

К.Ю. Поляков

Множества и логика в задачах ЕГЭ по информатике

*Множества и логика в задачах ЕГЭ //
Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.*

Постановка задачи

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [37; 60]$ и $Q = [40; 77]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что выражение

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x .

Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ и } Q = \{4, 8, 12, 116\}.$$

Известно, что выражение

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Постановка задачи

Для какого наибольшего натурального числа A выражение

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

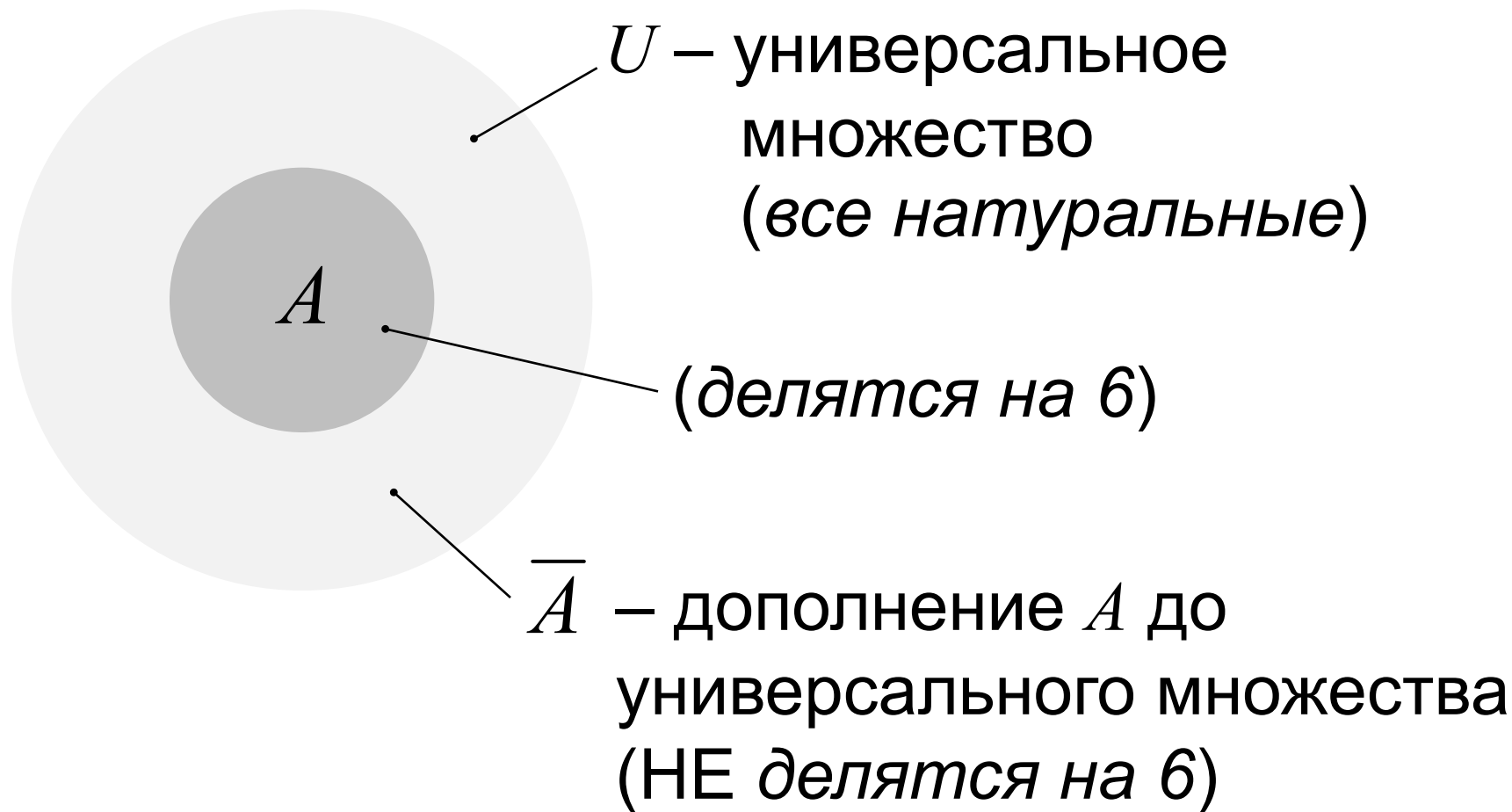
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

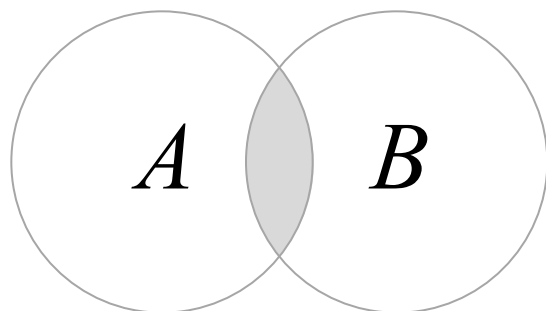
$$(x \& 53 \neq 0) \rightarrow ((x \& 41 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно?

