Тема 6. **Транспортная логистика**

Презентация подготовлена преподавателем кафедры «Прикладной математики»
Тесёлкиной Е.С.

Предметом ТЛ является комплекс задач, связанный с организацией перемещения грузов транспортом общего назначения.

В области ТЛ ставятся и решаются следующие **задачи**:

- определение оптимального плана перевозок однородной продукции,
- многопродуктовые ТЗ с независимыми и взаимозаменяемыми поставками,
- задачи размещения с учетом транспортных и производственных затрат,
- определение рациональных маршрутов и транзитная перевозка продукции.

- Задачи ТЛ решаются во взаимной связи с другими задачами логистики, такими, как производственная логистика (ПС), складская логистика, логистика запасов, сбытовая логистика, информационная логистика.

«Задача коммивояжера»

Постановка задачи

- Имеется n городов, пронумерованных числами 1,2,..., n.
- Для любой пары городов (i,j) задано расстояние (время, путевые расходы) $C(i,j) \geq 0$ между ними.
- В общем случае $C(i,j) \neq C(j,i)$, причём $C(i,i) = \infty$.
- Иногда $C(i,j) = \infty$ при $i \neq j$, если переезд от города i до города j невозможен или очень дорог.

Постановка задачи

- Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города по одному разу и вернуться в исходный город.
- Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы минимальной.

- Другая интерпретация этой задачи связана с минимизацией времени переналадок при обработке на одном станке партии из n различных деталей.
- Здесь $C(i, j)$ – время переналадки при переходе от обработки детали i к обработке детали j. Требуется найти последовательность обработки деталей, минимизирующую общее время переналадок.

- Описанная модель имеет большое прикладное значение: различные её варианты могут возникать, например, в задачах, связанных с развозкой почты, готовой продукции и т.д.

Гамильтонов цикл

- Замкнутый маршрут (i1, i2,…,in, i1), проходящий, через каждый город один и только один раз, т.е. набор переездов (дуг) {(i1,i2), (i2,i3), …, (in-1,in), (in,i1)} называется ***гамильтоновым циклом*** *или* просто циклом, маршрутом коммивояжёра и обозначается через

  x = {(i1,i2), (i2,i3), …, (in-1,in), (in,i1)}.

- Через T обозначим множество всех гамильтоновых циклов, а через F(x) – издержки цикла X.
- Необходимо отыскать такой маршрут x* , что

$$F(x^*) = \min_{x \in T} F(x) \; .$$

Для записи постановки задачи в терминах ЗЦЛП (задачи целочисленного линейного программирования) определим переменные следующим образом:

x_{ij}= 1, если коммивояжер переезжает и *i*-го города в *j*-й;

x_{ij}=0, в противном случае.

Тогда задача заключается в отыскании значений переменных , удовлетворяющих следующим соотношениям:

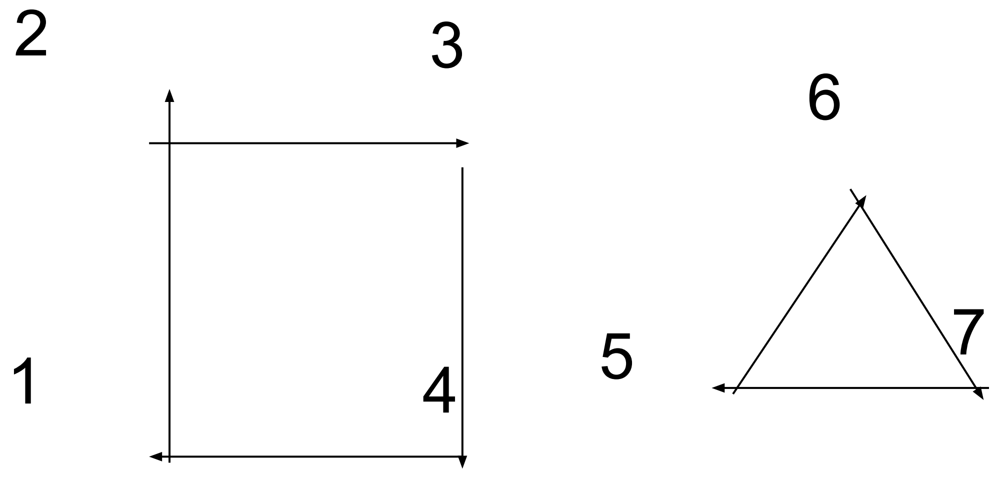
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

при условиях

- $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$ (въезд в город j); (2)
- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$ (выезд из города i); (3)
- $u_i - u_j + (n-1) \cdot x_{ij} \leq n - 2$, $i \neq j$, $j, i = 2, \ldots, n$; (4)
- $xij = \{0,1\}$, $u_i \geq 0$, целые, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. *(5)*

Ограничения (4) требуют, чтобы маршрут образовывал контур, т.е. служат для устранения нескольких не связанных между собой маршрутов и циклов.

