

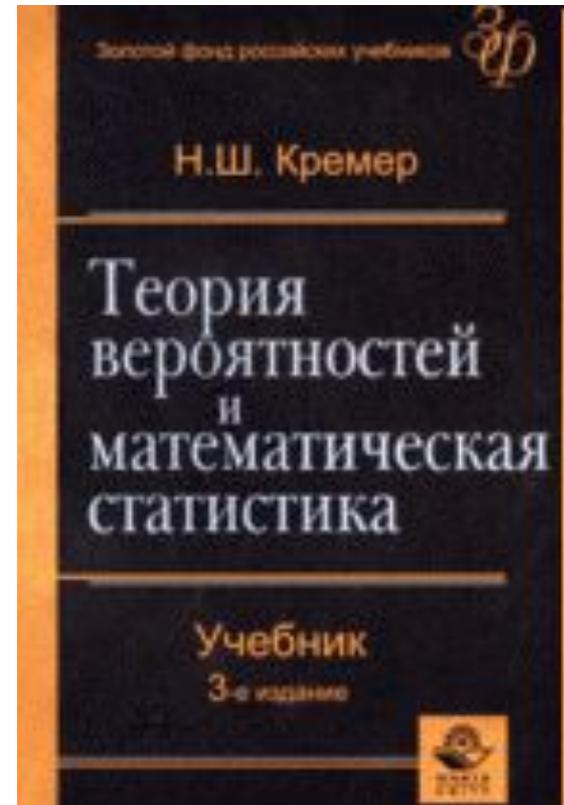
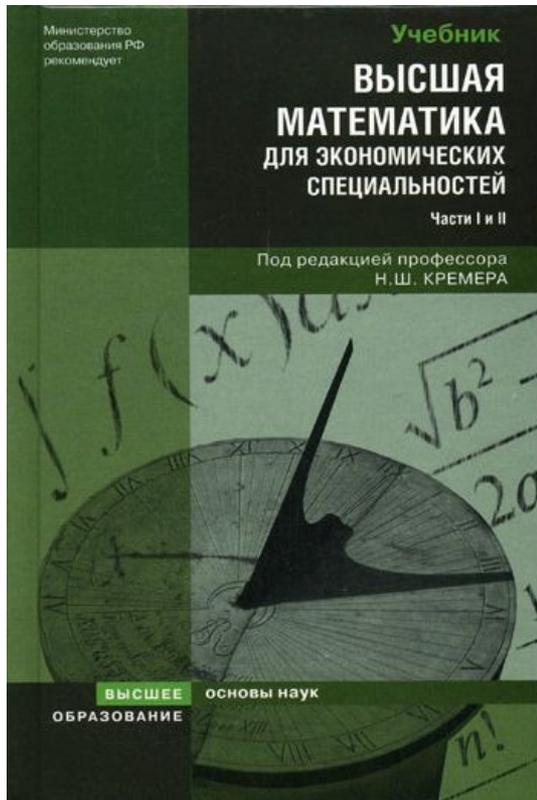
Математика
Лекция 1
Основы математической логики
и теории множеств

Данчул Александр Николаевич
д.т.н., профессор

2016

Основная литература

1. Высшая математика для экономических специальностей. Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008 и позже.
2. Теория вероятностей и математическая статистика. Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ, 2007 и позже.



Высказывания и операции над ними

Опр 1. *Высказыванием* называется повествовательное предложение, о котором можно говорить, что оно либо *Истинно*, либо *Ложно*.

Основные *операции* над высказываниями соответствуют связкам между предложениями, употребляемым в обычной речи.

	Операция	Связка
1	отрицание \bar{a}	не a
2	дизъюнкция $a \vee b$	a <u>или</u> b
3	конъюнкция $a \wedge b$	a <u>и</u> b
4	импликация $a \Rightarrow b$	если a ,...то b
5	эквивалентность $a \Leftrightarrow b$	a тогда и только тогда, когда b

Операции задаются с помощью *таблиц истинности*. В строках такой таблицы помещаются **все комбинации** значений простых высказываний и соответствующее им значения сложного высказывания - результата операции.

