# ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

# Вырожденность решения

$$f = 3x_1 + 9x_2 \to \max$$

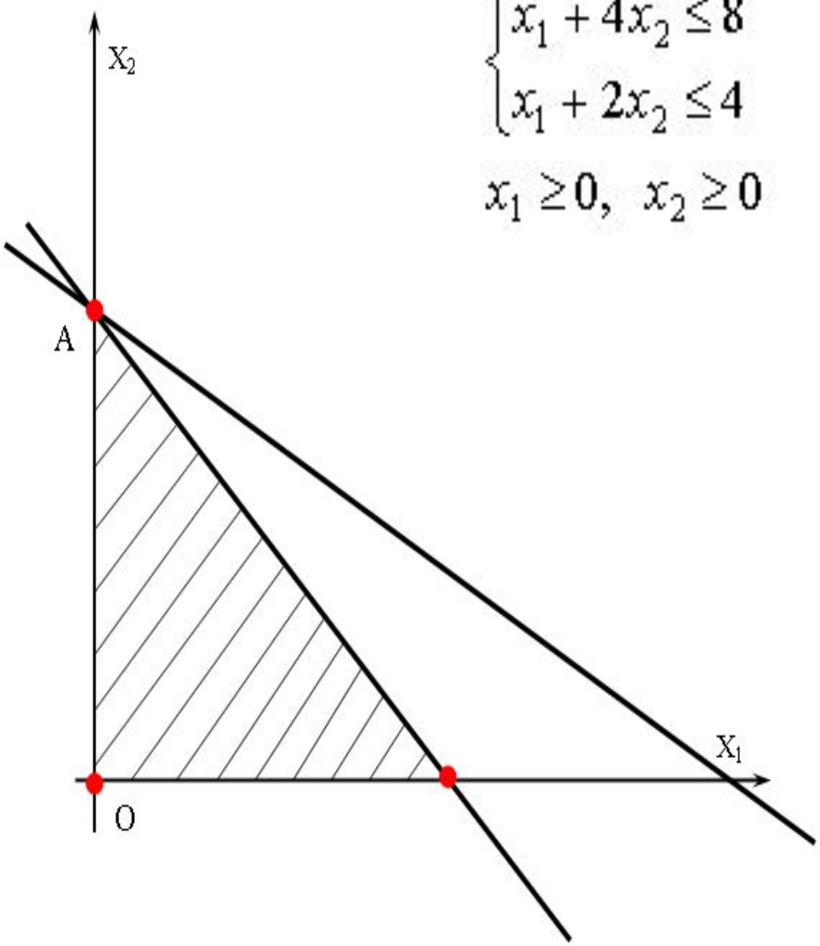
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$f = 3x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

