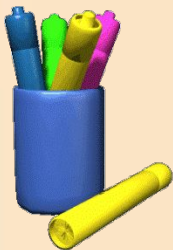


Подготовка к ЕГЭ. Решение задач С2.

Коткова Евгения Сергеевна,
учитель математики
МБОУ «Лицей № 83» г. Казани,
I квалификационная категория



Типы задач С2

- Расстояние между двумя точками
- Расстояние от точки до плоскости
- Угол между прямой и плоскостью
- Угол между плоскостями



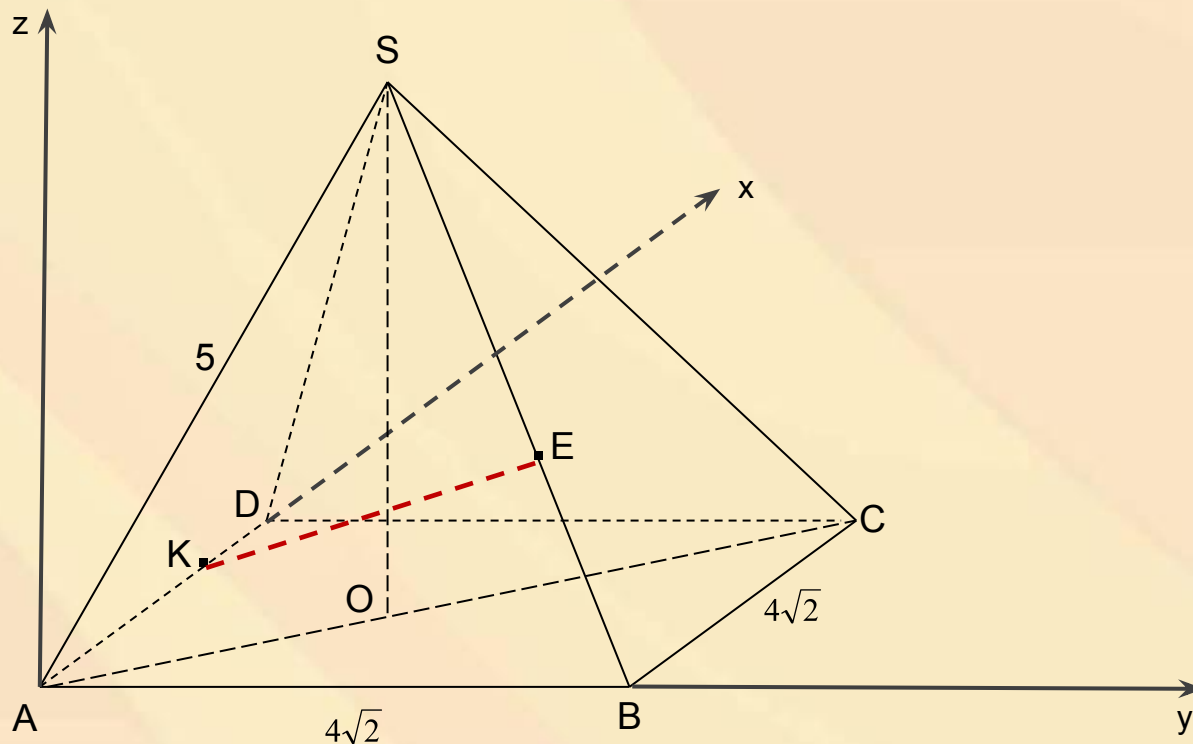
Расстояние между двумя точками

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ - концы отрезка AB . Тогда внутренняя точка C отрезка AB такая, что $AC:CB=k$, имеет координаты

$$C\left(\frac{x_1 + kx_2}{k + 1}, \frac{y_1 + ky_2}{k + 1}, \frac{z_1 + kz_2}{k + 1}\right)$$



Задача. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания и боковое ребро которой равны $4\sqrt{2}$ и 5 соответственно. Найдите расстояние между точками E и K , если известно, что E лежит на боковом ребре SB и $SE=2BE$, а K – на стороне основания AD и $AK=3KD$.



