МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему:

Анализ управляемой марковской системы массового обслуживания с неоднородными требованиями

Научный руководитель: Иванов С.В., доцент каф. 804
Студент: Зайцева Е.П., группа 8О-204М-15

Москва 2017г.

Объект. Предмет. Цель.

Объект исследования: одноканальная приоритетная Марковская система массового обслуживания.

Предмет исследования: поиск оптимальной стратегии управления приоритетами в одноканальной система массового обслуживания.

Цель исследования: построить оптимальную стратегию выбора динамического приоритета.

Задачи исследования:

- изучить математический аппарат, позволяющий провести анализ и обоснование оптимальной стратегии управления в СМО;
- проанализировать факторы и построить математическую модель функционирования системы массового обслуживания с несколькими потоками неоднородных требований;
- исследовать управляемую марковскую систему массового обслуживания с приоритетами;
- построить алгоритм определения оптимальной стратегии управления
- реализовать вычислительный эксперимент;
- проанализировать полученный результат.

Математический аппарат анализа управляемых Марковских и полумарковских процессов с конечным множеством состояний E

$$\xi(t) = \{X(t), u(t)\}, \quad X(t) \in E, \quad u(t) \in U$$

Траектории этих компонент, есть ступенчатые функции и точки разрывов совпадают.

Моменты изменения состояний (скачки) являются Марковскими моментами.

Время непрерывного пребывания в фиксированном состоянии для Марковского процесса имеет экспоненциальное распределение.

Время непрерывного пребывания для полумарковского процесса имеет произвольное распределение.

Случайный процесс задается характеристиками:

1. Полумарковское ядро $Q_{i,j}(t,u)$- вероятность того, что первая компонента перейдет в состояние j, за время меньшее чем t при условии, что в данный момент состояние i и принято решение u.
2. Набор вероятностных мер $G = \{G_i, i \in E\}$, определенных на сигма алгебрах подмножеств множеств U_i (стратегия управления).

Функционал, определенный на траекториях процесса X(t), задается условными математическими ожиданиями накопленного эффекта $R_{i,j}(t,u)$ на периоде между соседними моментами изменения состояний полумарковского процесса при условии, что процесс пребывает в состоянии i, переходит в состояние j, длительность периода равна t и на этом периоде было принято решение u.

S(t) – математическое ожидание накопленного эффекта за время t.

$$S^*(G) = \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\sum_{i\in E} s_i \pi_i}{\sum_{i\in E} m_i \pi_i}$$

- средний удельный доход при длительном функционировании системы,

где

$$s_i(G_i) = \sum_{j\in E} \int_0^\infty \int_{U_i} R_{ij}(t,u)\,dQ_{ij}(t,u)\,G_i(du)$$

математическое ожидание накопленного эффекта за полное время пребывания в состоянии i.

$$m_i(G_i) = \int_0^{\infty} \left(1 - \sum_{j\in E} Q_{ij}(x,u) G_i(du) \right) dx$$

математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса в состоянии

π_i - стационарные вероятности состояний вложенной цепи Маркова.

$$\pi_i = \sum_{j=E} \pi_j p_{ji}, \ \sum_{j=E} \pi_j = 1$$

$$p_{ij}(G_i) = \lim_{t\to\infty} \int_{U_i} Q_{ij}(t,u) G_i(du)$$

Тогда задача состоит в поиске максимума и распределении на котором достигается максимум

$$\max_{G\in\Omega} S(G) = S(G^{(0)}) = \max_{u_i\in U_i} S(G_i(\{u_i\})), i \in E),$$

причем экстремум можно искать по множеству вырожденных распределений

$$G_i(\{u_i\}) = 1$$

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает К=2 типа требований.