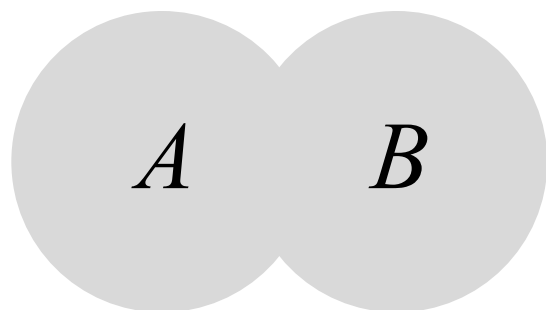
Что нужно знать о множествах?



Что нужно знать о множествах?



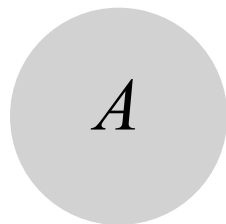
$A \cdot B$ – пересечение ($A \cap B$)



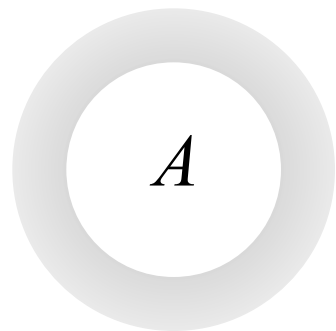
$A + B$ – объединение ($A \cup B$)

Множества и логические функции

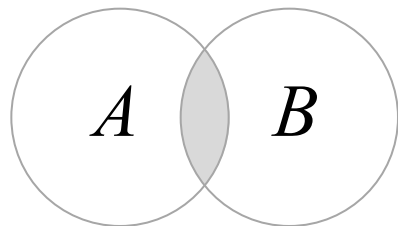
Множество задаётся логической функцией



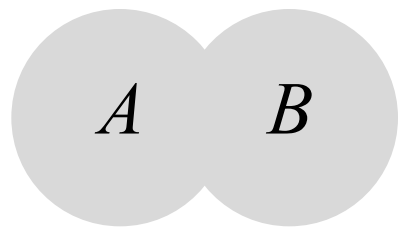
$$x \in A \Leftrightarrow \mathbf{A}(x) = 1$$



$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \notin A \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \end{aligned}$$



$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cdot B$$



$$\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A + B$$

Базовые задачи (ЕГЭ)

Задача 1. Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $A + B$ совпадало с универсальным множеством?

$$\begin{aligned} A + B = U &\Leftrightarrow \mathbf{A + B = 1} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{\bar{B} \rightarrow A = 1} \end{aligned}$$

$$A_{\min} = \bar{B}$$

Другие решения:

$$A \geq \bar{B} \quad A \supseteq \bar{B}$$

Базовые задачи (ЕГЭ)

Задача 2. Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\bar{A} + B$ совпадало с универсальным множеством?

$$\begin{aligned}\bar{A} + B = U &\Leftrightarrow \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{B} = 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{\mathbf{B}} \rightarrow \bar{\mathbf{A}} = 1\end{aligned}$$

$$\bar{A} \geq \bar{B} \quad \bar{A} \supseteq \bar{B}$$

$$A \leq B \quad A \subseteq B$$

$$A_{\max} = B$$

Общий подход к решению

1. Свести задачу к одной из базовых задач

$$\text{Задача 1. } \mathbf{A + B = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{A} = 1$$

$$\text{Задача 2. } \overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}} = 1$$

2. Использовать готовое решение:

$$\text{Задача 1. } A_{\min} = \overline{B}$$

$$\text{Задача 2. } A_{\max} = B$$

Задачи с отрезками

На числовой прямой даны два отрезка:
 $P = [37; 60]$ и $Q = [40; 77]$. Укажите наименьшую
 возможную длину такого отрезка A , что
 выражение

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x .