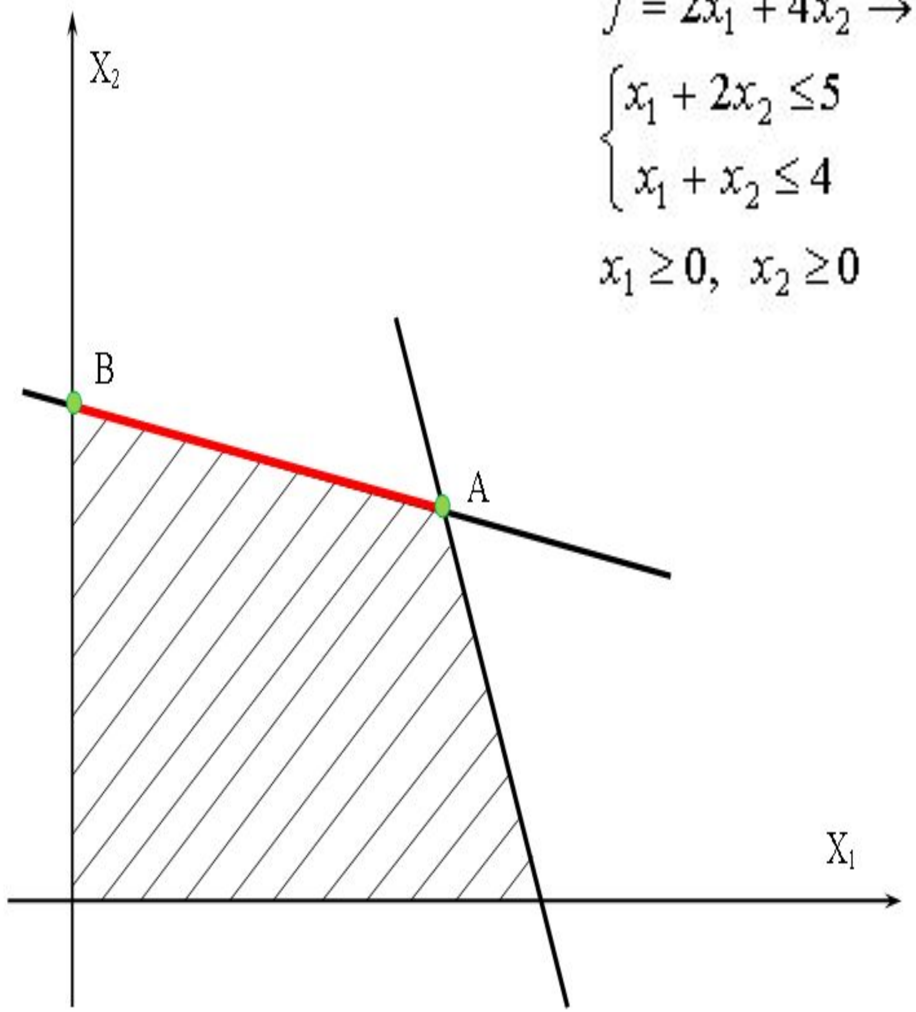



| O | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | Решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x3 | 1 | 4 | 1 | 0 | 8 | 2 |
| | x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 4 | 2 |
| | f | -3 | -9 | 0 | 0 | 0 | |

| A | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | Решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x2 | 0,25 | 1 | 0,25 | 0 | 2 | 8 |
| | x4 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | 0 | 0 |
| | f | -0,75 | 0 | 2,25 | 0 | 18 | |

| A | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | x2 | 0 | 1 | 0,5 | -0,5 | 2 |
| | x1 | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 |
| | f | 0 | 0 | 1,5 | 1,5 | 18 |

# II Альтернативные оптимальные решения




$$f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

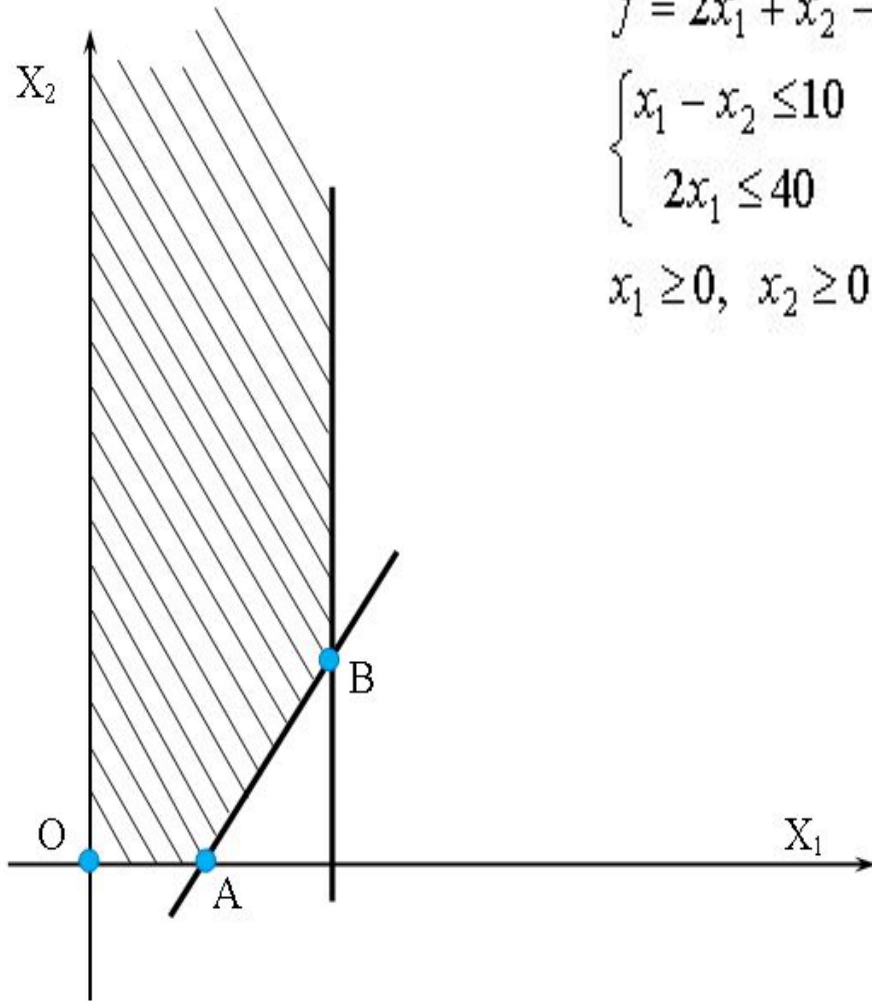
$$f = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
| | x3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2,5 |
| | x4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 4 |
| | f | -2 | -4 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | | | | |
| B | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
| | x2 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 2,5 | 5 |
| | x4 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | 1,5 | 3 |
| | f | 0 | 0 | 2 | 0 | 10 | |
| | | | | | | | |
| A | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
| | x2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | |
| | x1 | 1 | 0 | -1 | 2 | 3 | |
| | f | 0 | 0 | 2 | 0 | 10 | |