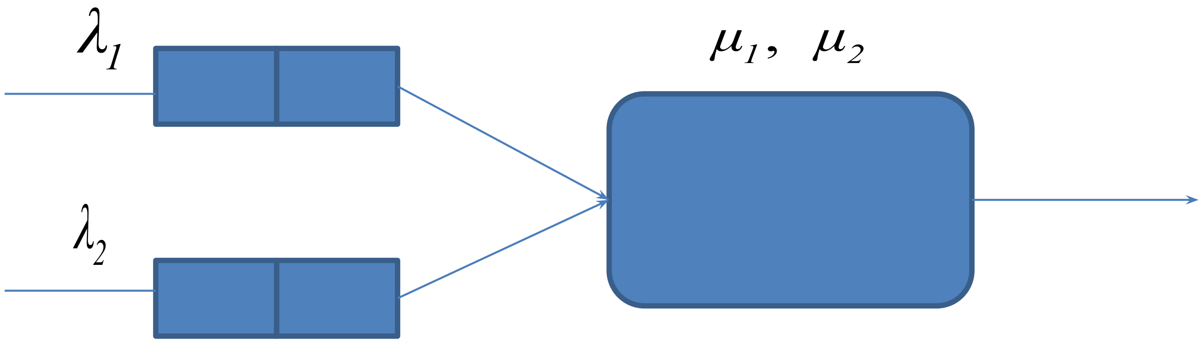


Рис. Одноканальная СМО

- Входящие потоки требований есть стационарные пуассоновские потоки, с параметрами λ_1 и λ_2 .
- Каждый тип требования (K) формирует свою очередь.
- Максимальная длина для каждой очереди N_1; N_2 .
- Длительность обслуживания требований пуассоновских потоков имеет экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2.

Алгоритм построения оптимальной вырожденной стратегии управления полумарковским процессом.

Математическое описание системы

Марковские моменты прихода и ухода требований из системы.

Первая компонента случайного Марковского процесса определяется равенством:

$$\xi(t) = \left(\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \xi_3(t)\right)$$

$\xi_1(t)$ - количество занятых мест в первой очереди;

$\xi_2(t)$ - количество занятых мест во второй очереди;

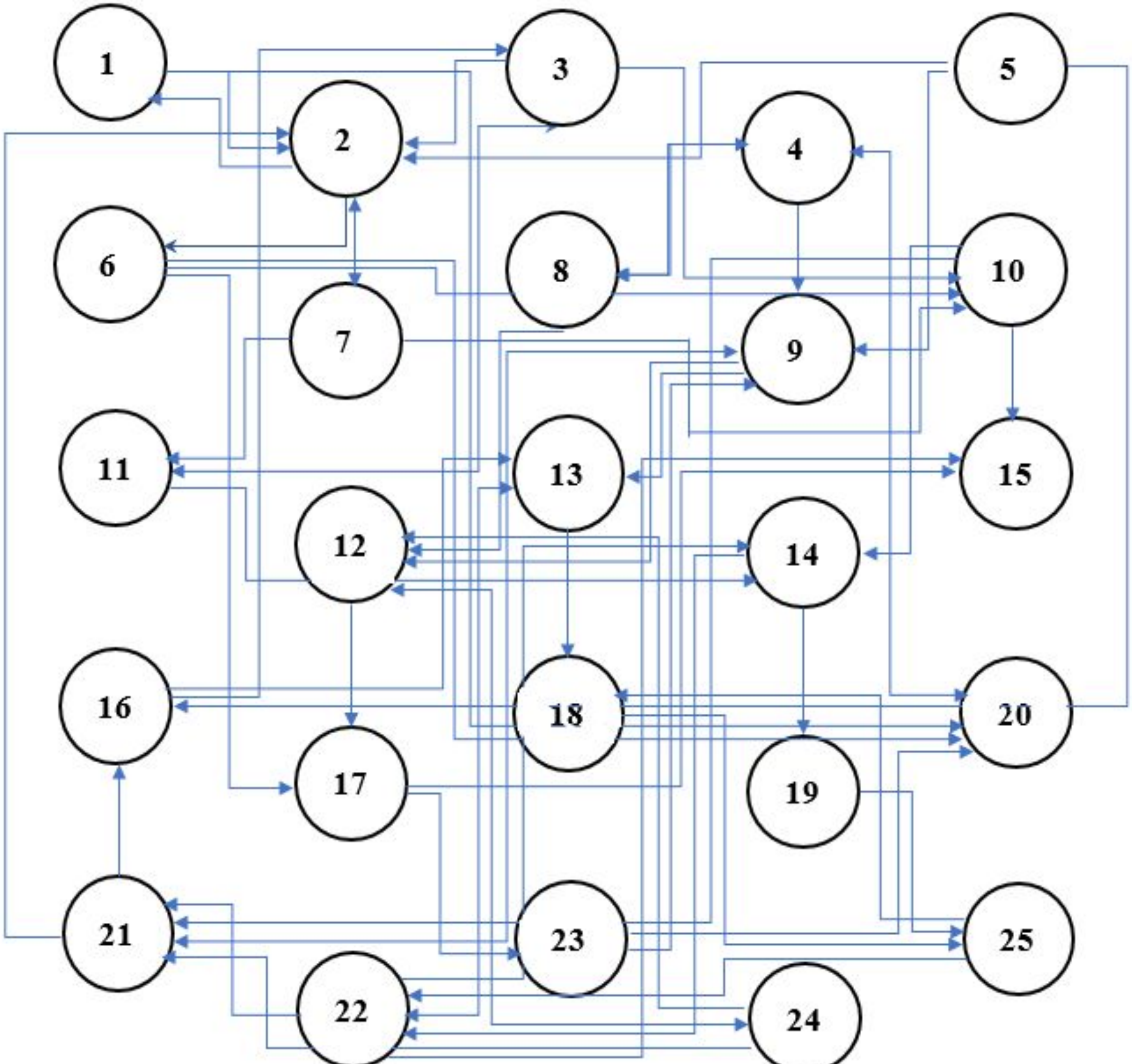
$$\xi_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{если обслуживается требование из первой очереди} \\ 2, & \text{если обслуживается требование из второй очереди} \\ 0, & \text{если канал свободен} \end{cases}$$