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

Заданное условие:

$$\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}})$$

Задачи с отрезками

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) &\Leftrightarrow \bar{P} + (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) \\
 &\Leftrightarrow \bar{P} + \overline{Q \cdot \bar{A}} + \bar{P} \\
 &\Leftrightarrow \bar{P} + \bar{Q} + A \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A + B = 1} \Leftarrow \text{Задача 1}
 \end{aligned}$$

Решение:

$$\bar{P} + \bar{Q}$$

$$A_{\min} = \bar{B} = \overline{\bar{P} + \bar{Q}} = P \cdot Q$$

$$P = [37; 60], Q = [40; 77]$$

$$A_{\min} = [40; 60]$$

длина 20

Задачи с отрезками-II

На числовой прямой даны два отрезка:
 $P = [10; 20]$ и $Q = [25; 55]$. Укажите наибольшую
возможную длину такого отрезка A , что
выражение

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

истинно при любом значении переменной x .

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

Заданное условие:

$$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

Задачи с отрезками-II

Упрощение выражения:

$$A \rightarrow (P + Q) \Leftrightarrow \bar{A} + P + Q$$

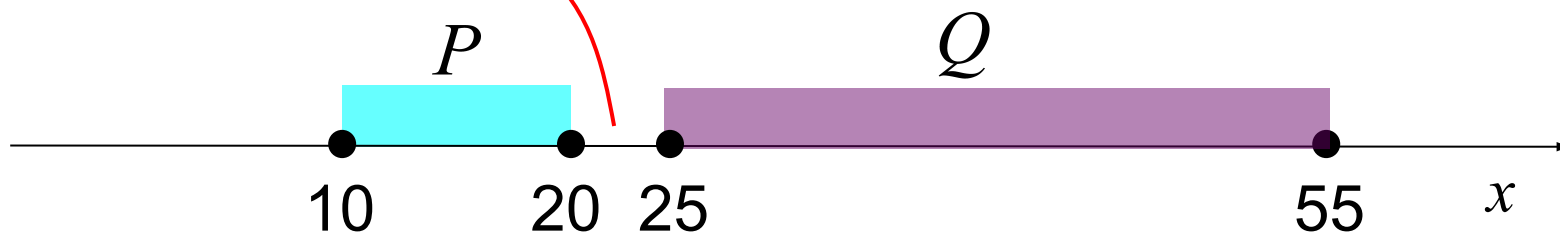
$$\Leftrightarrow \bar{A} + B = 1 \Leftrightarrow \text{Задача 2}$$

$P + Q$

Решение:

$$A_{\max} = B = P + Q \quad P = [10; 20], \quad Q = [25; 55]$$

Нельзя перекрыть!



$$A_{\max} = [25; 55]$$

длина 30

Множества чисел

Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ и } Q = \{4, 8, 12, 116\}.$$

Известно, что выражение

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P)$$

истинно при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}})$$

Множества чисел

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) &\Leftrightarrow \bar{P} + (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) \\
 &\Leftrightarrow \bar{P} + \overline{Q \cdot \bar{A}} + \bar{P} \\
 &\Leftrightarrow \bar{P} + \bar{Q} + A \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A + B = 1} \Leftarrow \text{Задача 1}
 \end{aligned}$$

Решение:

$$\bar{P} + \bar{Q}$$

$$A_{\min} = \bar{B} = \overline{\bar{P} + \bar{Q}} = P \cdot Q$$

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

$$A_{\min} = \{4, 8, 12\}$$

сумма 24

Множества чисел-II

Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём

$$P = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \}$$

$$Q = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \}.$$

Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

истинно при любом значении переменной x .

Определите наибольшее возможное количество элементов множества A .

Вводим утверждения:

$$P = (x \in P), \quad Q = (x \in Q), \quad A = (x \in$$

Заданное условие:

$$(A \rightarrow \bar{P}) \cdot (\bar{Q} \rightarrow \bar{A})$$

Множества чисел-II

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow \bar{P}) \cdot (\bar{Q} \rightarrow \bar{A}) &\Leftrightarrow (\bar{A} + \bar{P}) \cdot (Q + \bar{A}) \\
 &\Leftrightarrow \bar{A} \cdot Q + \bar{P} \cdot Q + \bar{A} + \bar{P} \cdot \bar{A} \\
 &\Leftrightarrow \bar{A} \cdot Q + \bar{P} \cdot Q + \bar{A} \\
 &\Leftrightarrow \bar{A} + \bar{P} \cdot Q
 \end{aligned}$$

Решение:

$$\Leftrightarrow \bar{A} + B = 1 \Leftrightarrow \text{Задача 2}$$

$$A_{\max} = B = \bar{P} \cdot Q$$

$$\bar{P} \cdot Q$$

$$P = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \}$$

$$Q = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \}$$

$$A_{\max} = \{ 3, 9, 15, 21, 24, 27, 30 \}$$

7 шт.