# III Неограниченное решение




$$f = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_4 = 40 \end{cases}$$

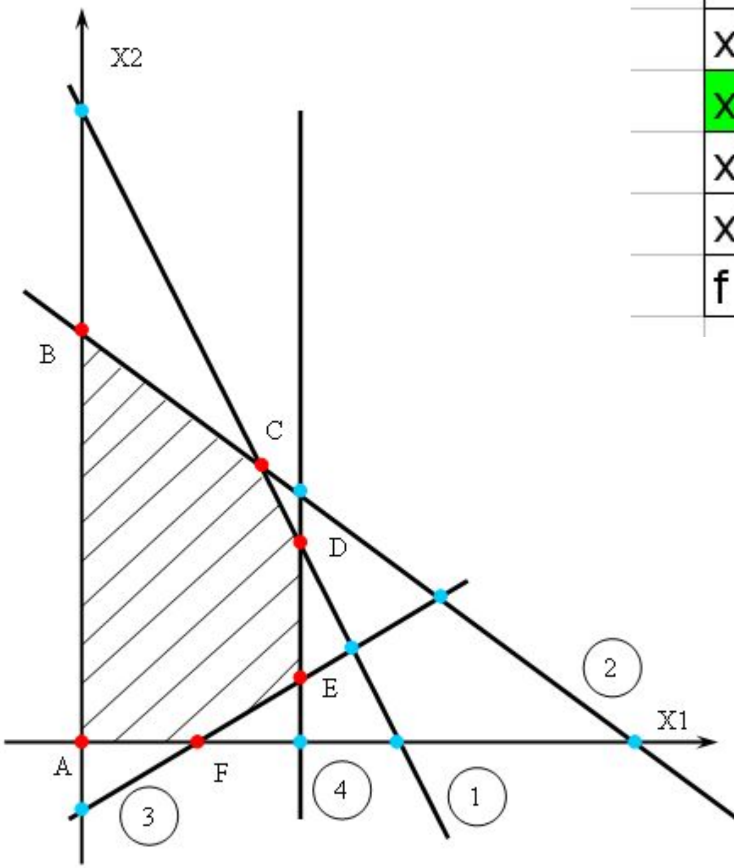
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0$$

| | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | | | | | | | |
| | x3 | 1 | -1 | 1 | 0 | 10 | 10 |
| | x4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 40 | 20 |
| | f | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | | | | |
| A | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
| | x1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 10 | -10 |
| | x4 | 0 | 2 | -2 | 1 | 20 | 10 |
| | f | 0 | -3 | 2 | 0 | 20 | |
| | | | | | | | |
| B | БП | x1 | x2 | x3 | x4 | решение | |
| | x1 | 1 | 0 | 0 | 0,5 | 20 | #ДЕЛ/0! |
| | x2 | 0 | 1 | -1 | 0,5 | 10 | -10 |
| | f | 0 | 0 | -1 | 1,5 | 50 | |

# Анализ ЗЛП на чувствительность

- I Статус ресурса – дефицитный (недефицитный) – определяется по значению дополнительных переменных в оптимальном решении
- II Ценность ресурса – определяется коэффициентами ЦФ при дополнительных переменных в оптимальном решении

# Статус и ценность ресурсов




A

| БП | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| БП | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | 1 | 0 | 0,67 | -0,3 | 0 | 0 | 1,33333 |
| x2 | 0 | 1 | -0,33 | 0,7 | 0 | 0 | 3,33333 |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| x6 | 0 | 0 | -0,67 | 0,3 | 0 | 1 | 0,66667 |
| f | 0 | 0 | 0,33 | 1,3 | 0 | 0 | 12,6667 |

недефицитность ресурсов

ценность ресурсов

# Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение запасов ресурсов

Таблица соответствует оптимальному решению

| БП | $X_1$ | $X_2$ | $\dots$ | $X_n$ | $X_{n+1}$ | $\dots$ | $X_{n+i}$ | $\dots$ | $X_{n+m}$ | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $\dots$ | $A_{1n}$ | $A_{1(n+1)}$ | $\dots$ | $A_{1(n+i)}$ | $\dots$ | $A_{1(n+m)}$ | $R_1$ |
| $Y_2$ | $A_{21}$ | $A_{22}$ | $\dots$ | $A_{2n}$ | $A_{2(n+1)}$ | $\dots$ | $A_{2(n+i)}$ | $\dots$ | $A_{2(n+m)}$ | $R_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $Y_k$ | $A_{k1}$ | $A_{k2}$ | $\dots$ | $A_{kn}$ | $A_{k(n+1)}$ | $\dots$ | $A_{k(n+i)}$ | $\dots$ | $A_{k(n+m)}$ | $R_k$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $Y_m$ | $A_{m1}$ | $A_{m2}$ | $\dots$ | $A_{mn}$ | $A_{m(n+1)}$ | $\dots$ | $A_{m(n+i)}$ | $\dots$ | $A_{m(n+m)}$ | $R_m$ |
| $f$ | $F_1$ | $F_2$ | $\dots$ | $F_n$ | $F_{n+1}$ | $\dots$ | $F_{n+i}$ | $\dots$ | $F_{n+m}$ | $Z$ |

Изменение правой части одного из ограничений: $b_i + d \quad (d > 0 \quad \text{или} \quad d < 0)$

Варианты рассуждений при изменении:

а) решение задачи заново не требуется

$$Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d$$
$$Z' = Z + F_{n+i}d$$
$$k = \overline{1,m}$$

если диапазон $d \in (D_1, D_2)$ из условия $Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d > 0 \;\; k = \overline{1,m}$

б) при $d < D_1$ или $d > D_2$ - имеем недопустимый базис (сохранен принципом оптимальности)

1. решать задачу заново

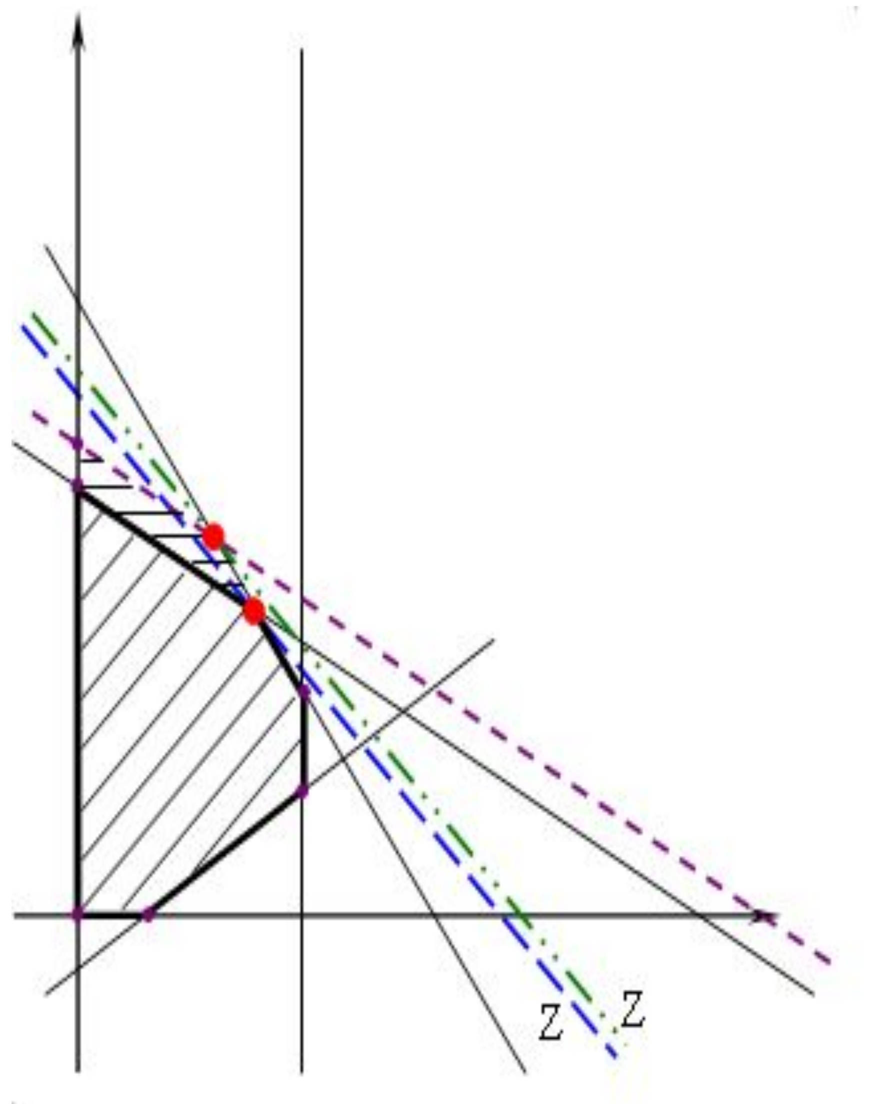
или

2. применить двойственный симплекс метод для перехода к допустимому решению

# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

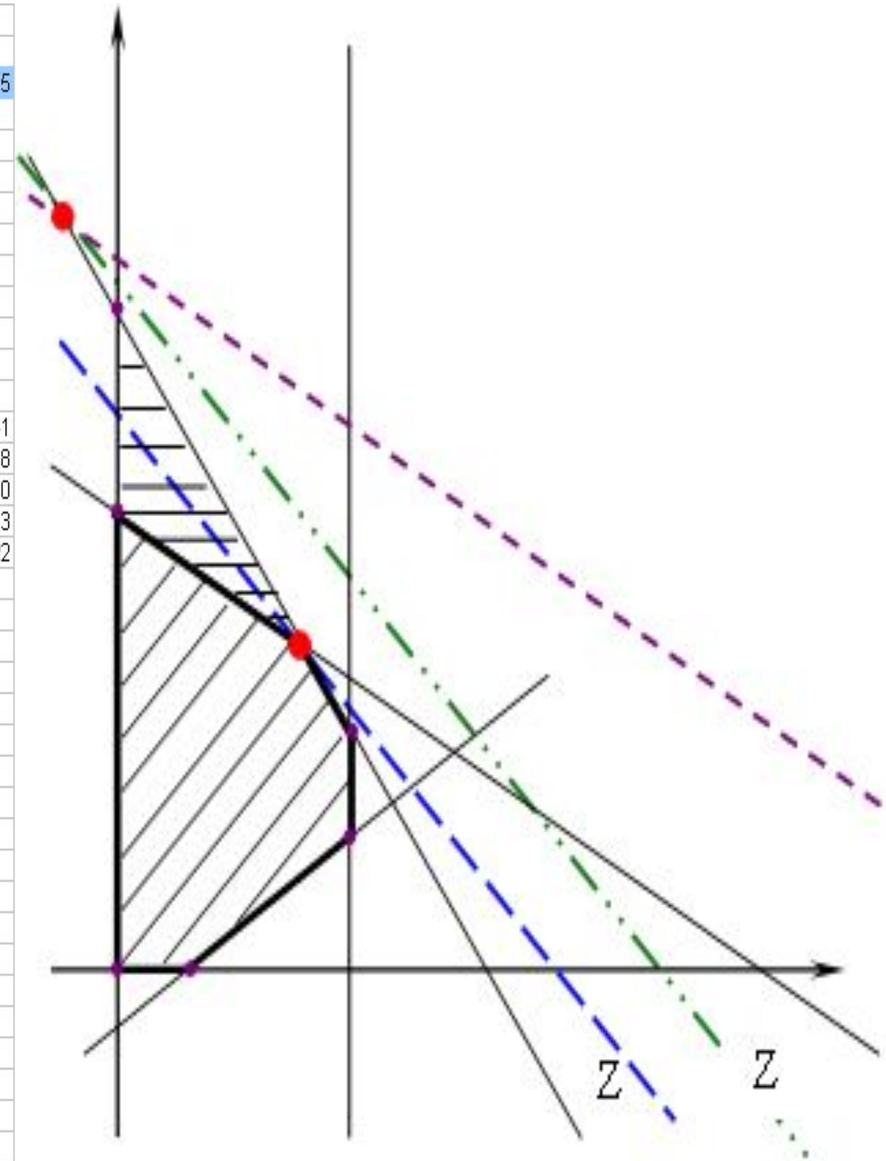
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | 10 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | | | 0,666667 |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | | | 4,666667 |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | | | 5 |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | | | 1,333333 |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 12,66667 | | | 15,33333 |

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 | 5 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 1 | 0,666667 |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 5 | 10 |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 6 | 4 |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 15 | |
| | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 0,666667 | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 4,666667 | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 5 | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 1,333333 | |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 15,33333 | |



# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | 15 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | | | -1 |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | | | 8 |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | | | 10 |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | | | 3 |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 12,66667 | | | 22 |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15 | 7,5 | | |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | -1,5 | -1 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 7,5 | 15 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 8,5 | 5,666667 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 22,5 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | -1 | | | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 8 | | | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 | | | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 3 | | | |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 22 | | | |



# Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение коэффициентов ЦФ

Оптимальное решение: 1. базисные переменные $Y_1 = R_1,\ Y_2 = R_2,\ \ldots, Y_m = R_m$

2. свободные переменные $W_1 = 0,\ W_2 = 0,\ \ldots, W_n = 0$

3. Коэффициенты ЦФ - при $Y_i$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ - 0

при $W_k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ - $F_k$

Изменение коэффициента ЦФ в исходной постановке задачи при переменной $X_j$

$$C'_j = C_j + d \quad (d > 0 \quad \text{или} \quad d < 0)$$

$X_j$ - в оптимальном решении среди базисных $(Y_i \quad i = \overline{1, m}) \leftrightarrow Y_q = R_q$

Варианты рассуждений: 1. изменения базиса и значений базисных переменных нет,

2. изменения в строке ЦФ

решать задачу заново не надо

а) при $d \in (D_1, D_2)$ - оптимальное решение (набор базисных переменных и их значения) не изменяется