Таблица 2.1 Состояния системы в момент принятия решений

№	Начальное состояние	Множество решений	Конечные состояния	№	Начальное состояние	Множество решений	Конечные состояния
1	0;0;0	0	2, 20	14	1;2;2	0	22,19,14
2	0;1;0 (0;0;2)	2	1, 6, 7	15	2;1;2	0	24,15,19
3	0;2;0 (0;1;2)	2	2,10,11	16	0;2;1	0	3,13,16
4	1;0;1	0	20,8,9	17	2;0;2	0	23,17,15
5	0;1;1	0	2,9,16	18	2;2;1	0	25,18,18
6	1;0;2	0	20,17,10	19	2;2;2	0	25,19,19
7	0;1;2	0	2,10,11	20	1;0;0 (0;0;1)	1	1, 4, 5
8	2;0;1	0	4,8,12	21	1;1;0 (0,1,1) (1,0,1)	 1 2	 I) 2,9,16 II) 20;17;10
9	1;1;1	0	21,12,13	22	1;2;0 (0,2,1) (1,1,2)	 1 2	 I) 3;13;16 II) 21,15,14
10	1;1;2	0	21,15,14	23	2;0;0 (1;0;1)	1	20,8,9
11	0;2;2	0	3,14,11	24	2;1;0 (1,1,1) (0,0,2)	 1 2	 I)21,12,13 II) 23,17,15
12	2;1;1	0	24,12,17	25	2;2;0 (1,2,1) (2,1,2)	 1 2	 I) 22,18,13 II) 24,15,19
13	1;2;1	0	22,18,13				

	№ стратегии							
№ состояния	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	…	16-я
1.	0	0	0	0	0	0		0
2.	2	2	2	2	2	2		2
3.	2	2	2	2	2	2		2
4.	0	0	0	0	0	0		0
5.	0	0	0	0	0	0		0
6.	0	0	0	0	0	0		0
7.	0	0	0	0	0	0		0
8.	0	0	0	0	0	0		0
9.	0	0	0	0	0	0		0
10.	0	0	0	0	0	0		0
11.	0	0	0	0	0	0		0
12.	0	0	0	0	0	0		0
13.	0	0	0	0	0	0		0
14.	0	0	0	0	0	0		0
15.	0	0	0	0	0	0		0
16.	0	0	0	0	0	0		0
17.	0	0	0	0	0	0		0
18.	0	0	0	0	0	0		0
19.	0	0	0	0	0	0		0
20.	1	1	1	1	1	1		1
21.	1	2	1	2	1	2		2
22.	2	1	1	2	2	2		2
23.	1	1	1	1	2	2		2
24.	1	1	1	1	1	1		2
25.	1	1	1	1	1	1		2

Граф перехода из состояния в состояние для 1й стратегии



Стоимостные характеристики:

$C^{i}_{опер}$ - плата (потери) за один час работы одного задействованного канала, обслуживающего i -е требование;

$C^{i}_{оч}$ - плата (потери) за один час пребывания в очереди одного i -го требования;

$C^{i}_{пот}$ - плата (потери) за потерю одного i -го требования;

C^{i}_{o} - плата (прибыль) за одно i -е обслуженное требование ($i = 1, 2$).