Делимость

Для какого наибольшего натурального числа a выражение

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, a) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие: $\bar{\mathbf{A}} \rightarrow (\mathbf{D}_6 \rightarrow \bar{\mathbf{D}}_4)$

Делимость

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned} \bar{A} \rightarrow (D_6 \rightarrow \bar{D}_4) &\Leftrightarrow A + (D_6 \rightarrow \bar{D}_4) \\ &\Leftrightarrow A + \bar{D}_6 + \bar{D}_4 \\ &\Leftrightarrow A + B = 1 \quad \Leftarrow \text{Задача 1} \end{aligned}$$

$$\bar{D}_6 + \bar{D}_4$$

Решение:

$$A_{\min} = \bar{B} = \overline{\bar{D}_6 + \bar{D}_4} = D_6 \cdot D_4$$

$$D_6 \cdot D_4 = D_{12}$$

$$D_6 \cdot D_4 \leq A = D_a$$

max

12

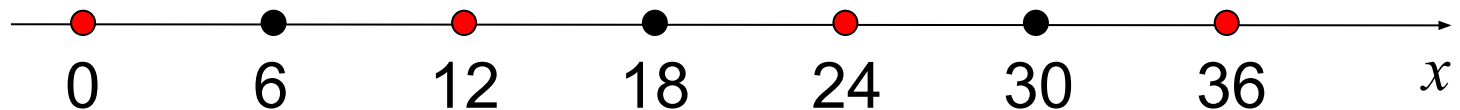
Одновременно
делятся
на 6 и на 4!

любой делитель 12!

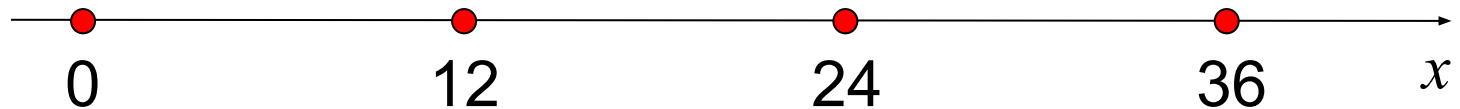
$$A_{\min} \leftarrow a_{\max}$$

Почему максимальное число a дает минимальное множество A ?

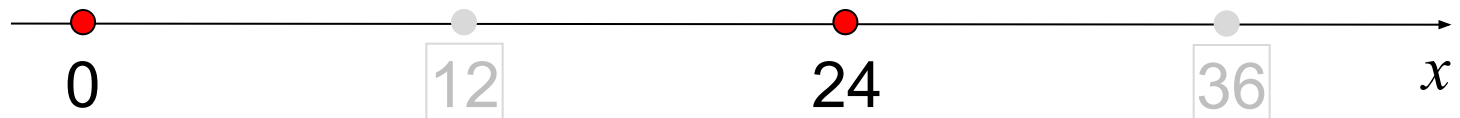
$$a=6$$



$$a=12$$



$$a=24$$



Делимость-II

Для какого наибольшего натурального числа a выражение

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, a) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

$A)$
Заданное условие:

$$\bar{\mathbf{A}} \rightarrow (\bar{\mathbf{D}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{D}}_{35})$$

Делимость-II

Упрощение выражения:

$$\bar{A} \rightarrow (\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}) \Leftrightarrow A + \bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}$$

$$\Leftrightarrow A + B = 1 \Leftrightarrow \text{Задача 1}$$

$$\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}$$

Решение:

$$A_{\min} = \bar{B} = \overline{\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}} = D_{21} + D_{35}$$

Делятся
на 21 или на 35!

$$D_{21} + D_{35} \not\equiv D_a$$

нет такого a !

$$D_{21} + D_{35} < D_a$$

Общий делитель 21 и 35!

max

7

Делимость-III

Для какого наименьшего натурального числа a выражение

$$\text{ДЕЛ}(x, a) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \vee \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

$A)$
Заданное условие:

$$\mathbf{A} \rightarrow (\overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35})$$

Делимость-III

Упрощение выражения:

$$A \rightarrow (\bar{D}_{21} + D_{35}) \Leftrightarrow \bar{A} + \bar{D}_{21} + D_{35}$$

$$\Leftrightarrow \bar{A} + B = 1 \Leftrightarrow \text{Задача 2}$$

$$\bar{D}_{21} + D_{35}$$

Решение:

$$A_{\max} = B = \bar{D}_{21} + D_{35}$$

$$\bar{D}_{21} + D_{35} \not\equiv D_a \quad \text{нет такого } a!$$

$$\bar{D}_{21} + D_{35} > A = D_a$$

Не делятся
на 21 или
делятся на 35!