$$F'_k = F_k + A_{qk} d \quad \text{при} \quad W_k \quad k = \overline{1, n}$$

$$Z' = Z + R_q d$$

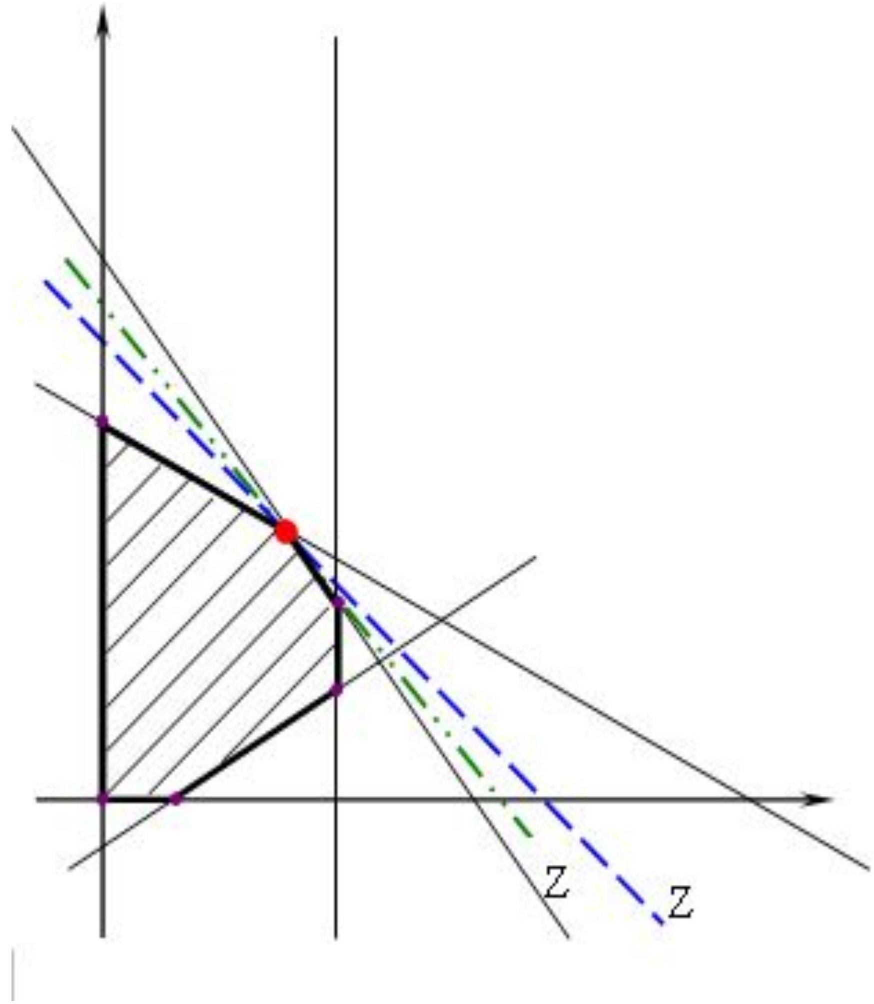
диапазон $(D_1, D_2)$ из условия $F'_k = F_k + A_{qk} d > 0$

б) при $d < D_1$ или $d > D_2$ - пересчет $F'_k$ и $Z'$ - имеем допустимый неоптимальный базис, осуществляем поиск оптимального решения далее симплекс-методом

# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

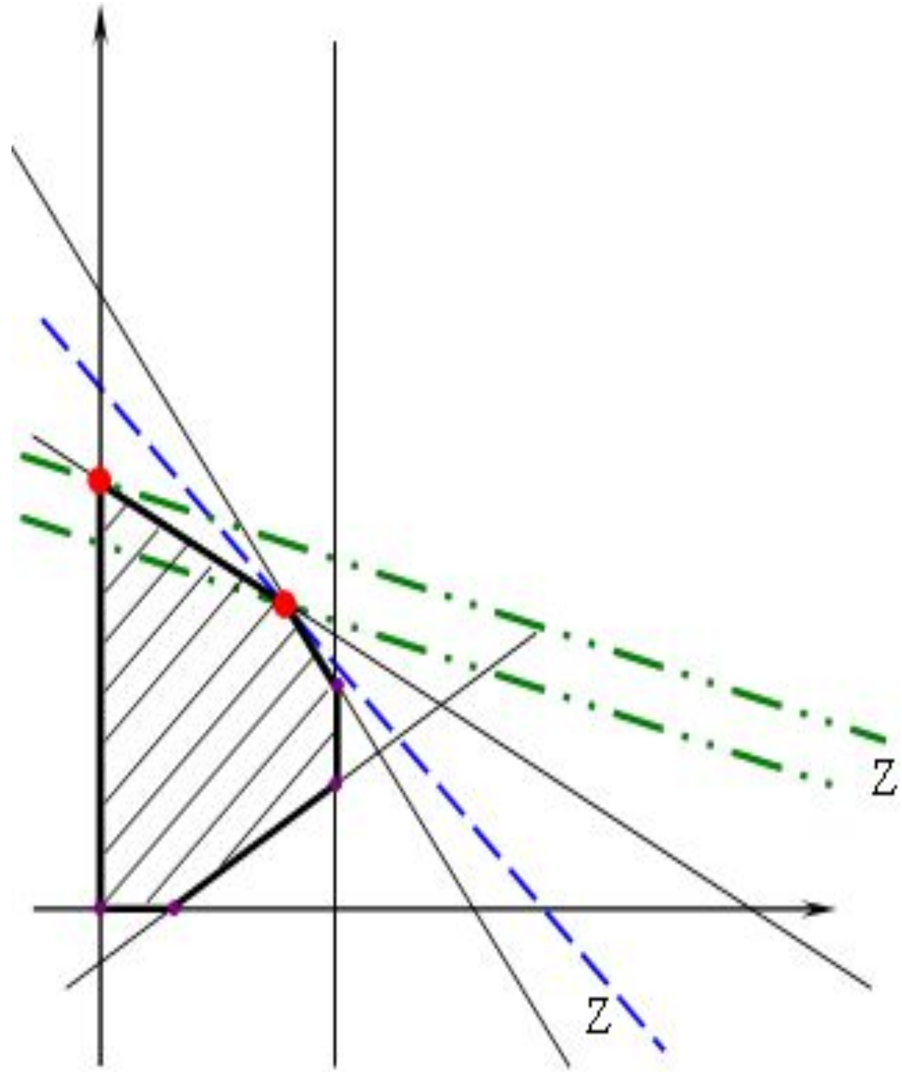
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | x2 |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | -2 |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | | | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | | | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | | | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | | | |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 12,66667 | | | |
| f' | | | 0,666667 | 0,666667 | | | 9,333333 | | | |