Величина C^{i}_{o} положительная, остальные величины отрицательные. Размерность величин C^{i}_{o}, $C^{i}_{пот}$ стоимость (например, рубли за штуку), размерность величин $C^{i}_{опер}$, $C^{i}_{оч}$ стоимость в час.

- Параметры входящих потоков $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$
- Параметры распределения длительности обслуживания $\mu_1 = 19, \mu_2 = 14$
- Возможное число обслуживающих приборов $n = 1$
- Число мест для ожидания $N = 1$
- Стоимостные характеристики:

$$C_o^{(1)} = 39;\ C_o^{(2)} = 69;\ C_{onep}^{(1)} = 45;\ C_{onep}^{(2)} = 56$$

$$C_{oч}^{(1)} = 26;\ C_{oч}^{(2)} = 33;\ C_{nom}^{(1)} = 67;\ C_{nom}^{(2)} = 52$$

Результаты

Первая часть вычислительной реализации заключается в следующем: изменяя описанные выше стратегии (16 вырожденных стратегий) для заданных исходных числовых параметров, определить математическое ожидание удельного дохода.

Результаты вычислений приведены на Рис. 1

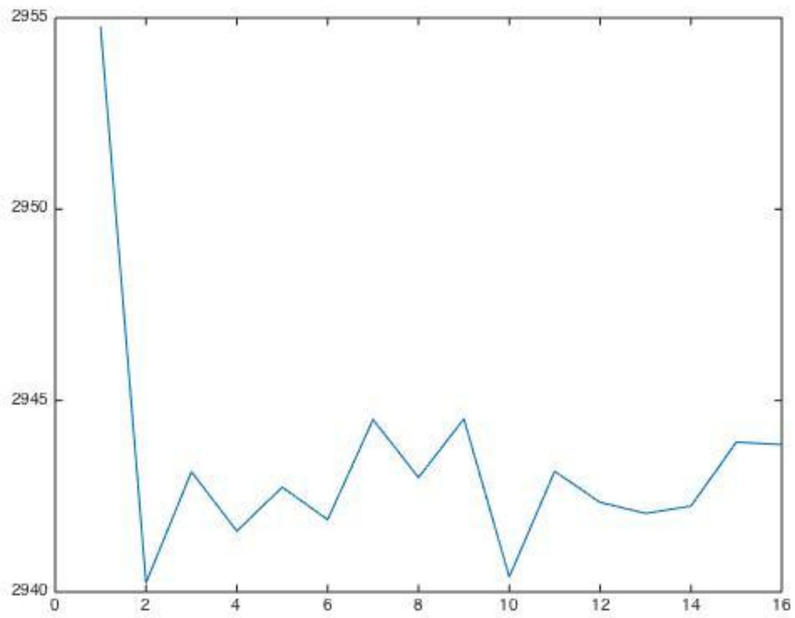


Рис. 1 График зависимости прибыли от стратегии

- Ось x – номер стратегии.
- Ось y – S* доход (прибыль) соответствующий выбранной стратегии.

В данном случае наибольшую прибыль мы получим при принятии (первой стратегии (рис. 1)) решений:

- в состоянии 21 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;
- в состоянии 22 принимается решение первым взять на обслуживание требование 2-го типа;
- в состоянии 24 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;
- в состоянии 25 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;

а в остальных стратегиях с вероятностью единица принимается единственное решение.

Вторая часть вычислительного эксперимента заключается в варьировании числовых исходных данных и определении оптимального дохода (при выборе оптимальной стратегии).

При фиксировании исходных показателей, кроме дохода за обслуженное требование первого типа, и увеличивая его от 9 до 500.