Операции над высказываниями

1. Отрицание

a	\bar{a}
И	Л
Л	И

Пример.

a «2,5 – целое число»;

\bar{a} «неверно, что 2,5 –
целое число»

или

«2,5 – не целое число»

2. Дизъюнкция

a	b	$a \vee b$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример.

a «4 < 8»;

b «4 = 8»;

$a \vee b$ «4 ≤ 8».

3. Конъюнкция»

a	b	$a \wedge b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример.

a «4 < 8»;

b «3 < 4»;

$a \wedge b$ «3 < 4 < 8».

Операции над высказываниями

4. Импликация

a	b	$a \Rightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

характеризует верность рассуждения, которым из условия импликации a получено следствие b .

- 1) При верных рассуждениях из истинных высказываний следуют истинные.
- 2) Рассуждение, которым из истинного условия получено ложное следствие, не может быть верным.
- 3) Из ложного условия верным рассуждением можно получить как истинное, так и ложное следствие.

5. Эквивалентность

a	b	$a \Leftrightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

характеризует равенство логических значений высказываний a и b .

Пример. a « $4 < 8$ »; b « $4 = 8$ »;

$a \Leftrightarrow b$ " $4 < 8 \Leftrightarrow 4 = 8$ " - ложно

Логические законы

Опр. 2. Сложное высказывание называется *логическим законом*, если оно истинно при всех комбинациях логических значений входящих в него простых высказываний.

Пример.

Закон исключенного третьего

$$a \vee \bar{a}$$

a	\bar{a}	$a \vee \bar{a}$
И	Л	И
Л	И	И

Опр. 3. Два сложных высказывания называются *логически эквивалентными (равносильными)*, если их эквивалентность является логическим законом.

$\overline{a \wedge \bar{a}}$ - закон противоречия ($a \wedge \bar{a}$ - ложь)

$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b}$; $\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b}$ - законы Моргана

$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ - закон последовательного вывода

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\bar{b} \Rightarrow \bar{a})$ - закон контрапозиции

$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ - закон необходимого и достаточного условия

Одноместные предикаты

В любом высказывании можно выделить некоторый объект и свойство этого объекта.

Опр. 4. *Одноместным предикатом* $P(x)$ называется предложение, содержащее переменную x и превращающееся в высказывание при подстановке вместо нее конкретного значения из заданного множества M , которое называется *полем* этого *предиката*.

Полученное высказывание может быть истинным или ложным в зависимости от того, какое именно значение переменной x мы подставили в предикат.

Опр. 5. Таблицы, в которых указываются значения высказываний, получаемых из предикатов путём подстановки в них конкретных значений переменных называются *матрицами предиката*.

Пример. Предикат $P(x)$ – “ $x < 9$ ” определен на поле $M = \{5, 6, 11\}$. Матрица этого предиката имеет вид

x	5	6	11
$P(x)$ “ $x < 9$ ”	И	И	Л

Двухместные предикаты

В некоторых высказываниях можно выделить два объекта и отношение между ними.

Опр. 6. *Двухместным предикатом* $P(x, y)$ называется предложение, содержащее переменные x и y , превращающееся в высказывание при подстановке вместо них конкретных значений из заданных множеств M_x и M_y , которые называются *полями* этого предиката по соответствующим переменным.

Пример. Предикат $P(x, y) - "x < y"$ определен на полях $M_x = \{4, 6\}; M_y = \{5, 7\}$.

Матрица этого двухместного предиката

$x \backslash y$	5	7
4	И	И
6	Л	И

Пример. Двухместный предикат $P(x, y) - "x < y"$,
одноместный предикат $Q(y) = P(6, y) - "6 < y"$,
высказывание $p = P(6, 7) - "6 < 7"$

Кванторы общности и существования

Используются для логической характеристики *всего поля* предиката.

При навешивании *квантора общности* на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание “для любого x из поля M верно $P(x)$ ”.