Делимость-III

Переход к другой импликации:

$$\bar{A} + \bar{D}_{21} + D_{35} = (A \cdot D_{21}) \rightarrow D_{35}$$



Если число делится на a и на 21, оно должно делиться на 35!

Делится на A и на 21:

$$x = a \cdot k = 21 \cdot m = 3 \cdot 7 \cdot m$$

k, m – натуральные

Делится на 35:

$$x = 35 \cdot q = 5 \cdot 7 \cdot q$$

Этот сомножитель добавляется с помощью A !

$$a = 5 \cdot r$$

min

5

Делимость-IV

Для какого наименьшего натурального числа a выражение

$$(\text{ДЕЛ}(x, a) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 18)$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

$A)$
Заданное условие:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{21}) \rightarrow \mathbf{D}_{18}$$

Делимость-IV

$$(A \cdot D_{21}) \rightarrow D_{18}$$



Если число делится на A и на 21, оно должно делиться на 18!

Делится на A и на 21:

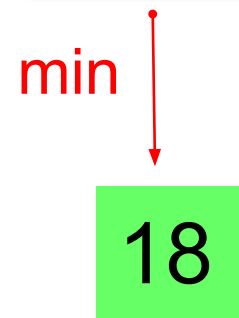
$$x = a \cdot k = 21 \cdot m = 3 \cdot 7 \cdot m$$

Делится на 18:

$$x = 18 \cdot q = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot q$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot r$$

Эти сомножители добавляются с помощью A !



Делимость-V

Для какого наименьшего натурального числа a выражение

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, a))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in$$

Заданное условие:

$$\bar{\mathbf{D}}_{18} \rightarrow (\bar{\mathbf{D}}_{21} \rightarrow \bar{\mathbf{A}})$$

Делимость-IV

$$\overline{D}_{18} \rightarrow (\overline{D}_{21} \rightarrow \overline{A}) \Leftrightarrow D_{18} + D_{21} + \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A} + B = 1 \Leftrightarrow \text{Задача 2}$$

$$D_{18} + D_{21}$$

Решение:

$$A_{\max} = B = D_{18} + D_{21}$$

$$D_{18} + D_{21} \not\equiv D_a$$

нет такого a !

Делятся
на 18 или
на 21!

$$D_{18} + D_{21} > A = D_a$$

Варианты:

$$A = D_{18}, D_{36}, \dots$$

$$A = D_{21}, D_{42}, \dots$$



Нельзя перекрывать
другие числа!

Побитовые логические операции

Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& 53 \neq 0) \rightarrow ((x \& 41 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно.?

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \& N = 0\}$
 $\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z}_N = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\bar{\mathbf{Z}}_{53} \rightarrow (\mathbf{Z}_{41} \rightarrow \bar{\mathbf{A}})$$

Число a определяет множество Z_a или условие \mathbf{A} .

Побитовые логические операции

Что такое Z_{53} :

биты 5 4 3 2 1 0

$$53 = 11\cancel{0}1\cancel{0}1$$

$$x = abcdef$$

$$x \& 53 = ab\cancel{0}d\cancel{0}f = 0$$

Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

Что такое \bar{Z}_{53} :

биты 5 4 3 2 1 0

$$53 = 11\cancel{0}1\cancel{0}1$$

$$x = abcdef$$

$$x \& 53 = ab\cancel{0}d\cancel{0}f \neq 0$$

Среди битов 5, 4, 2, 0 числа x есть **не**нулевые!

Главная ошибка

После упрощения: $Z_{21} + \bar{Z}_{11} + \bar{A} = 1$

биты 5 4 3 2 1 0

21 = 010101

11 = 001011

Вывод:

~~$21 \text{ or } \bar{11} \text{ or } \bar{a} = 1$~~

~~$\bar{a} = \overline{21 \text{ or } 11}$~~

~~$a = 21 \text{ or } 11 = 20$~~

Натуральные
числа!