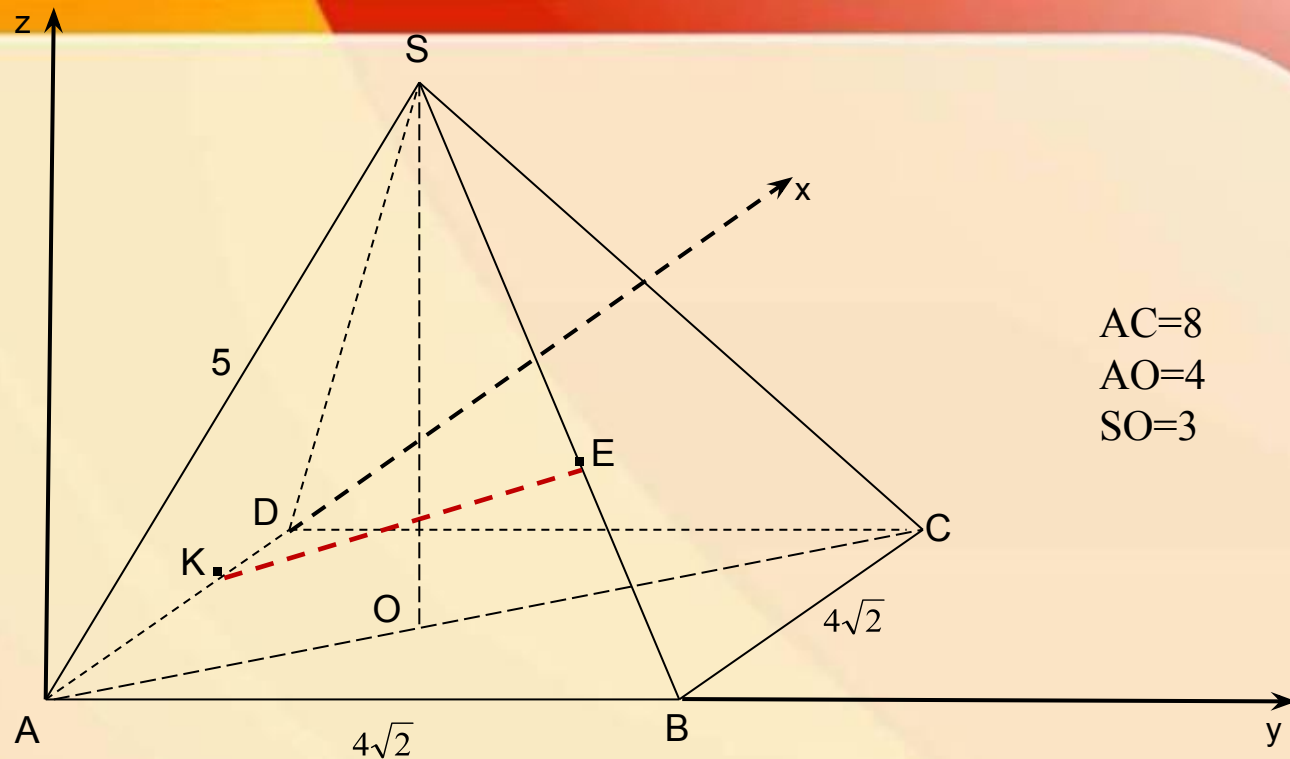
$$\begin{aligned} AC &= 8 \\ AO &= 4 \\ SO &= 3 \end{aligned}$$

$$K(3\sqrt{2}; 0; 0)$$

$B(0; 4\sqrt{2}; 0), S(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3) \Rightarrow$ по формуле находим координаты точки E :

$$E\left(\frac{2\sqrt{2} + 2 \cdot 0}{2+1}; \frac{2\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{2}}{2+1}; \frac{3 + 2 \cdot 0}{2+1}\right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{10\sqrt{2}}{3}; 1\right)$$





$$K(3\sqrt{2}; 0; 0), \quad E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{10\sqrt{2}}{3}; 1\right)$$

$$KE = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{3} - 0\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{98}{9} + \frac{200}{9} + 1} = \frac{\sqrt{307}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{307}}{3}$



Расстояние от точки до плоскости

Координатный метод

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Задача (ЕГЭ, 2012). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D – середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

Решение: $A(0; 0; 0)$, $B_1(1; \sqrt{3}; 3)$, $D\left(2; 0; \frac{3}{2}\right)$

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$,

$$\begin{cases} d = 0, \\ a + \sqrt{3}b + 3c = 0, \\ 2a + \frac{3}{2}c = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0, \\ b = \sqrt{3}a, \\ c = -\frac{4}{3}a. \end{cases}$$