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! |
| f | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| f | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | |
| | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | |
| f | 0 | 0 | 0,666667 | 0,666667 | 0 | 0 | 9,333333 | |



# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | x2 |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | -8 |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | | | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | | | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | | | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | | | |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 12,66667 | | | |
| f' | | | -1,33333 | 4,666667 | | | 29,33333 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 32 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | 2 | | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | -10 | | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | -3 | | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | -1 | | |
| f | 0 | 0 | -1,33333 | 4,666667 | 0 | 0 | 29,33333 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | | | |
| f | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 32 | | | |



# Двойственный симплекс-метод

применение – поиск нового оптимального решения

1. анализ на чувствительность – добавление нового ограничения или изменение старого
2. поиск целочисленного решения

- Обычный СМ
- 1. начальное базисное решение – допустимо
- 2. промежуточные решения – допустимые
- 3. значение ЦФ – улучшается

- Двойственный СМ
- 1. начальное базисное решение – недопустимое с признаками оптимальности (решение «лучше, чем оптимальное»)
- 2. промежуточные решения – недопустимые с признаками оптимальности
- 3. значение ЦФ – ухудшается

# Алгоритм двойственного симплекс-метода

Алгоритм при максимизации ЦФ

| БП | $X_1$ | … | $X_s$ | … | $X_n$ | $X_{n+1}$ | … | $X_{n+m}$ | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | $A_{11}$ | … | $A_{1s}$ | … | $A_{1n}$ | $A_{1(n+1)}$ | … | $A_{1(n+m)}$ | $R_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $Y_r$ | $A_{r1}$ | … | $A_{rs}$ | … | $A_{rn}$ | $A_{k(n+1)}$ | … | $A_{r(n+m)}$ | $R_r$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $Y_m$ | $A_{m1}$ | … | $A_{ms}$ | … | $A_{mn}$ | $A_{m(n+1)}$ | … | $A_{m(n+m)}$ | $R_m$ |
| $f$ | $F_1$ | … | $F_s$ | … | $F_n$ | $F_{n+1}$ | … | $F_{n+m}$ | $Z$ |