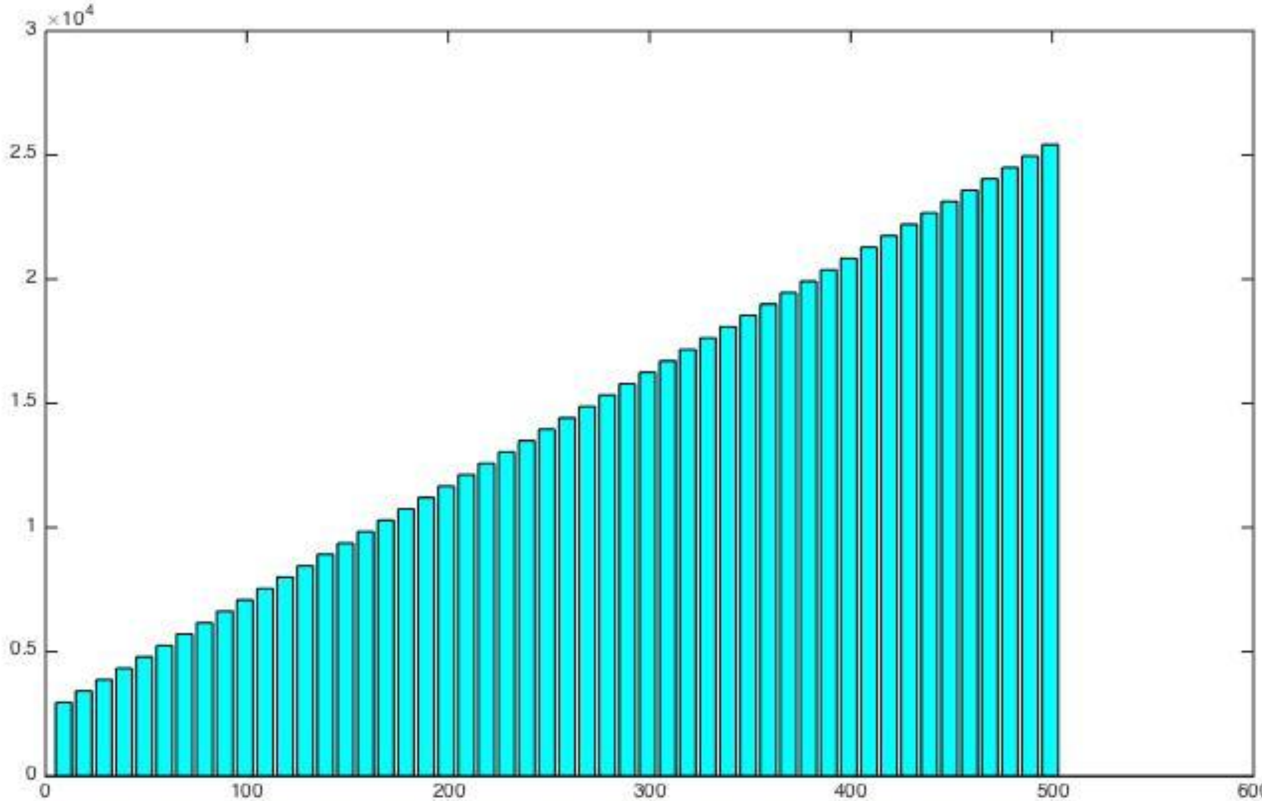


Рис. 2 График зависимости прибыли от дохода за обслуживание I-го типа требования.

Ось x – дохода за обслуживание I-го типа требований.
Ось y – оптимальный S доход (прибыль), соответствующий выбранным значениям параметров.

Для выбранного диапазона исходных числовых характеристик в результате вычислительного эксперимента получили, что оптимальная стратегия одна и та же, а при изменении одного из числовых параметров, оптимальных доход – есть линейная функция этого параметра, что соответствует теоретическим рассуждениям.

Заключение

- исследована управляемая марковская система массового обслуживания;
- проанализированы внешние и внутренние факторы, влияющие на систему, выделены характерные черты, определены параметры и переменные, построена математическая модель;
- проведено аналитическое исследование модели;
- решена задача построения оптимальной стратегии динамического управления приоритетами.
- проведен анализ одноканальной марковской СМО с двумя типами требований.
- проведен вычислительный эксперимент для конкретной задачи.