Пример, когда маршрут распадается на два не связанных между собой подцикла



Решение

- Решение описанной выше математической модели можно реализовать с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel (см. пример «6_Задача коммивояжера.xlsx»).
- Кроме того задача может быть решена методом ветвей и границ.
- Выбирайте любой удобный для вас способ.

Применение метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера

- Допустимый маршрут x представим как множество упорядоченных пар городов:
$$x = \{(\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2), (\mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3), \ldots, (\mathrm{i}_{n\text{-}1}, \mathrm{i}_n), (\mathrm{i}_n, \mathrm{i}_1)\}$$
- Длина *F*(*x*) маршрута *x* равна сумме соответствующих элементов *C*(*i,j*). Заметим, что множество всех допустимых маршрутов *X* содержит (n-1)! элементов.
- Обозначим через $C = (C_{ij})_{n\times n}$ матрицу расстояний. Чтобы запретить переезды вида (*i,i*) положим *C* (*i,i*) = +∞ (*i* = 1,…, *n*).

- Обозначим через $Z_0 = F(x_0)$ верхнюю границу длин всех маршрутов, т.е.

$$F(x^*) \le Z_0 ,$$

- где x^* - оптимальный гамильтонов цикл (маршрут).
- Определить $F(x_0)$ можно, отыскав какой-либо произвольный допустимый маршрут коммивояжёра и подсчитав его издержки.
- Например, допустимым будет являться следующий гамильтонов цикл

$$x_0= \{(1,2); (2,3); (3,4); ((4,5); (5,1)\}.$$

- Пусть $$P_i = \min\{C_{ij}\}, \quad j = (1,\ldots n),$$

$$Q_j = \min\{C_{ij} - P_i\}, \quad i = (1,\ldots n);$$

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - P_i - Q_j$$

- Тогда $\overline{C} = (\overline{C}_{ij})_{n\times n}$ – редуцированная матрица.

- Пусть $d(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{j=1}^{n} Q_j$ – сумма констант редуцирования.

Тогда для любого маршрута

$$x = \{(i_1\, i_2),\ (i_2\, i_3), \ldots, (i_{n-1}\, i_n),\ (i_n\, i_1)\} \in X$$

справедливо

$$F(x) = C(i_1, i_2) + C(i_2, i_3) + \ldots + C(i_n, i_1) =$$

$$= \overline{C}(i_1, i_2) + \overline{C}(i_2, i_3) + \ldots + \overline{C}(i_n, i_1) + \mathrm{d(x)} \geq d(x)$$