Это высказывание обозначается

$$\forall_M x P(x) \quad \text{или} \quad \forall x P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке *любого* значения x из поля M в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – « $x < 6$ »; $M = \mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

$$\forall_{\mathbf{R}} x x < 6 \quad \text{– ложное высказывание}$$

Квантор общности – аналог операции конъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow \forall_M x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

Кванторы общности и существования

При навешивании *квантора существования* на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание “существует x из поля M для которого верно $P(x)$ ”. Это высказывание обозначается:

$$\exists_M x P(x) \quad \text{или} \quad \exists x P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке *хотя бы одного* значения x из поля M в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – « $x < 1$ »; $M = \mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

$$\exists_{\mathbf{N}} x x < 1 \quad \text{– ложное высказывание}$$

Квантор существования – аналог операции дизъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow \exists_M x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

Связь между кванторами общности и существования

Поскольку кванторы общности и существования являются обобщением операций конъюнкции и дизъюнкции, между ними существует связь, аналогичная законам Моргана.

$$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b}$$

$$\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b}$$



$$\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)}$$

Пример. $\overline{\forall x x < 6} \Leftrightarrow \exists x x \geq 6$; $\overline{\exists x x < 6} \Leftrightarrow \forall x x \geq 6$

К предикатам можно применять те же логические операции, что и к высказываниям. Поля предикатов при этом должны совпадать. В результате этих операций получаются новые, *сложные* предикаты.

В двухместных предикатах можно навешивать кванторы на обе переменные (результат – высказывание) или одну из них. (результат – одноместный предикат относительно другой переменной).

$$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$$

Основные понятия теории множеств

Исходными являются понятия *множество* и *элемент множества*.

Рассматриваются только те объекты и множества, о любом из которых можно сказать, что этот объект либо является элементом этого множества (принадлежит ему), $a \in M$, либо не принадлежит ему

$$a \notin M \Leftrightarrow \overline{a \in M}$$

Множество можно задать

- 1) Указанием всех его элементов, например, $M = \{1, 2, 4\}$.
- 2) Указанием свойства $P(x)$, которое имеют все элементы этого множества, а другие элементы его не имеют.

$$M = \{x : P(x)\} \quad \text{или} \quad M = \{x | P(x)\}, \quad \text{например} \quad M = \{x : x > 0\}.$$

Пустым множеством называют множество \emptyset , не содержащее элементов.

$$\forall a \ a \notin \emptyset \quad \text{или} \quad \overline{\exists a \ a \in \emptyset}.$$

Универсальным множеством будем называть множество I , состоящее из всех элементов, рассматриваемых в данной задаче, и не противоречащее пониманию множества, описанному выше.

$$\forall a \ a \in I \quad \text{или} \quad \overline{\exists a \ a \notin I}.$$

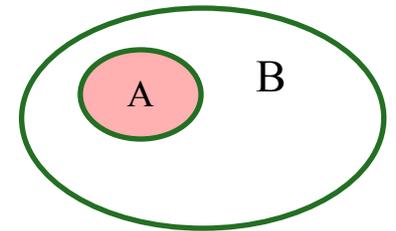
Равенство и включение множеств

Опр. 7. Два множества A и B называются *равными*, тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

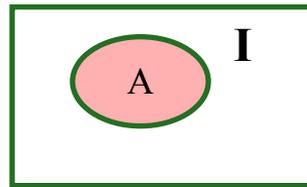
$$A = B \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x \ x \in A \Leftrightarrow x \in B. \quad \{4, 2, 1\} = \{1, 2, 4\}.$$

Опр. 8. Множество A *включено* в множество B (является его *подмножеством*), тогда и только тогда, когда любой элемент множества A является элементом множества B .

$$A \subseteq B \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x \ x \in A \Rightarrow x \in B. \quad \{2, 1\} \subseteq \{1, 2, 4\}.$$



$$\forall A \ \emptyset \subseteq A; \quad \forall A \ A \subseteq I.$$



Теор. Два множества равны тогда и только тогда, когда они включены друг в друга

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Операции над множествами

Существуют три основных операции над множествами, которые определяются через логические операции:

	Операция над множествами	Логическая операция
1	Дополнение	отрицание
2	Объединение	дизъюнкция
3	Пересечение	конъюнкция

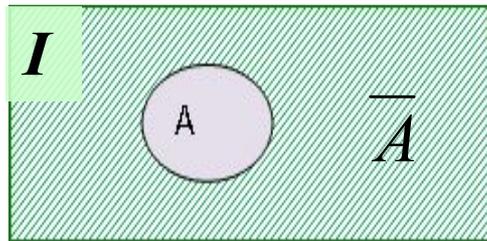
1. Операция “дополнение” обозначается \bar{A} , читается “не A ”.
В дополнение множества A входят те и только те элементы, которые не принадлежат множеству A .

$$\forall x x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Df

Пример 1. $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$
 $\bar{A} = \{2, 4\}$

Пример 2. $\bar{I} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = I$.



