

Тема 1. Теоретические основы финансовой математики

1. Время как фактор в финансовых расчетах.
2. Модели финансово-коммерческих операций
3. Проценты, виды процентных ставок.

Финансовая математика – раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса.

Целью изучения дисциплины «Методы финансовых расчетов» является получение необходимого базового объема знаний и формирование основных умений и навыков по методам финансово-экономических вычислений для решения прикладных задач в области экономики и управления.

Задачи изучения дисциплины

- 1) ознакомление с основными математическими категориями дисциплины;
- 2) раскрытие основных финансово-экономических понятий, целей, принципов финансовых расчетов;
- 3) изучение классификаций и способов вычисления процентов;
- 4) научиться использовать методы финансовых расчетов в различных областях экономики и управления;
- 5) выявление достоинств, недостатков и возможности применения существующих методов;
- 6) получение знаний и навыков по решению практических задач, связанных с определением параметров финансовой сделки; получение навыков работы со специальной литературой.

1. Время как фактор в финансовых расчетах

Финансовые вычисления базируются на принципе временной стоимости денег, т.е. принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени

2. Модели финансово-коммерческих операций

Методы финансовой математики условно делятся на две категории: базовые и прикладные.

Базовые методы и модели:

- 1) простые и сложные проценты как основа операций, связанные с наращением или дисконтированием платежей;
- 2) расчеты последовательностей (потоков) платежей применительно к различным видам финансовых рент.

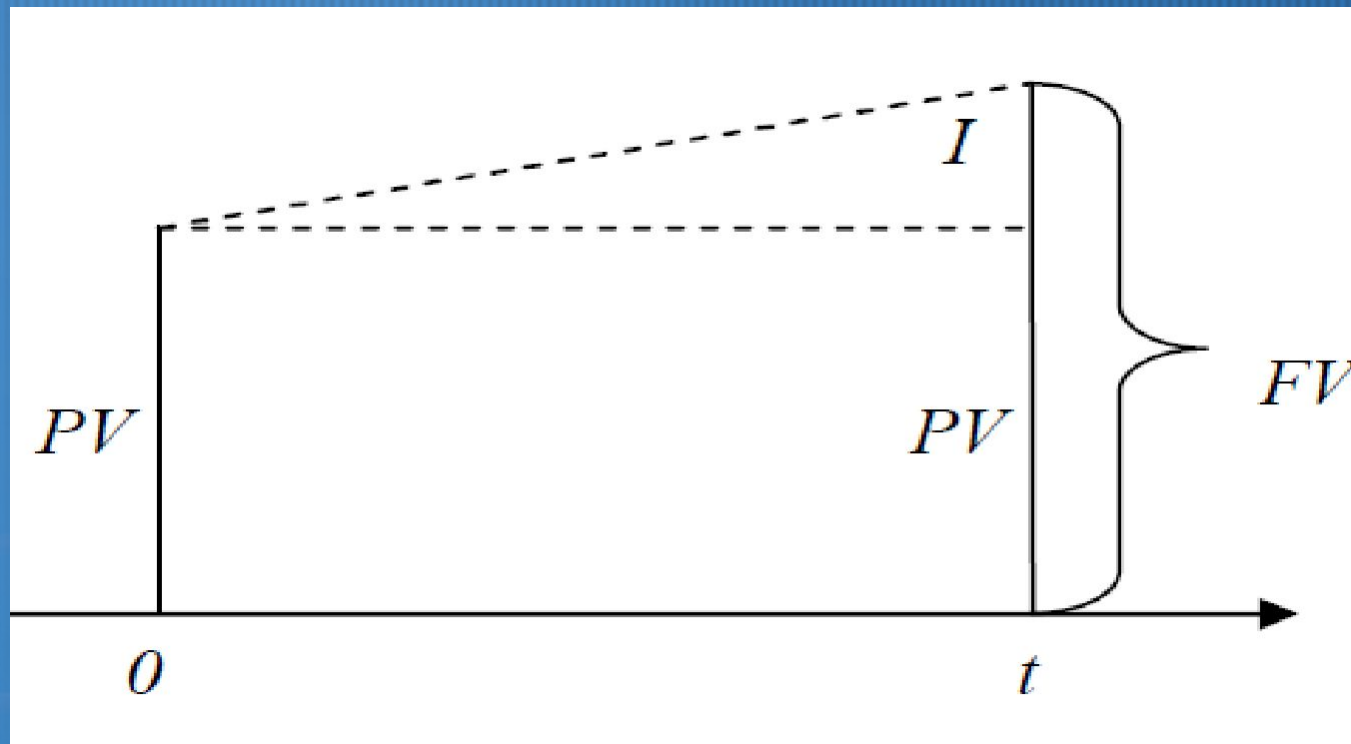
Прикладным методам финансовых расчетов относятся :

- 1) планирование и оценка эффективности финансово-кредитных операций;
- 2) расчет страховых аннуитетов;
- 3) планирование погашения долгосрочной задолженности;
- 4) планирование погашения ипотечных ссуд и потребительских кредитов;
- 5) финансовые расчеты по ценным бумагам;
- 6) лизинговые, факторинговые и форфейтинговые банковские операции;
- 7) планирование и анализ инвестиционных проектов и другие операции.