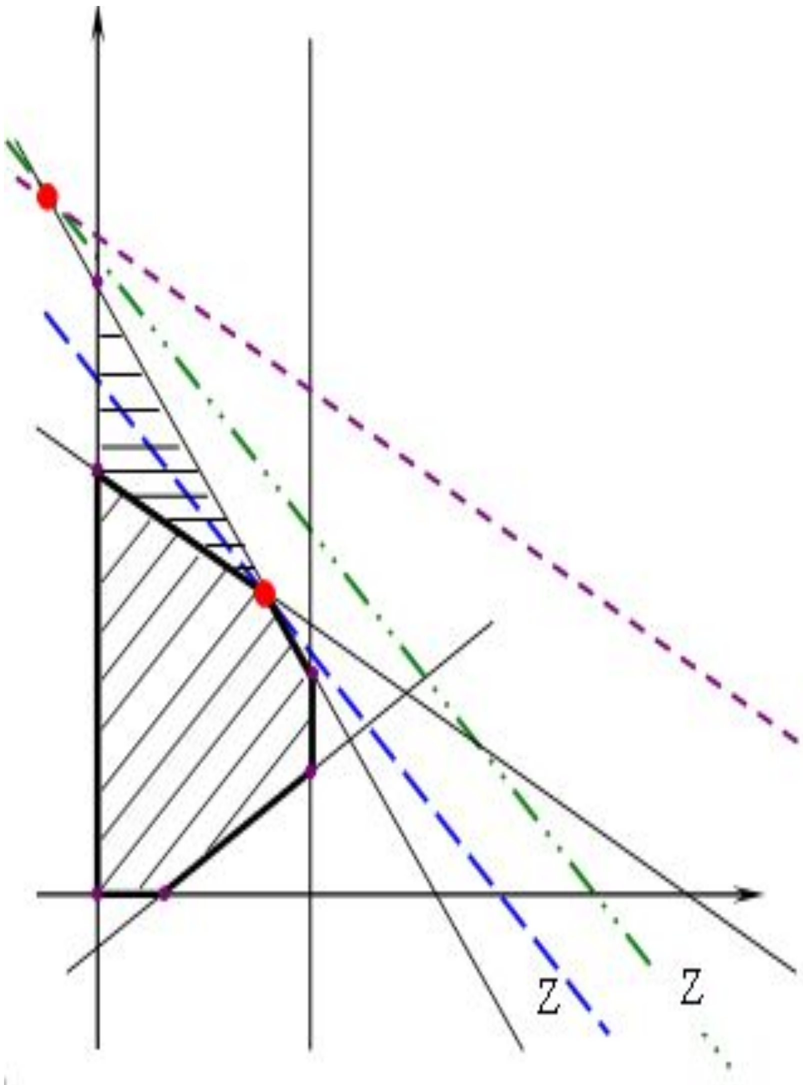
Ведущая строка

Ведущий столбец

1. <u>выбор ведущей строки</u> – исключаемая из базиса переменная $Y_r = R_r$
   $R_r < 0$ причем $|R_r| = \max_k |R_k|$ $k = \overline{1,m}$ (если все $R_k > 0$ - оптимум найден)
2. <u>выбор ведущего столбца</u> – включаемая в базис переменная $X_s$
   $A_{rs} < 0$ - выбор из условия $\min_j \left|\frac{F_j}{A_{rj}}\right| = \left|\frac{F_s}{A_{rs}}\right|$, $A_{rs}$ - ведущий элемент
3. <u>расчет нового базисного решения</u> процедурами симплекс-метода
   справедливо равенство $F'_j = F_j - F_s A_{rj} / A_{rs} > 0$

# Пример решения ЗЛП двойственным симплекс методом

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | | 15 |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 2 | 1,333333 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 5 | 3,333333 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | 1,333333 | | | -1 |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 3,333333 | | | 8 |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | | | 10 |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 0,666667 | | | 3 |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 12,66667 | | | 22 |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | решение | | | |
| x3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | | |
| x4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15 | 7,5 | | |
| x5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | #ДЕЛ/0! | | |
| f | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x3 | 1,5 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | 0 | -1,5 | -1 | | |
| x2 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 7,5 | 15 | | |
| x5 | 1,5 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 8,5 | 5,666667 | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | | |
| f | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 22,5 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x1 | 1 | 0 | 0,666667 | -0,33333 | 0 | 0 | -1 | | | |
| x2 | 0 | 1 | -0,33333 | 0,666667 | 0 | 0 | 8 | | | |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 | | | |
| x6 | 0 | 0 | -0,66667 | 0,333333 | 0 | 1 | 3 | | | |
| f | 0 | 0 | 0,333333 | 1,333333 | 0 | 0 | 22 | | | |
| | | | 0,5 | -4 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| x4 | -3 | 0 | -2 | 1 | 0 | 0 | 3 | | | |
| x2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | | | |
| x5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 7 | | | |
| x6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | | | |
| f | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 18 | | | |



# Понятие двойственной ЗЛП

Прямая задача линейного программирования в канонической форме

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \max/\min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,n}$$

$n$ переменных – исходные и дополнительные

- 1. решение ДЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ПЗЛП
- 2. решение ПЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ДЗЛП, сформулированной из этой ПЗЛП

# Правила преобразования ПЗЛП в ДЗЛП на основе канонической формы

- 1. Каждому из m ограничений ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП
- 2. Каждому из n переменных ПЗЛП соответствует ограничение ДЗЛП
- 3. Коэффициенты при переменной в ограничениях ПЗЛП переходят в коэффициенты ограничения ДЗЛП, соответствующего этой переменной, правая часть формируемого ограничения ДЗЛП равна коэффициенту ЦФ при этой переменной в ПЗЛП
- 4. Коэффициенты ЦФ ДЗЛП равны правым частям ограничений ПЗЛП

| ЦФ ПЗЛП | ДЗЛП | | |
|---|---|---|---|
| | ЦФ | Тип функциональных ограничений | Прямые ограничения на переменные |
| Максимизация | Минимизация | «$\geq$» | Ограничений нет |
| Минимизация | Максимизация | «$\leq$» | Ограничений нет |

# Пример преобразования ПЗЛП в ДЗЛП

<u>ПЗЛП</u>

$$Z = 15x_1 + 12x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

<u>ПЗЛП в канонической форме</u>

$$Z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

<u>ДЗЛП</u>

$$Z = 3y_1 + 5y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 \leq 12 \\ -y1 + 0y_2 \leq 0 \\ 0y_1 + y_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

# Взаимосвязь ПЗЛП и ДЗЛП

1. для любой симплекс итерации прямой или двойственной задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \text{коэффициенты при } j-\text{ой} \\ \text{переменной в строке ЦФ} \\ \text{одной задачи} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{разности между левой и} \\ \text{правой частями } j-\text{го} \\ \text{неравенства другой задачи} \end{array}\right\}$$

2. для любой пары допустимых решений прямой и двойственной задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \text{значение ЦФ} \\ \text{в задаче максимизации} \end{array}\right\} \le \left\{\begin{array}{l} \text{значения ЦФ} \\ \text{в задаче минимизации} \end{array}\right\}$$

в точке оптимума – строгое равенство: «равновесие»

# Разновидности симплекс-метода

- 1. Модифицированный симплекс-метод
- 2. Метод решения задач с ограниченными переменными
- 3. Метод декомпозиции
- 4. Параметрическое линейное программирование
- 5. Метод Кармаркара