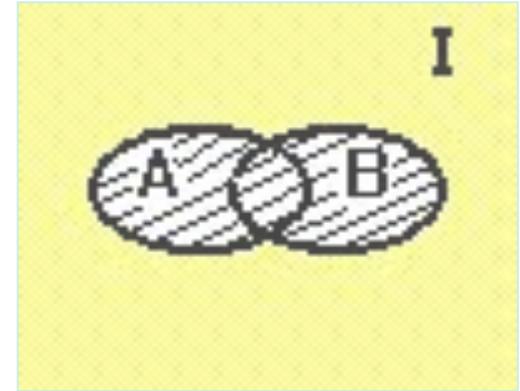
Операции над множествами

2. Объединение $A \cup B$, определяется выражением

$$\forall x \ x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Df

В объединение множеств входят
элементы каждого множества

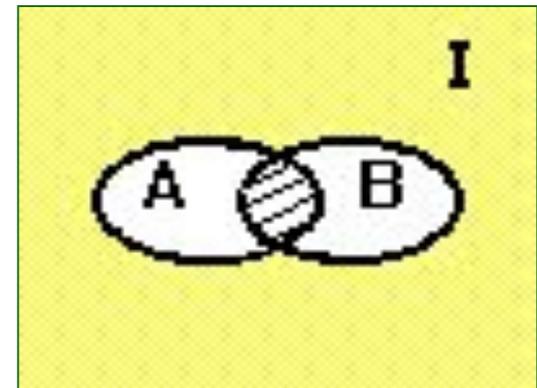


3. Пересечение $A \cap B$, определяется выражением

$$\forall x \ x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Df

В пересечение множеств входят
общие элементы всех множеств



Пример. $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{7, 3\}$.

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}; \quad A \cap B = \{3\}.$$

Тождества теории множеств

Опр. 4. *Тождествами* называются высказывания про множества, которые истинны при любых видах входящих в них множеств.

В определении операций над множествами используются логические операции. Поэтому тождествам теории множеств соответствуют некоторые логические законы, использующиеся при их доказательстве *методом принадлежности*.

Пример. Тождество $A \cap \bar{A} = I$

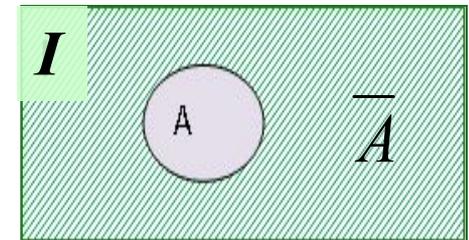
Запишем высказывание о принадлежности произвольного элемента согласно определению равенства множеств. Полученное высказывание должно быть логическим законом.

$$\forall x x \in A \cap \bar{A} \Leftrightarrow x \in I; \quad \forall x x \in A \vee x \in \bar{A} \Leftrightarrow И$$

$$\forall x x \in A \vee x \in \overline{A} \Leftrightarrow И; \quad \forall x a_x \vee \overline{a_x} \Leftrightarrow И$$

Получили логический закон
исключенного третьего

$$a \vee \bar{a}$$



Кортежи

Опр. 5. Под *кортежем* будем понимать упорядоченную совокупность объектов, которые называются *компонентами кортежа*. Число компонент кортежа называется его *длиной*.

Компоненты кортежа записываются в угловых скобках.

Каждая компонента кортежа имеет свой номер (своё место) в кортеже.

Компоненты кортежей, как и элементы множеств, могут быть любого вида, в том числе и кортежи и множества, однако, *компоненты кортежа могут совпадать*.

$\langle 1, 7, 1 \rangle$ - кортеж *длины 3*. $\langle \{1, 7\}, 1 \rangle$ - кортеж *длины 2*.

Кортежи из двух компонент принято называть *парами*, кортежи из трёх компонент - *тройками*.