Логические
значения!



Это ИНОГДА
проходит!



Это min или max?

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_{53} \cdot \mathbf{Z}_{30} \Leftrightarrow ?$$

биты 5 4 3 2 1 0

$$53 = 11\mathbf{0}1\mathbf{0}1 \quad \mathbf{Z}_{53} \Rightarrow$$

$$30 = \mathbf{0}1111\mathbf{0} \quad \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow$$

$$63 = 111111 = 53 \text{ or } 30$$

Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

Биты 4, 3, 2, 1 числа x нулевые!

$$\mathbf{Z}_{53} \cdot \mathbf{Z}_{30} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_{63} = \mathbf{Z}_{53 \text{ or } 30}$$

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_{53} + \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow ?$$

биты 5 4 3 2 1 0

$$53 = 11\mathbf{0}1\mathbf{0}1 \quad \mathbf{Z}_{53} \Rightarrow$$

$$30 = \mathbf{0}1111\mathbf{0} \quad \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow$$

$$20 = \mathbf{0}1\mathbf{0}1\mathbf{0}0 = 53 \text{ and } 30$$

Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

Биты 4, 3, 2, 1 числа x нулевые!

$$\mathbf{Z}_{53} + \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow \mathbf{Z}_{20} = \mathbf{Z}_{53 \text{ and } 30}$$

Только в одну сторону!

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{Z}_c \Leftrightarrow \mathbf{Z}_{b \text{ or } c}$$

Двойственность операций **И** и **ИЛИ**

$$\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c \Rightarrow \mathbf{Z}_{b \text{ and } c}$$

только для левой части импликации!

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1 \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} = 1$$

От противного: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = 1, \mathbf{C} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow \mathbf{B} = 1 \\ \mathbf{B} \rightarrow 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} = 0 \Rightarrow 1 \rightarrow \mathbf{B} = 0$$

Побитовые логические операции

Биты 4, 2 и 0
нулевые!

Биты 4 и 0 нулевые!

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 1$$

биты 4 3 2 1 0

$$\mathbf{Z}_b : 21 = 1\mathbf{0}1\mathbf{0}1$$

биты 4 3 2 1 0

$$\mathbf{Z}_c : 17 = 1\mathbf{0}0\mathbf{0}1$$



Множество единичных битов C входит во множество единичных битов b !

$$\mathbf{Z}_{21} \rightarrow \mathbf{Z}_7 = \mathbf{0}$$

биты 4 3 2 1 0

$$\mathbf{Z}_b : 21 = 1\mathbf{0}1\mathbf{0}1$$

биты 4 3 2 1 0

$$\mathbf{Z}_c : 7 = \mathbf{0}01\mathbf{1}1$$

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_c \Leftrightarrow ?$$

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}}_b + \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{Z}_c}$$

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}_{b \text{ or } c}} = 0 \quad \text{? Для каких } x?$$

Если в числе x не равен 0 хотя бы один бит, который равен 1 в $b \text{ or } c$

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_c \cdot \bar{\mathbf{Z}}_d) \Leftrightarrow ?$$

$$(\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) + (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c) \cdot (\mathbf{Z}_b \rightarrow \bar{\mathbf{Z}}_d)$$

Вариант 1: $\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 0$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}$$

Вариант 2: $\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 1$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) + \overline{\mathbf{Z}_{b \text{ or } d}} &= \bar{\mathbf{Z}}_b + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{Z}_{b \text{ or } d}} \\ &= \overline{\mathbf{Z}_b \mathbf{Z}_{b \text{ or } d}} + \mathbf{A} = \mathbf{Z}_{b \text{ or } d} \rightarrow \mathbf{A} \end{aligned}$$

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_c) \Leftrightarrow ?$$

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{Z}_c) = (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A}) + (\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c)$$

Вариант 1:

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 1 \quad \text{!} \quad a - \text{любое!}$$

Вариант 2:

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{A} = 1$$

! Множество единичных битов a входит во множество единичных битов b !

Побитовые логические операции

Метод **А.В. Здвижковой** (г. Армавир):



Строим импликацию так, чтобы избавиться от всех инверсий!

$$\begin{aligned}
 \overline{Z}_{53} \rightarrow (Z_{41} \rightarrow \overline{A}) &\Leftrightarrow Z_{53} + (Z_{41} \rightarrow \overline{A}) \\
 &\Leftrightarrow Z_{53} + \overline{Z}_{41} + \overline{A} \\
 &\Leftrightarrow \overline{Z_{41} \cdot A} + Z_{53} \\
 &\Leftrightarrow (Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53}
 \end{aligned}$$

Побитовые логические операции

$$(Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53}$$

Решение:

Логическое
ИЛИ между
битами!