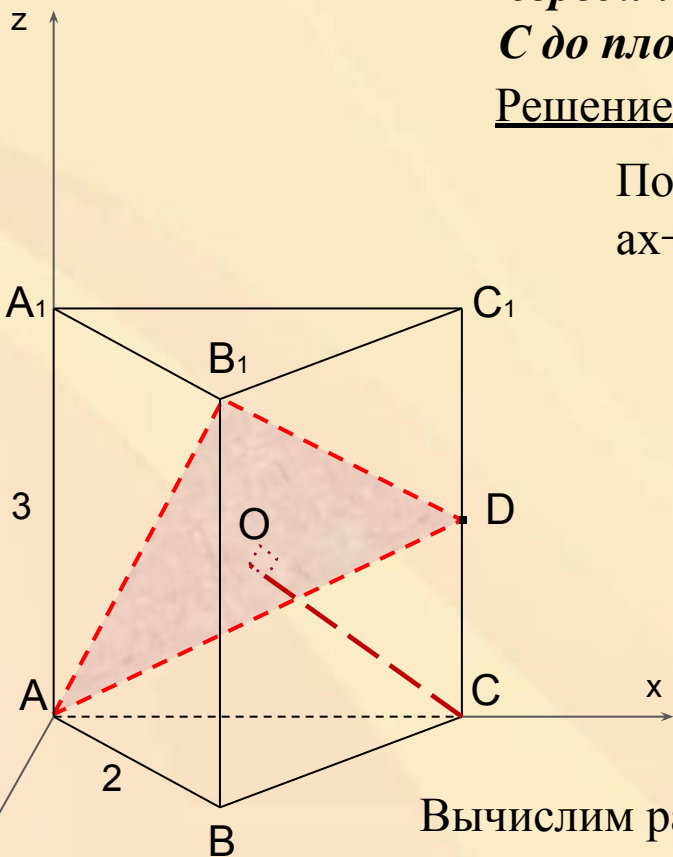
$$ax + \sqrt{3}ay - \frac{4}{3}az = 0 \Rightarrow 3x + 3\sqrt{3}y - 4z = 0$$

$$a = 3, b = 3\sqrt{3}, c = -4, d = 0, \quad C(2; 0; 0)$$

Вычислим расстояние от точки C до плоскости ADB_1 по формуле:

$$\rho(C, ADB_1) = \frac{|2 \cdot 3 + 3\sqrt{3} \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{9 + 27 + 16}} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$



Угол между прямой и плоскостью

Векторно - координатный метод

Угол между прямой ℓ и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α ,
 $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой ℓ .



Задача. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 3, а высота равна 1. Найдите угол между прямой $F_1 B_1$ и плоскостью $A F_1 C_1$.

Решение:

Вектор \vec{n} найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\vec{A F_1}$ и $\vec{C_1 F_1}$, т.е. из условий

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{A F_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{C_1 F_1} = 0, \end{cases} \quad \vec{A F_1} = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}, \quad \vec{C_1 F_1} = \{-6; 0; 0\}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y + z = 0, \\ -6x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{3\sqrt{3}}{2}y, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$\vec{n} = \{0; 2; 3\sqrt{3}\}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{31}$$

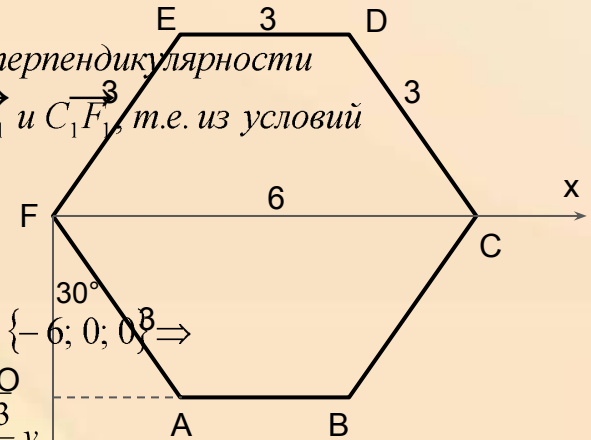
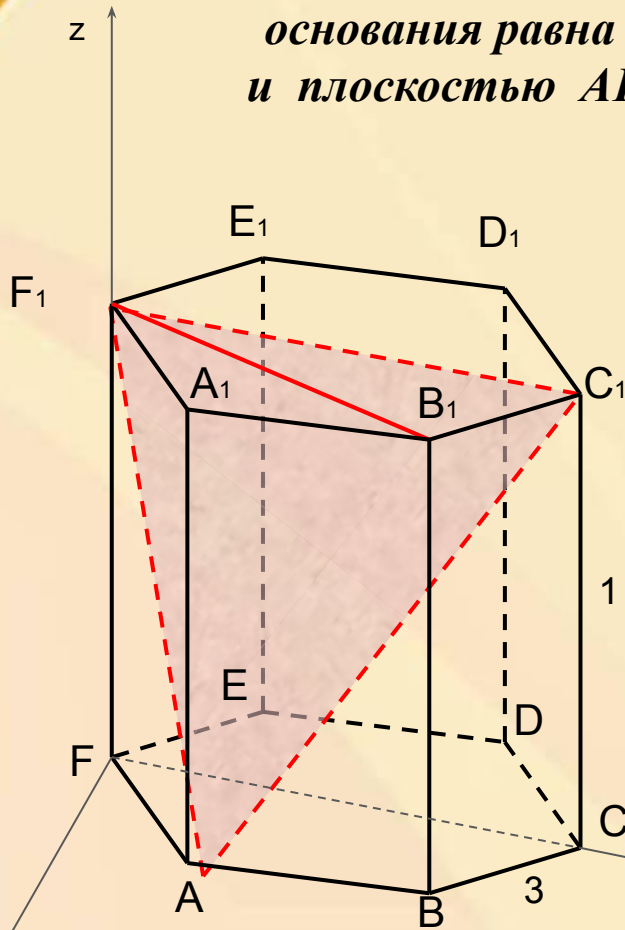
Пусть $y = 2$, тогда $z = 3\sqrt{3}$, $x = 0$ и $\vec{n} = \{0; 2; 3\sqrt{3}\}$, $|\vec{n}| = \sqrt{31}$.