Опр. 6. Два кортежа равны, если они имеют одинаковую длину и все компоненты этих кортежей с одинаковыми номерами равны между собой.

Прямое (декартово) произведение множеств

Опр. 7. *Прямым* или *декартовым* произведением $A \times B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар, первая компонента которых является элементом множества A , а вторая – элементом множества B .

$$\forall a \forall b \langle a, b \rangle \in A \times B \stackrel{Df}{\Leftrightarrow} a \in A \wedge b \in B$$

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle : a \in A \wedge b \in B \}$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3\}$, тогда:

$$A \times B = \{ \langle 1; 1 \rangle, \langle 1; 2 \rangle, \langle 1; 3 \rangle, \langle 2; 1 \rangle, \langle 2; 2 \rangle, \langle 2; 3 \rangle \}$$

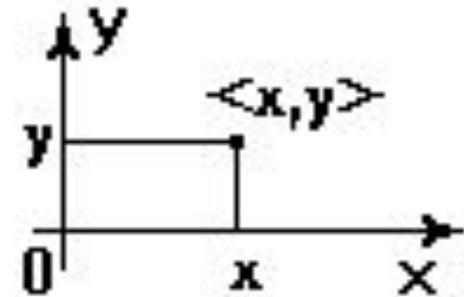
$$B \times A = \{ \langle 1; 1 \rangle, \langle 1; 2 \rangle, \langle 2; 1 \rangle, \langle 2; 2 \rangle, \langle 3; 1 \rangle, \langle 3; 2 \rangle \}$$

Очевидно, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$, то есть прямое произведение множеств не коммутативно.

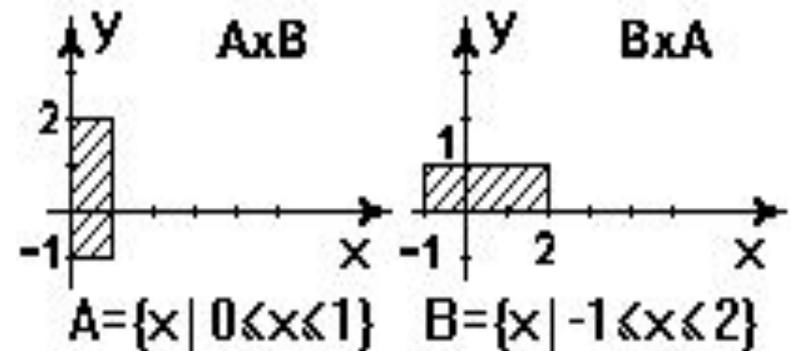
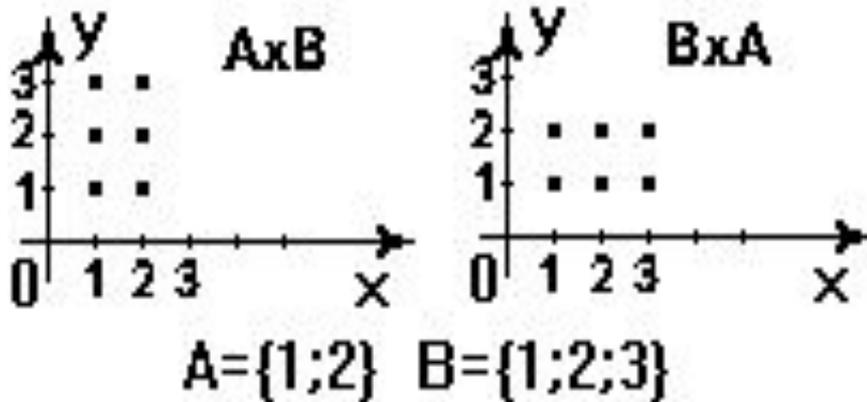
.

Прямое (декартово) произведение множеств

Пару $\langle x, y \rangle$ можно трактовать как точку на координатной плоскости XOY с координатами x и y .



Тогда прямое произведение будет соответствовать “прямоугольному” множеству точек на этой плоскости, причём в произведении $A \times B$ первый сомножитель – множество абсцисс этих точек, а второй – множество ординат.



Такое представление называется *координатной диаграммой*.