биты	5	4	3	2	1	0
41 =	1	0	1	0	0	1
$a =$?	1	?	1	?	?
53 =	1	1	0	1	0	1

Биты 5, 3, 0
нулевые!

Биты 5, 4, 2, 0
нулевые!

$$a_{\min} = 10100_2 = 20$$



Другие a ?

Побитовые логические операции-II

Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 20 = 0) \rightarrow (x \& 5 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \& N = 0\}$

$$\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z}_N = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\bar{\mathbf{A}} \rightarrow (\mathbf{Z}_{20} \rightarrow \bar{\mathbf{Z}}_5)$$

Побитовые логические операции-II

Упрощение выражения (до суммы):

$$\begin{aligned}\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) &\Leftrightarrow A + (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) \\ &\Leftrightarrow A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5 \Leftrightarrow \overline{Z_{20} \cdot Z_5} + A\end{aligned}$$

Импликация без инверсий: $\Leftrightarrow (Z_{20} \cdot Z_5) \rightarrow A$

Решение:

	биты	4	3	2	1	0		
Z_{20}	:	20	=	1	0	1	0	0
Z_5	:	5	=	0	0	1	0	1

$$a_{\max} = 10101_2 = 21$$

$$a = 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21$$

Биты 4, 2 нулевые!

Биты 2, 0 нулевые!

?

Другие a ?

?

Сколько?

$$2^3 - 1 = 7$$

Побитовые логические операции-III

Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 12 = 0) \rightarrow (x \& 21 = 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \& N = 0\}$
 $\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z}_N = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\bar{\mathbf{A}} \rightarrow (\mathbf{Z}_{12} \rightarrow \mathbf{Z}_{21})$$

Побитовые логические операции-III

Упрощение выражения:

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{12} \rightarrow Z_{21}) \Leftrightarrow A + \bar{Z}_{12} + Z_{21}$$

$$\Leftrightarrow Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21})$$

$$\Leftrightarrow (Z_{12} \rightarrow A) + (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$$



От него
ничего не
зависит!

Решение:

биты 4 3 2 1 0

$$Z_{12} : 12 = 1100$$

$$Z_{21} : 21 = 10101$$

$$\Leftrightarrow Z_{12} \rightarrow A$$

↪ = 0

$$a_{\max} = 1100_2 = 12$$



Другие a ?

$$a = 4, 8, 12$$

$$2^2 - 1 = 3$$

Побитовые логические операции-IV

Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$\begin{aligned} & ((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \\ & \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0)) \end{aligned}$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \& N = 0\}$
 $\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z}_N = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$(\bar{\mathbf{Z}}_{28} + \bar{\mathbf{Z}}_{45}) \rightarrow (\mathbf{Z}_{48} \rightarrow \bar{\mathbf{A}})$$

Побитовые операции–IV

Упрощение выражения:

$$(\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \overline{A}) \Leftrightarrow (\overline{Z}_{28} \cdot \overline{Z}_{45}) \rightarrow (\overline{Z}_{48} \cdot \overline{A})$$

$$\Leftrightarrow Z_{48} \cdot A \rightarrow Z_{28} \uparrow Z_{45}$$

Решение:

	биты	5	4	3	2	1	0
$Z_{28} :$	$28 =$	1	1	1	0	0	
$Z_{45} :$	$45 =$	1	0	1	1	0	1
$Z_{28} \cdot Z_{45} :$	$=$	1	1	1	1	0	1
$Z_{48} :$	$48 =$	1	1	0	0	0	0
	$a =$?	?	1	1	?	1
$Z_{61} :$	$=$	1	1	1	1	0	1

Логическое ИЛИ
между битами!

Z_{61}

? Другие a ?

$$a_{\min} = 1101_2 = 13$$

Побитовые логические операции (V)

(А.Г. Гильдин). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& 19 = 0) \wedge (x \& 38 \neq 0) \vee$$

$$((x \& 43 = 0) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 43 = 0)))$$

тождественно истинно.