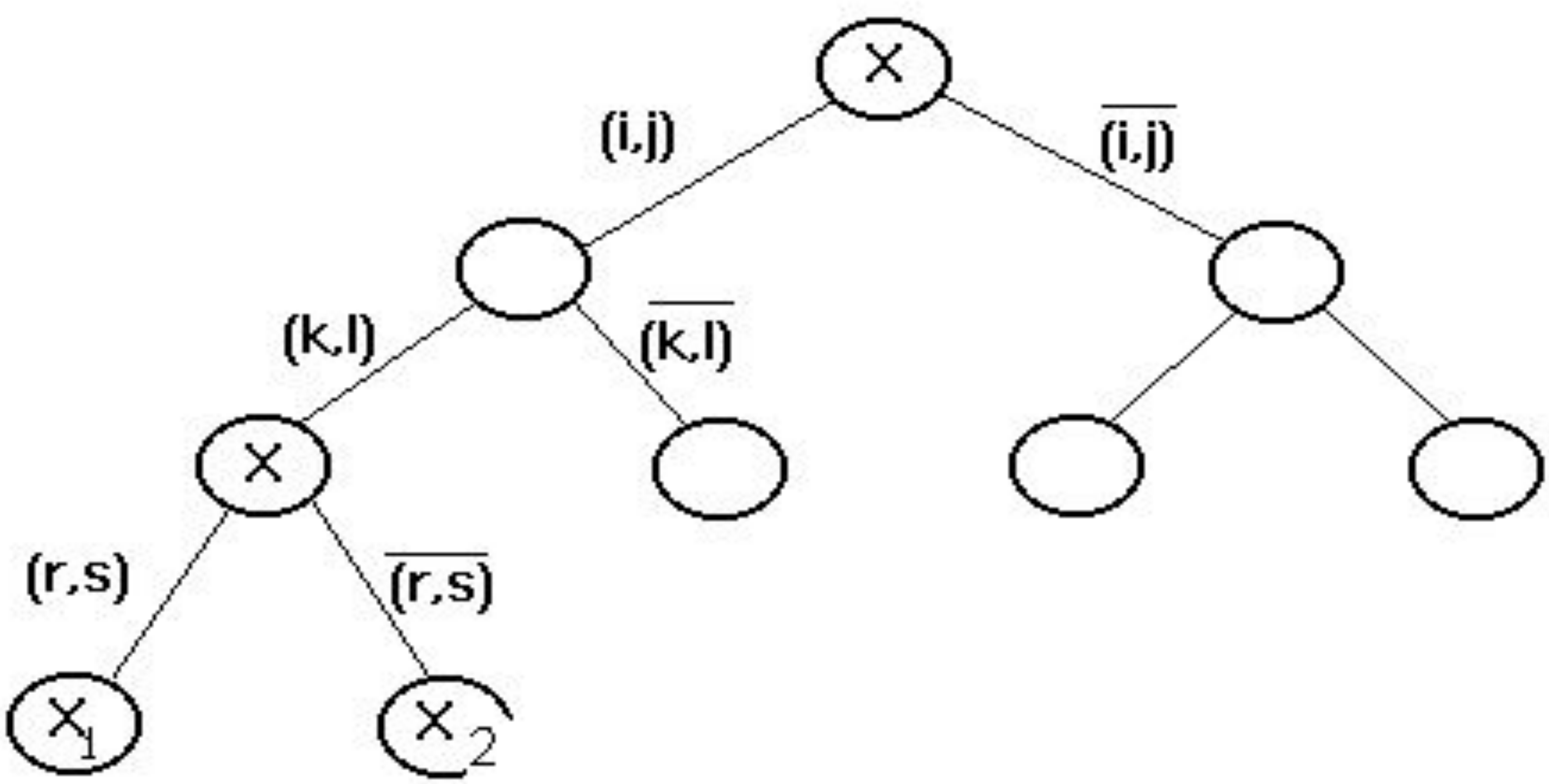
Это неравенство показывает, что в качестве нижней оценки издержек любого цикла *x* на множестве T можно взять суммарную константу приведения *d*(*x*) матрицы C.

Ветвление

- Процесс ветвления можно представить в виде дерева, каждая вершина которого соответствует некоторому множеству маршрутов, являющемуся подмножеством множества X. При этом начальная вершина соответствует множеству всех маршрутов X.

- На каждом шаге из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X^1 с наименьшей оценкой. Оно разветвляется на два подмножества X_1^1 и X_2^1. Подмножество состоит из всех маршрутов множества X^1 содержащих некоторую выбранную на данном шаге дугу (r, s), подмножество , – из всех маршрутов множества X^1, не содержащих дуги (r,s).

- Ребро дерева, соединяющее вершины X^1 и X_1^1, помечается (r,s), а ребро дерева, соединяющее X1 и X_2^1 помечается $\overline{(r,s)}$.



Ясно, что для разбиения лучше выбирать множество с минимальной нижней оценкой, так как вероятнее всего именно в нём содержится оптимальный цикл x*.

Дугу (r,s) будем выбирать из следующих соображений:

- С одной стороны, издержка c_{rs} должна быть как можно меньше, чтобы в конце концов из всех фиксированных дуг получить гамильтонов цикл, близкий к оптимальному.
- С другой стороны, будем максимально увеличивать нижнюю оценку d(y) множества X_2^1, тогда возрастает вероятность того, что для разбиения всякий раз будет выбираться множество X_1^1, и появится возможность быстрее получить гамильтонов цикл.
- Если при этом окажется, что его издержки меньше z_0, то z_0 будет скорректирована (уменьшена), а это сократит число просматриваемых циклов.

- Кроме того, такой подход к выбору дуги (r,s) позволяет сократить объём хранимой в памяти информации, а именно, необходимо иметь исходную матрицу издержек C(T), рабочую матрицу C′(X_2^1) и информацию о каждом множестве: его нижнюю оценку издержек и все фиксированные и запрещённые для него дуги.
- Если в процессе решения задачи нужно будет разбивать множество, отличное от X_2^1, то соответствующую ему матрицу издержек можно восстановить их исходной матрицы C(T) на основании этой информации.

Выбор фиксированного переезда (r,s):

1) в приведенной матрице издержек C′(Xi) просмотреть все элементы c'_{ij} =0; (стремление к уменьшению $d(X_1^1)$)
2) для каждого из них определить величину θ_{ij}, равного сумме минимального элемента i-той строки и j-го столбца, за исключением самого элемента c'_{ij};

$$\theta(\mu,v) = \min_{\rho:\rho\neq v} \overline{C}^1(\mu,\rho) + \min_{\sigma:\sigma\neq\mu} \overline{C}^1(\sigma,v)$$

где (m,v) – дуга, для которой c'_{ij} =0.