Т.к. $|\vec{F_1 B_1}| = 3\sqrt{3}$ и $\vec{F_1 B_1} \cdot \vec{n} = 0 \cdot \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 3\sqrt{3} \cdot 0 = 3\sqrt{3}$,

Пусть $\vec{n} = \{x; y; z\}$ вектор, перпендикулярный плоскости α ,
 $\sin \varphi = \frac{|\vec{F_1 B_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{F_1 B_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{31}} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{31}}{31}$
 φ – искомый угол.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{F_1 B_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{F_1 B_1}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{31}}{31}$



Угол между плоскостями

Векторно - координатный метод

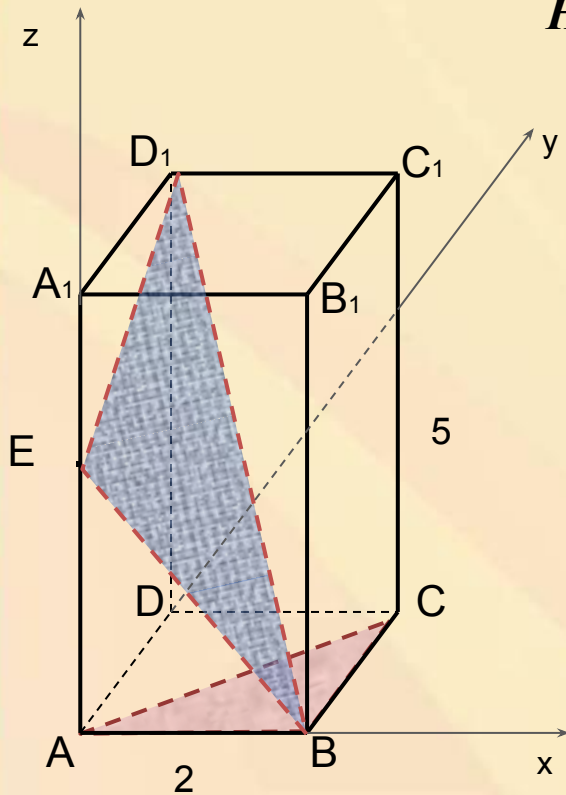
Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β , заданными в прямоугольной системе координат уравнениями $p_1x+q_1y+r_1z+d_1=0$ и $p_2x+q_2y+r_2z+d_2=0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей

$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$



Задача (ЕГЭ, 2012). В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=3:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .



Решение: Составим уравнение плоскости BED_1 .

$$B(2;0;0), E(0;0;3), D_1(0;2;5)$$

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, вычислим косинус искомого угла:

$$\cos \alpha(ABC, BED_1) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{20+0+1}} \cdot \frac{|0+0-2|}{\sqrt{d^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

Отсюда искомый угол равен $\arccos \frac{2\sqrt{17}}{17}$.

$$-\frac{1}{2}dx + \frac{1}{3}dy - \frac{1}{3}dz + d = 0 \Rightarrow$$

$$-3x + 2y - 2z + 6 = 0 - \text{уравнение плоскости}$$

Координаты нормального вектора $n_1 = \{-3; 2; -2\}$.

Т. к. ось Az перпендикулярна плоскости основания, то нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $n_2 = \{0; 0; 1\}$





Спасибо за внимание!



Расстояние между двумя точками

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ - концы отрезка AB . Тогда внутренняя точка C отрезка AB такая, что $AC:CB=k$, имеет координаты

$$C\left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}, \frac{y_1 + ky_2}{k+1}, \frac{z_1 + kz_2}{k+1}\right)$$



Расстояние от точки до плоскости

Координатный метод

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Угол между прямой и плоскостью

Векторно - координатный метод

Угол между прямой ℓ и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α ,
 $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой ℓ .



Угол между плоскостями

Векторно - координатный метод

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β , заданными в прямоугольной системе координат уравнениями $p_1x+q_1y+r_1z+d_1=0$ и $p_2x+q_2y+r_2z+d_2=0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей

$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