Основные понятия финансовых методов расчета

1. **процент (I)** это доход от предоставления денег в долг в различных формах (ссуда, кредит и т.д), либо от инвестиций производственного или финансового характера.
2. **процентная ставка (i)** это отношение суммы начисленных процентов, уплаченных (полученных) за единицу времени, к первоначальной сумме долга
3. **учетная (дисконтная) ставка (d)** – это отношение суммы начисленных процентов, уплаченных (полученных) за единицу времени, к ожидаемой к получению (возвращенной) сумме денежных средств.
4. **дисконт (D)** – доход, полученный по учетной ставке, или процент, взимаемый банком при учете вексельных операций
5. **период начисления (n)** интервал времени, в течение которого начисляются проценты. Период может разбиваться на интервалы начисления

6. **интервал начисления (m)** это минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов
7. **капитализация процента** присоединение начисленных процентов к основной сумме
8. **наращение** увеличение первоначальной суммы в связи с капитализацией
9. **дисконтирование** приведение стоимостной величины, относящейся к будущему, на некоторый, обычно более ранний момент времени (операция, обратная наращению).
10. **текущая или современная стоимость (PV)** – это первоначальная сумма вклада (долга).
11. **будущая или наращенная стоимость (FV)** - это первоначальная сумма вклада с процентами, начисленными к концу срока



Процесс образования наращенной стоимости

3. Проценты и виды процентных ставок



Виды процентных ставок:

1. в зависимости от базы для начисления процента различают **простые проценты** (постоянная база) и **сложные проценты** (переменная база);
2. по принципу расчета различают **ставку приращения — декурсивная ставка и учетную ставку - антисипативная ставка;**
3. по постоянству значения процентной ставки в течение действия контракта - **фиксированные и плавающие** (фиксируется ли изменяющаяся во времени база и размер надбавки к ней — маржа).

Способы начисления процентов

Антисипативный способ начисления процентов. Процент начисляется в начале каждого интервала начисления

Декурсивный способ начисления процентов. Проценты начисляются в конце каждого интервала начисления.

Тема 2. Финансовые расчеты по схеме простых процентов

1. Операции наращения по схеме
простых процентов
2. Операции дисконтирования по
схеме простых процентов

1. Операции наращенния по схеме простых процентов

- Условные обозначения:
- I – сумма начисленных процентов;
- PV – первоначальная сумма вклада (долга);
- FV – наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока);
- i – ставка наращенния процентов (десятичная дробь) (как правило, годовая ставка);.
- n – срок ссуды (как правило, в годах).

Наращенная сумма равна:

- к концу первого года

$$FV1 = PV + PV*i = PV*(1+i);$$

- к концу второго года

$$FV2 = FV1 + I = PV + PV*i + PV*i = PV*(1+2i);$$

- к концу n-го года —

$$FVn = PV + PV*i + \dots + PV*i = PV*(1+ni);$$

Модель накопления капитала по схеме простых процентов

$$FV = PV \cdot (1 + ni),$$

где $(1 + ni)$ - множитель наращения простых
процентов

Расчет процентов для краткосрочных ссуд

период использования ссуды определяется
по формуле

$$n = t / T$$

где t — количество дней (месяцев)
начисления процентов;

T — количество дней (месяцев) в году (временная база начисления).

- **Временная база может быть равна:**

1. 360 дней. Используются для расчета **обыкновенных** или **коммерческих процентов**.
2. 365 или 366 дней. Используется для расчета **точных процентов**.

Число дней ссуды

1. **Точное число дней ссуды** — определяется путем подсчета числа дней между датой ссуды и датой ее погашения.
2. **Приближенное число дней ссуды** — определяется из условия, согласно которому любой месяц принимается равным 30 дням.

Варианты расчета простых процентов:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365) - предусматривает использование календарного количества дней в месяце и в году
2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (банковский; 365/360) - предусматривает использование календарного количества дней в месяце и 360 дней в году .
3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360). предусматривает принятие месяца равным 30 дням, а года – 360 дням.

Для всех вариантов расчета дата выдачи и дата погашения считаются за *один день*.