3) выбрать фиксированный переезд (r,s) из условия

$$\theta(r,s) = \max_{\mu,\nu:\overline{C}^1(\mu,\nu)=0} \{\theta(\mu,\nu)\}.$$

(стремление увеличить $d(X_2^1)$).

Смысл введения функции θ состоит в том, что величина $\theta(\mu,\nu)$ является оценкой снизу для длины любого маршрута из X_1, не содержащего дуги (μ,ν), так как величина $\theta(\mu,\nu)$ выражает дополнительное расстояние, которое коммивояжер проезжает в случае, когда в маршрут не включена дуга (μ,ν).

Построение редуцированных матриц $\overline{C}_1^1$ *и* $\overline{C}_2^1$ *и вычисление оценок снизу*

Рассмотрим , как на произвольной итерации получить матрицы $\overline{C}_1^1$ и $\overline{C}_2^1$, если известны матрица $\overline{C}^1$ и дуга (r,s).

Схема получения матрицы $\overline{C}_2^1$

- Так как дуга (r,s) не должна входить ни в один гамильтонов цикл, принадлежащий множеству X_2^1, то в матрице $\overline{C}^1$ полагаем $c'_{rs}=\infty$.

$$C_2^1(i,j)=\begin{cases}\overline{C}^1(i,j), & (i,j)\neq(r,s),\\ +\infty & (i,j)=(r,s).\end{cases}$$

- Приводим матрицу C_2^1, получим $\overline{C}_2^1$.
- Сумма констант редуцирования равна при этом $\theta(r,s)\cdot$
- Нижняя граница издержек для множества X_2^1 определится по формуле

$$d(X_2^1)=d(X^1)+\theta(r,s)$$

Схема получения матрицы $\overline{C}_1^1$

- Так как дуга (r,s) уже входит в любой гамильтонов цикл, принадлежащий множеству X_1^1, то согласно постановке задачи необходимо запретить выезд из города r и въезд в город s, поэтому в матрице $\overline{C}^1$ вычеркиваем строку r и столбец s.
- Для устранения подциклов необходимо составить из всех дуг, фиксированных для множества X_1^1, связный путь, обязательно содержащий последнюю фиксированную дугу (r,s).

  Полагаем $C_1^1(t,m) = +\infty$ в матрице $\overline{C}^1$, где t и m – соответственно конец и начало связного пути, в результате получим матрицу C_1^1.

- Редуцированная матрица расстояний $\overline{C}_1^1$ для вершины X_1^1 получается из матрицы C_1^1 с помощью операции редуцирования.

  Обозначим через τ константу приведения (редуцирования) матрицы C_1^1.

- Оценка снизу для функции *F*(*x*) на множестве X_1^1 вычисляется по формуле

$$d(X_1^1) = d(X^1) + \tau$$

Формирование списка кандидатов на ветвление (ответа)

После вычисления каждой из оценок $d(X_i^1)$ (i = 1,2) следует проверить, не состоит ли множество X_i^1 из единственного маршрута:

если в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\overline{C}_i^1$ оказалось лишь по одному элементу, отличному от + ∞, то множество X_i^1 содержит единственный маршрут, длина которого равна $d(X_i^1)$. В этом случае верхняя граница (наименьшее из уже вычисленных значений $F(x)$) полагается равной минимуму из *предыдущего* значения Z_0 и $d(X_i^1)$, т.е.

$$Z_0 = \min \{Z_0, d(X_i^1)\}.$$

иначе…

- Если X_i^1 содержит более одного маршрута и $d(X_i^1)$ меньше текущего значения Z_0, то рассматриваемое множество включается в число кандидатов на ветвление. (продолжаем по описанной схеме)

- Остановка производится, если наименьшая из оценок снизу кандидатов на ветвление не меньше (равна либо превышает) текущего значения Z_0.

Решить методом ветвей и границ задачу коммивояжера с матрицей

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty \end{pmatrix}$$

Редуцирование

$$
C=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty \end{pmatrix}
\begin{array}{|c} 10 \\ 1 \\ 8 \\ 10 \\ 8 \end{array}
\sim
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} \infty & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & \infty & 9 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & \infty & 12 & 2 \\ 4 & 0 & 14 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & 17 & 19 & \infty \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0 & 0 & 9 & 12 & 0 \end{matrix}
\end{array}
\sim
\begin{pmatrix} \infty & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 7 & \infty \end{pmatrix}
= \quad \overline{C}
$$

Дерево решений