны
основные вопросы об объекте
моделирования

- Исследование объекта моделирования
- Сбор экспериментальных данных
- Анализ предыдущих моделей
- Обобщение материала



Техническое задание на
проектирование и разработку
математической модели

Постановка задачи моделирования (ПРИМЕР)

- Математическая модель должна описывать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину
- Модель должна позволять:
 - вычислять положение мяча в любой момент времени
 - определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах
- Исходные данные:
 - масса и радиус мяча
 - начальные координаты, скорость и угол броска
 - координаты центра и радиус кривизны

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- Сформулированные в терминах конкретных дисциплин основные вопросы, гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.
- Инженерная деятельность:

Объект → РС

- Расчетная схема
 - приемы и символы наглядного графического отображения;
 - акцент на необходимые свойства, условия работы и особенности объекта;
 - аргументация допущений и упрощений.

Концептуальная постановка задачи (ПРИМЕР)

- Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами Ньютона
- Принятые гипотезы:
 - объект моделирования – мяч радиуса r
 - мяч считается материальной точкой массой m , положение которой совпадает с центром масс мяча
 - движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g и описывается уравнениями Ньютона.
 - ...

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- Совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования

Математические соотношения:

- Системы алгебраических уравнений:
 - Аппроксимационного типа.
 - Ограничение области.
- Фундаментальные законы природы
- Определяющие соотношения или уравнения состояния

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ

- Закон сохранения массы, энергии, импульса, заряда и др.

$$Q_{\text{выделено}} = Q_{\text{полезное}} + Q_{\text{потери}}$$



$$I_{\text{св}} = \sqrt{\frac{Q}{mR_{\text{св}}t_{\text{св}}}}$$

- Справедливы при определенных условиях для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава
- Хорошо изучены и подтверждены экспериментально

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

- Законы:
 - Гука,
 - Клайперона,
 - Ома,
 - Фурье
 - и др.
- Устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупностей (например, жидкостей, газов, упругих или пластических сред и т.д.) при воздействиях различных внешних факторов
- Менее изучены, иногда приходится устанавливать самому.

КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

*Математическая модель корректна
если:*

- Контроль размерностей
- Контроль порядков
- Контроль характера зависимостей
- Контроль экстремальных ситуаций
- Контроль граничных условий
- Контроль физического смысла
- Контроль математической замкнутости

ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

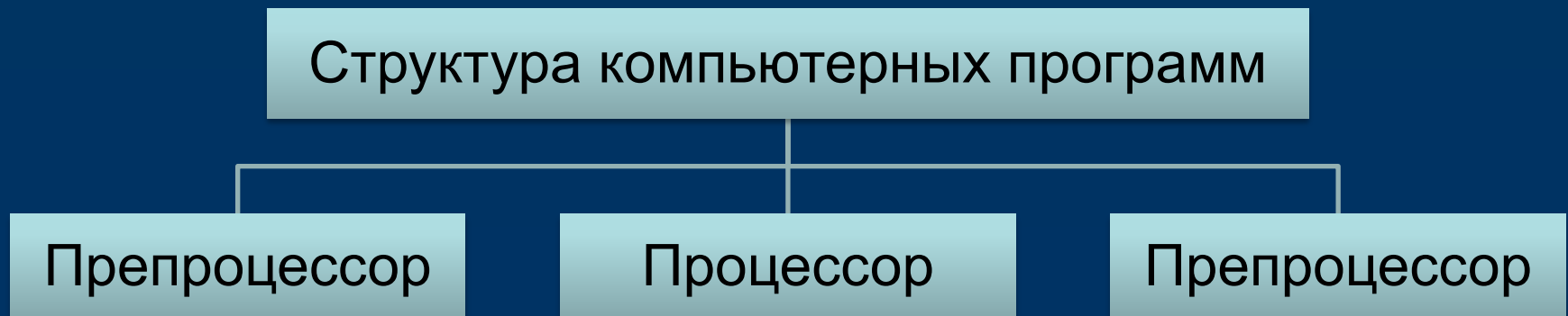
- АНАЛИТИЧЕСКИЕ
 - предпочтительно
- АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ (численные)
 - трудоемки
 - для корректных математических задач
 - решение приближенное

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

- Сведение математической задачи к конечномерной:
 - дискретизация исходной задачи
 - переход от функции непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента
- Погрешность результатов:
 - Погрешность исходных данных
 - Погрешность метода (дискретизация)
 - Округления
- Алгоритм численного решения:
 - Реализуемость
 - решение за допустимое машинное время
 - Точность
 - решение с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число $Q(\varepsilon)$ действий.

ПОИСК РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

- Реализация математической модели с использованием компьютерной техники
- Аналитическое решение:
 - программы математического анализа **Mathcad**, **Mathlab**, **Statistica** ...
- Численное решение:
 - программы конечно-элементного анализа **ANSYS**, **NASTRAN**, **SYSWELD** ...



ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

- Степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи
- Основная цель
 - доказать справедливость выдвинутых гипотез
 - достигается ли требуемая точность
- Модель не адекватна → Поиск решения →
Выбор метода решения →
Концептуальная постановка задачи

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ

- Выполнить модификацию объекта, найти его оптимальные характеристики
- Обозначить область применения модели
- Проверить обоснованность гипотез, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности
- Показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.