Порядковые номера дней в году

День меся- ца	я	ф	м	а	м	и	и	а	с	о	н	д
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Переменные ставки простых процентов

$$FV = PV \times \left(1 + \sum_{k=1}^N n_k \times i_k\right)$$

где N – число интервалов начисления процентов;

n_k - длительность k -интервала начисления;

i_k – простая процентная ставка на k -интервале начисления.

$$S = P(1 + n_1 i_1) \cdot (1 + n_2 i_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_t i_t) \cdot \dots$$

Реинвестирование по простым ставкам

Наращенная сумма для всего срока составит

$$FV = PV(1 + n_1 i_1) \times (1 + n_2 i_2) \times \dots \times (1 + n_t i_t)$$

где i_t – размер ставок, по которым производится реинвестирование

Если промежуточные строки nt и ставки i_t не изменяются

$$FV = P(1 + ni)^m$$

где m – число повторений реинвестирования

Пример 100 млн. руб. положены 1 января на месячный депозит под 20 % годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

1. Точные проценты (365/365):

$$FV = 100 \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2\right) \cdot \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0,2\right) \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2\right) = 105,013$$

2. Обыкновенные проценты (360/360):

$$FV = 100 \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,2\right)^3 = 105,084$$

2. Операции дисконтирования по схеме простых процентов

Формула нахождения текущей стоимости

$$PV = \frac{FV}{1 + ni}$$

где $\frac{1}{1 + ni}$ - коэффициент дисконтирования

Тема 3. Финансовые расчеты по схеме сложных процентов

1. Операции наращения по схеме сложных процентов. Номинальная и эффективная процентная ставки
2. Операции дисконтирования по схеме сложных процентов

1. Операции наращенния по схеме сложных процентов. Номинальная и эффективная процентная ставки

Формула наращенния сложных процентов

$FV = PV + I = PV + PVi = PV(1 + i)$ – за один период начисления;

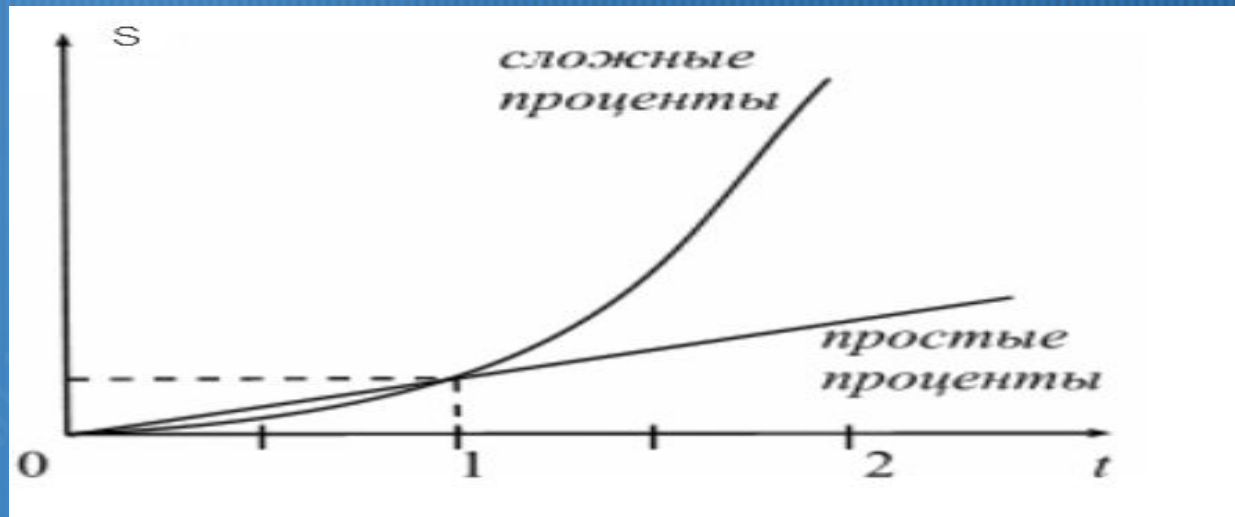
$FV = PV(1 + i)(1 + i) = PV(1 + i)^2$ – за два периода начисления

Формула наращенния за n периодов начисления

$$FV = PV(1 + i)^n$$

где FV – наращенная сумма;
 PV – первоначальная сумма;
 i – сложная процентная ставка;
 n – период начисления

Соотношение наращенной суммы по простым и сложным процентам



если $0 < n < 1$, то $(1 + ni) > (1 + i)n$

если $n > 1$, то $(1 + ni) < (1 + i)n$

если $n = 1$, то $(1 + ni) = (1 + i)n$

Наращение по сложным процентам при изменении ставки во времени

$$FV = PV \prod_{k=1}^N (1 + i_k)^{n_k}$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ - значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ времени.

Начисление процентов за дробное число лет

1. *Общий* метод:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$n = a + b$$

где n – период сделки;
 a – целое число лет;
 b – дробная часть года.

2. Смешанный метод расчета

$$FV = PV \times (1 + i)^a \times (1 + bi)$$

где a – целое число лет;
 b – дробная часть года

Начисление процентов более одного раза в год

$$N = n \times m$$

Где m – количество начислений в году;
 n – период начисления лет

$$FV = PV \times (1 + i/m)^N = PV \times (1 + i/m)^{mn}$$

где i – номинальная годовая ставка процентов