Вводим множества:

$$Z_N = \{x : x \& N = 0\}$$

$$\bar{Z}_N = \{x : x \& N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$Z_N = (x \in Z_N), \quad A = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38} + (Z_{43} \rightarrow (A \cdot Z_{43}))$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned}
 Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38} + (Z_{43} \rightarrow (A \cdot Z_{43})) &\Leftrightarrow Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38} + \bar{Z}_{43} + A \cdot Z_{43} \\
 &\Leftrightarrow Z_{43} \rightarrow (A \cdot Z_{43} + Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38}) \\
 &\Leftrightarrow (Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43}) + (Z_{43} \rightarrow Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38}) \\
 &\Leftrightarrow Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43} \quad \text{↳ } = 0
 \end{aligned}$$

Решение:

биты 5 4 3 2 1 0
 $Z_{43} : 43 = 101011$

! Не влияют на решение!

? Какие подходят?

Все, у которых единицы только в разрядах 5, 3, 1 и 0!

$a = 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11,$
 $32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43$

$$2^4 - 1 = 15$$

Побитовые логические операции (VI)

(М.В. Кузнецова). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 13 \neq 0) \vee (x \& a \neq 0)) \rightarrow (x \& 13 \neq 0) \\ \vee ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 39 = 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества:

$$Z_N = \{x: x \& N = 0\}$$

$$\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$Z_N = (x \in Z_N), \quad A = (x \in Z_a)$$

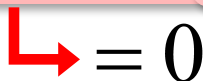
Заданное условие:

$$((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39}$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$\begin{aligned}
 ((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39} &\Leftrightarrow Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39} \\
 &\Leftrightarrow (Z_{13} + \bar{Z}_{13}) \cdot (A + \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39} \\
 &\Leftrightarrow A + \bar{A} \cdot Z_{39} + \bar{Z}_{13} \\
 &\Leftrightarrow A + Z_{39} + \bar{Z}_{13} \Leftrightarrow Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}) \\
 &\Leftrightarrow Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}) \Leftrightarrow (Z_{13} \rightarrow A) + (Z_{13} \rightarrow Z_{39}) \\
 &\Leftrightarrow Z_{13} \rightarrow A
 \end{aligned}$$



Решение:

биты	5	4	3	2	1	0
13 =		1	1	0	1	
39 =	1	0	0	1	1	1

$$a = 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13$$



Не влияет на решение!

Побитовые логические операции (V)

Вариант с другими числами:

$$((\bar{Z}_{53} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{53}) + \bar{A} \cdot Z_{21} \Leftrightarrow Z_{53} \rightarrow (A + Z_{21})$$


$$\Leftrightarrow (Z_{53} \rightarrow A) + (Z_{53} \rightarrow Z_{21})$$

Решение:

биты	5	4	3	2	1	0	
53 =	1	1	0	1	0	1	
21 =		1	0	1	0	1	

 Всегда 1!

a – любое!

 Множество единичных битов числа 21 входит во множество единичных битов числа 53!

Побитовые логические операции (VI)

Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 23 \neq 0) \wedge (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 23 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \& N = 0\}$
 $\bar{Z}_N = \{x: x \& N \neq 0\}$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z}_N = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$(\bar{\mathbf{Z}}_{23} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{45}) \rightarrow (\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{23})$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$(\bar{Z}_{23} \cdot \bar{Z}_{45}) \rightarrow (\bar{A} \cdot \bar{Z}_{23}) \Leftrightarrow Z_{23} + Z_{45} + \bar{A} \cdot \bar{Z}_{23}$$

$$\Leftrightarrow (Z_{23} + \bar{A}) \cdot (Z_{23} + \bar{Z}_{23}) + Z_{45}$$

$$\Leftrightarrow \bar{A} + Z_{23} + Z_{45}$$

$$\Leftrightarrow A \rightarrow (Z_{23} + Z_{45})$$

$$\Leftrightarrow (A \rightarrow Z_{23}) + (A \rightarrow Z_{45})$$

$$(A \rightarrow Z_{23}) \Rightarrow a_{\min} = 23$$

или

$$(A \rightarrow Z_{45}) \Rightarrow a_{\min} = 45$$

Нерешаемая задача

$$\mathbf{Z}_{43} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{48}$$

Попытка решения:

	биты	5	4	3	2	1	0		
\mathbf{Z}_{43}	:	43	=	1	0	1	0	1	1
		a	=	?	?	?	?	?	?
\mathbf{Z}_{48}	:	48	=	1	1	0	0	0	0

Логическое ИЛИ
между битами!



С помощью a можно добавить биты, но нельзя убрать!

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru