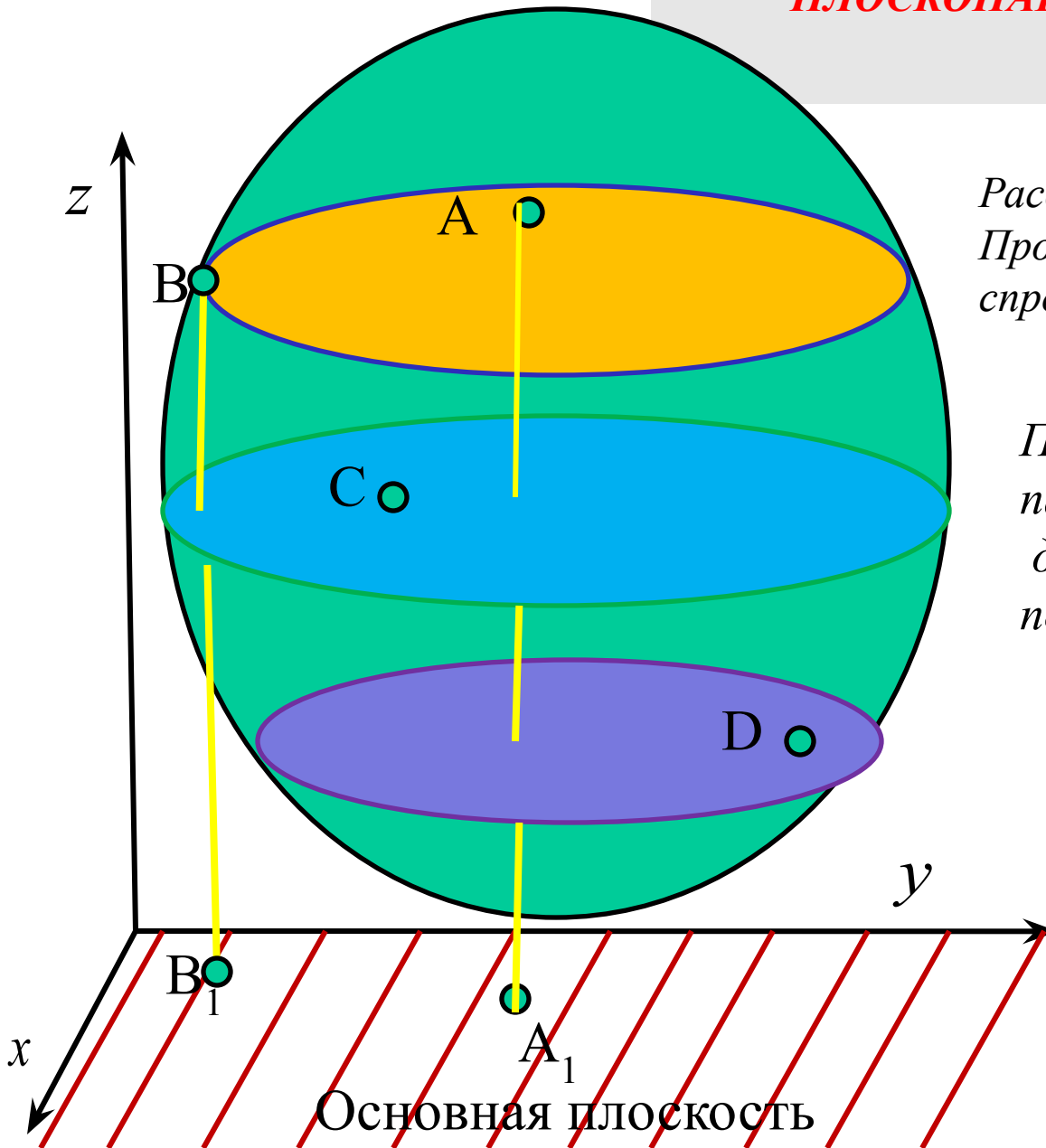


Плоскопараллельное движение твёрдого тела (плоское)

*Плоскопараллельным (плоским) движением твёрдого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости, которая называется **основной** плоскостью.*

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ



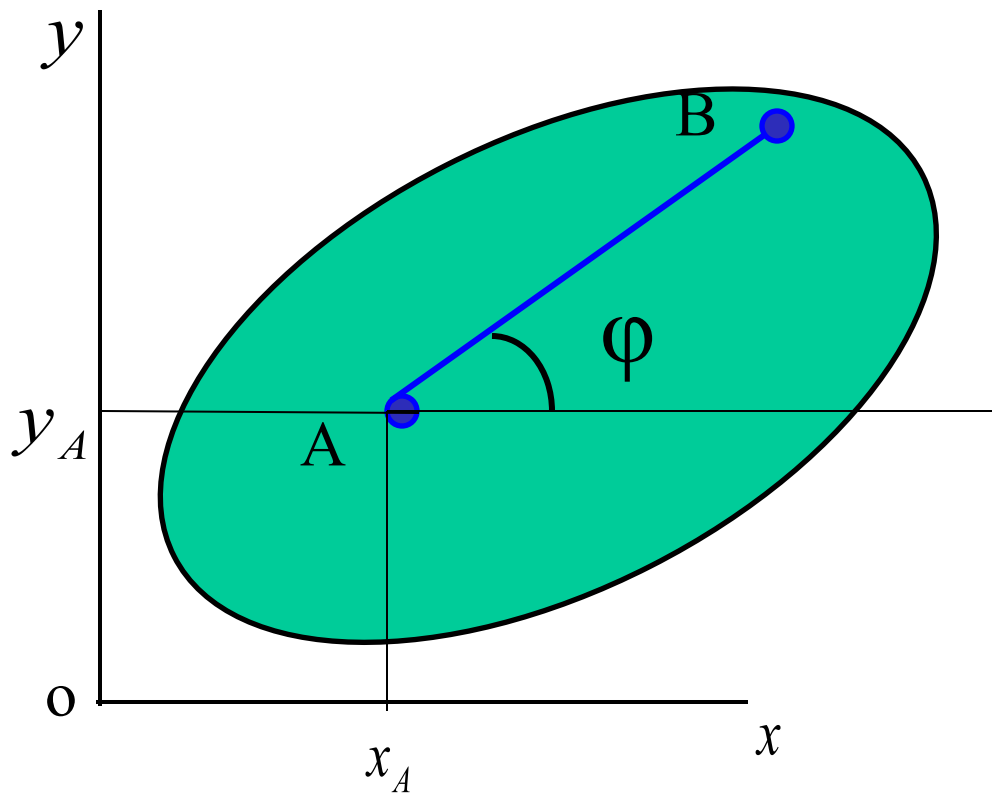
*Рассмотрим произвольное сечение.
Произвольные точки сечения A и B
спроецируем на основную плоскость.*

*Прямые AA_1 , BB_1
параллельны, следовательно
движение этих прямых
поступательное*

*Вывод: Для исследования
плоскопараллельного движения
тела достаточно изучить
движение одной плоскости
этого тела параллельной
основной.*

Уравнения плоскопараллельного движения

Точка A - полюс

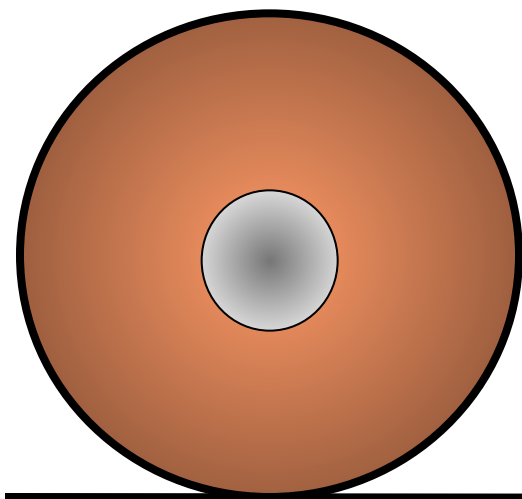
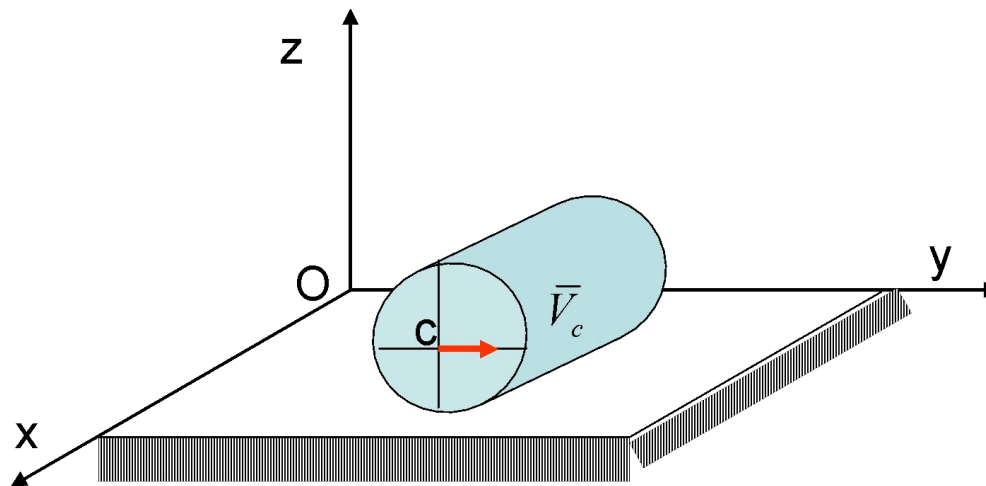


$$x_A = f_1(t)$$

$$y_A = f_2(t)$$

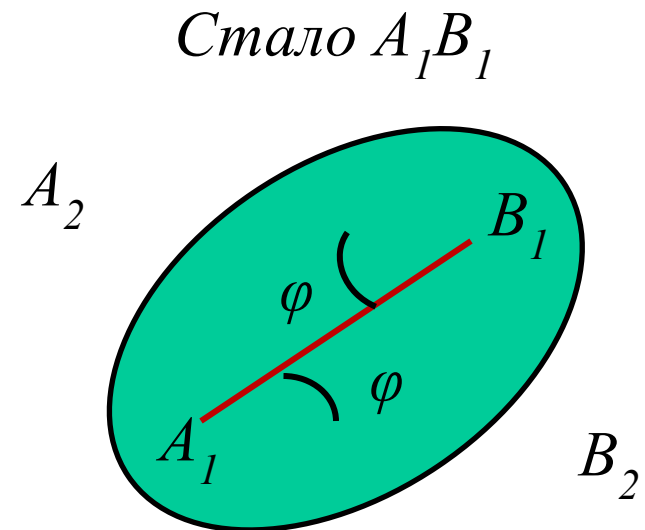
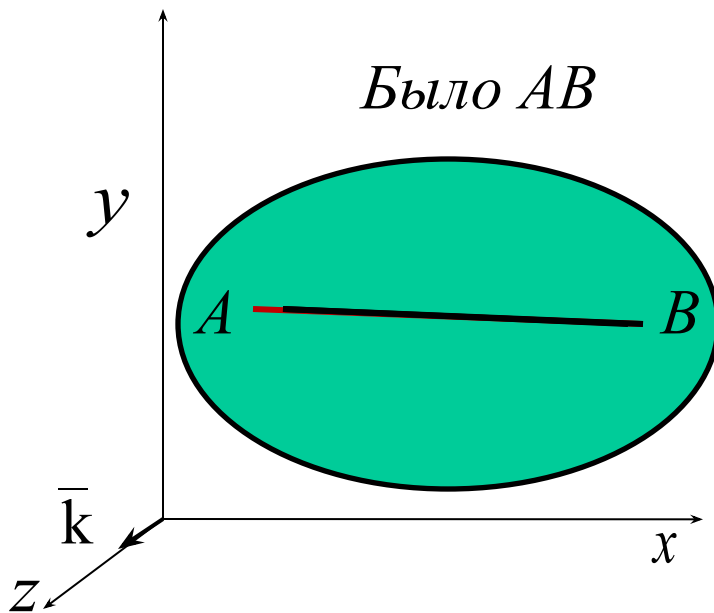
$$\varphi = f_3(t)$$

Пример плоскопараллельного движения твердого тела



Разложение плоскопараллельного движения на простейшие виды движения

Плоскопараллельное движение можно разложить на поступательное движение вместе с полюсом и вращательное вокруг оси, проходящей через полюс.



Угол φ не зависит от выбора полюса

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\varphi} \bar{k}$$

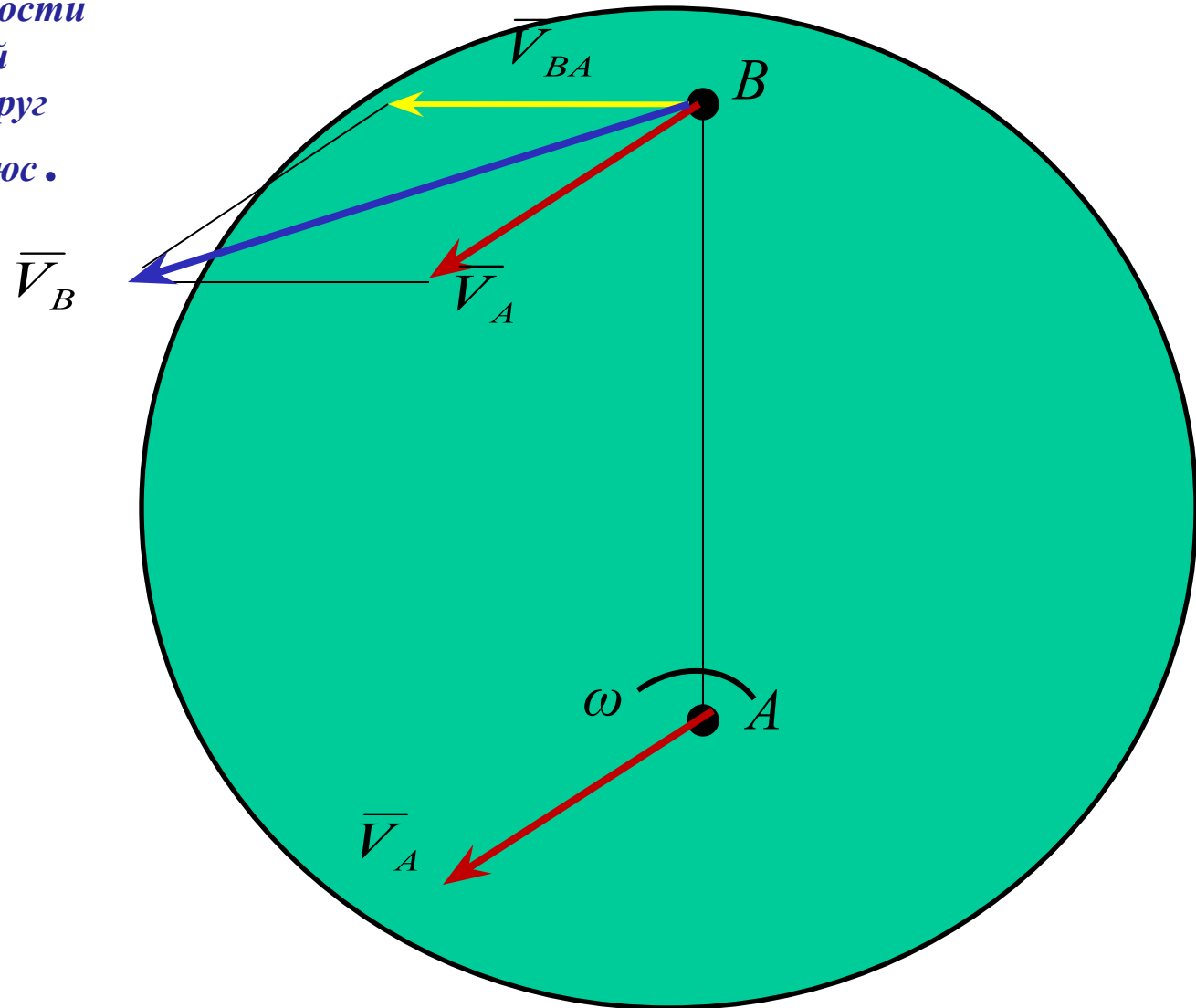
Теорема о скоростях точек тела при плоскопараллельном движении

Скорость произвольной точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг оси, проходящей через полюс.

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

$$\bar{V}_{BA} \perp \bar{AB}$$

Геометрическая интерпретация теоремы



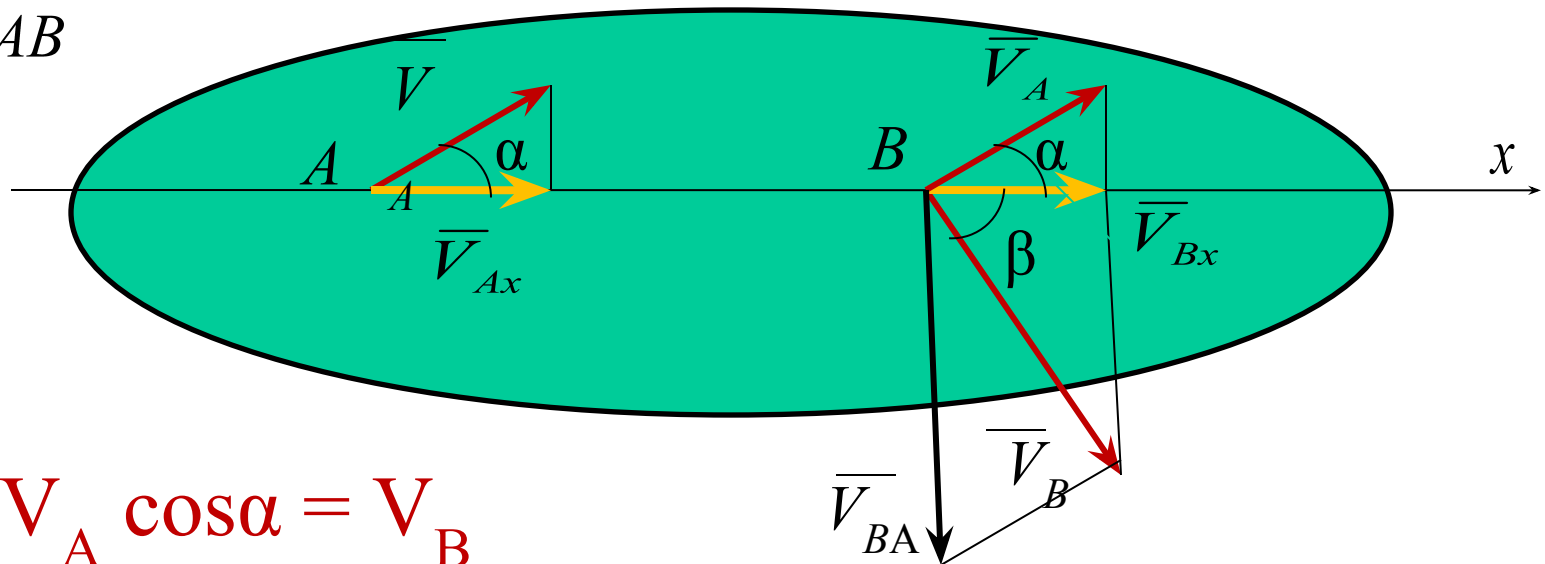
Теорема о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки

Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

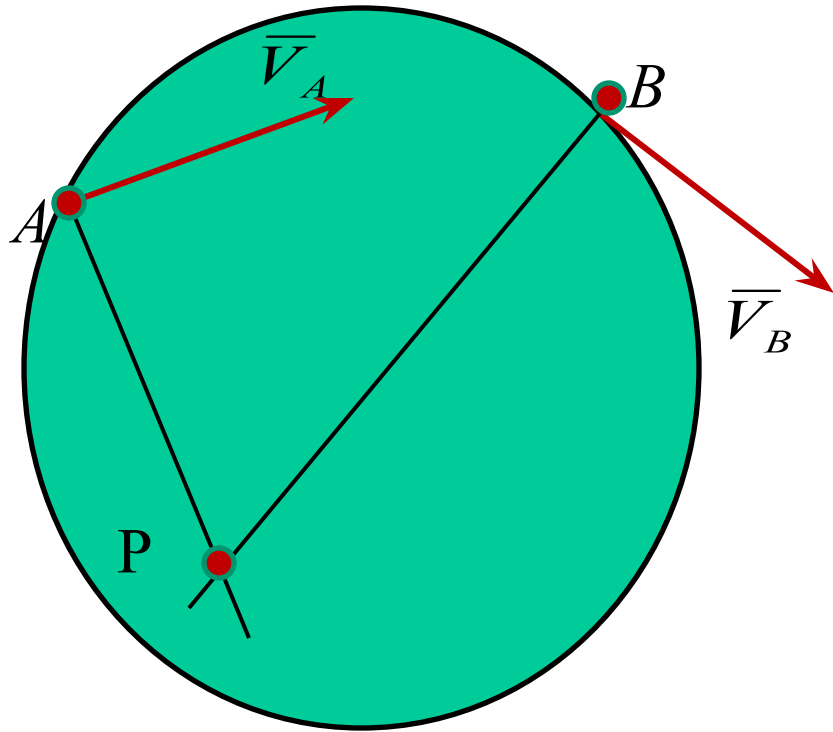
$$\text{пр}_{AB} \vec{V}_A = \text{пр}_{AB} \vec{V}_B$$

$$\vec{V}_{BA} \perp AB$$



$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

Мгновенный центр скоростей



Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

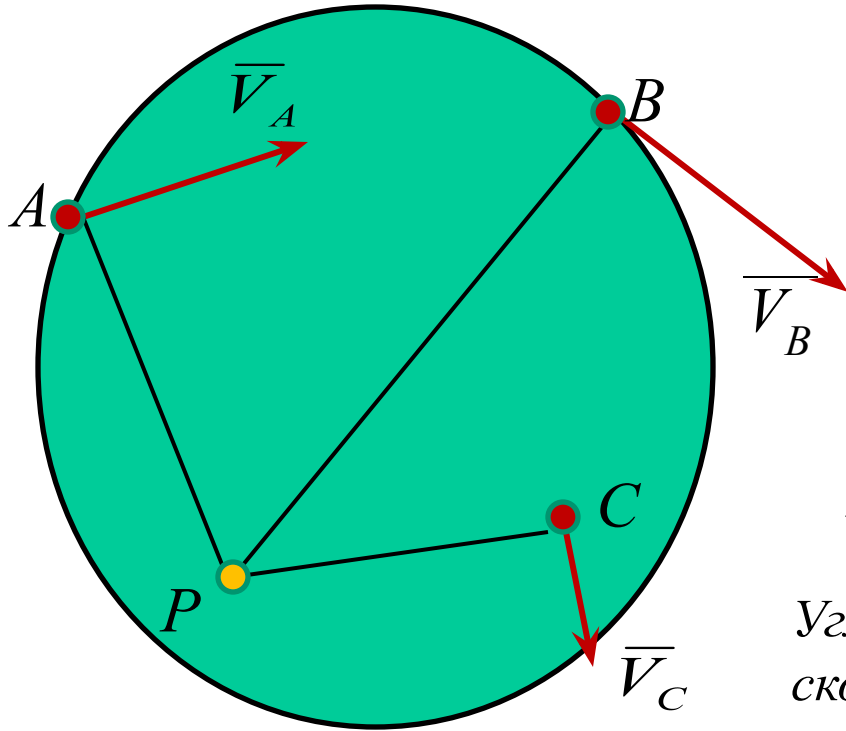
Точка P – мгновенный центр скоростей. $V_P = 0$

Выберем точку P за полюс

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} & \vec{V}_{AP} &\perp A\vec{P} \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} & \vec{V}_{BP} &\perp B\vec{P}\end{aligned}$$

Точка P находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям в точках «A» и «B»

Соотношения между скоростями точек тела и угловой скоростью



$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega$$

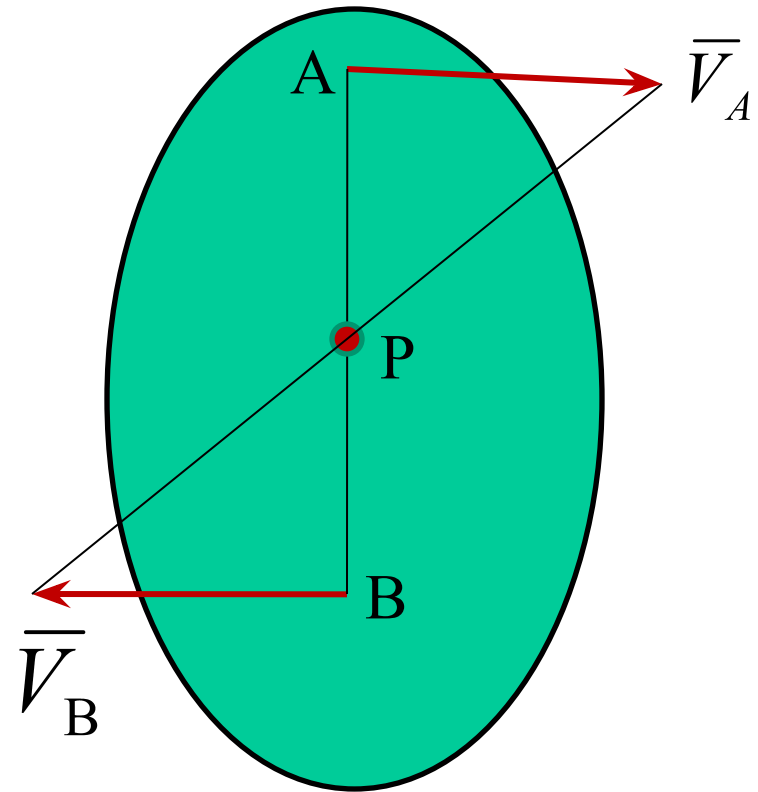
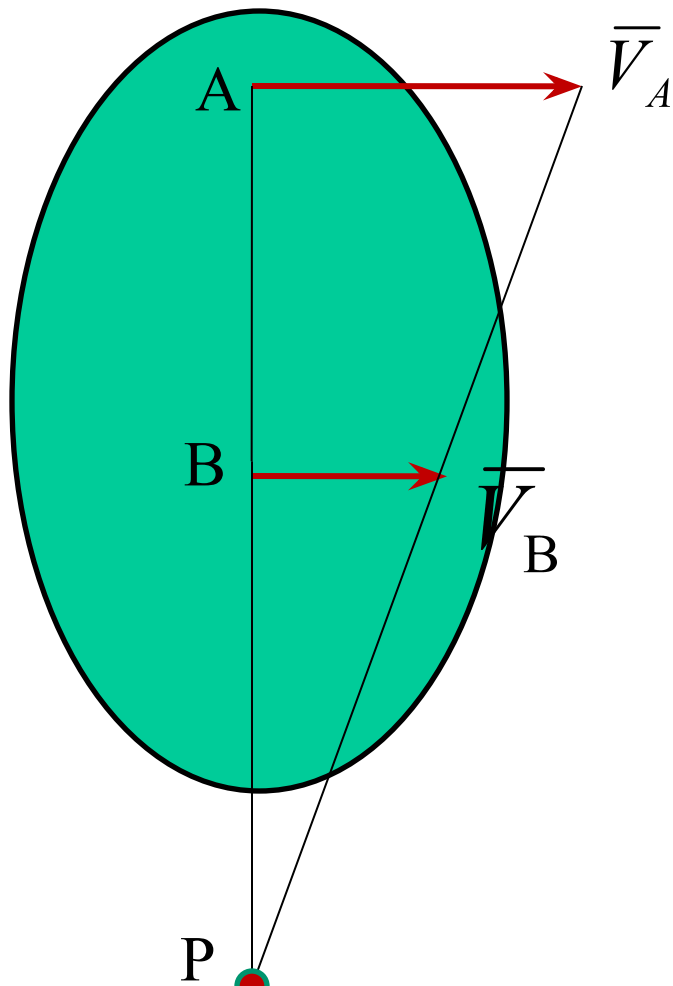
Скорости точек прямо пропорциональны расстояниям от точек до МЦС

Угловая скорость тела равна отношению скорости любой точки тела на расстояние от этой точки до МЦС.

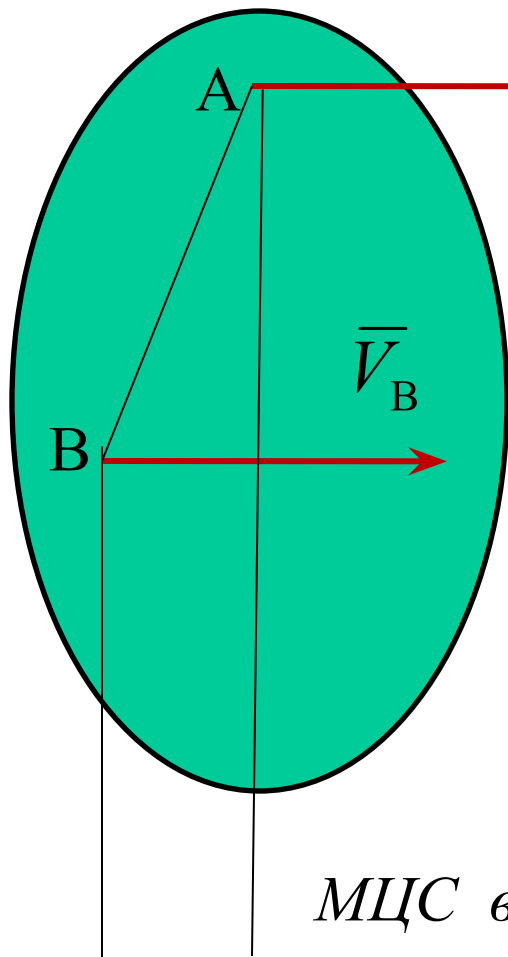
Вывод

Плоскопараллельное движение можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг мгновенной оси (ось, проходящая через МЦС).

Скорости двух точек тела параллельны друг другу, не равны между собой и перпендикулярны прямой соединяющей эти точки.



Скорости двух точек параллельны, но не перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки.



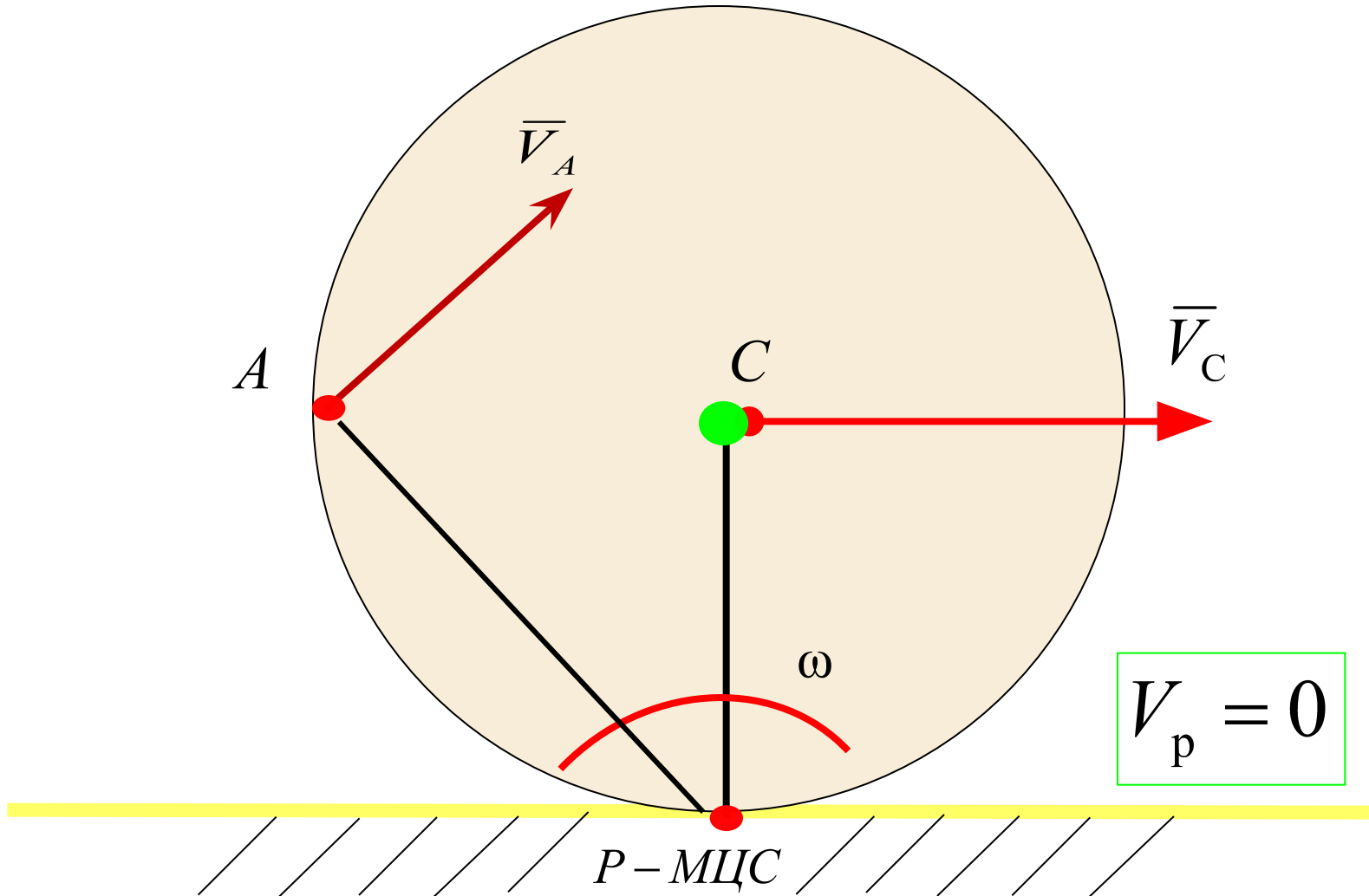
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = 0$$

Движение тела поступательное

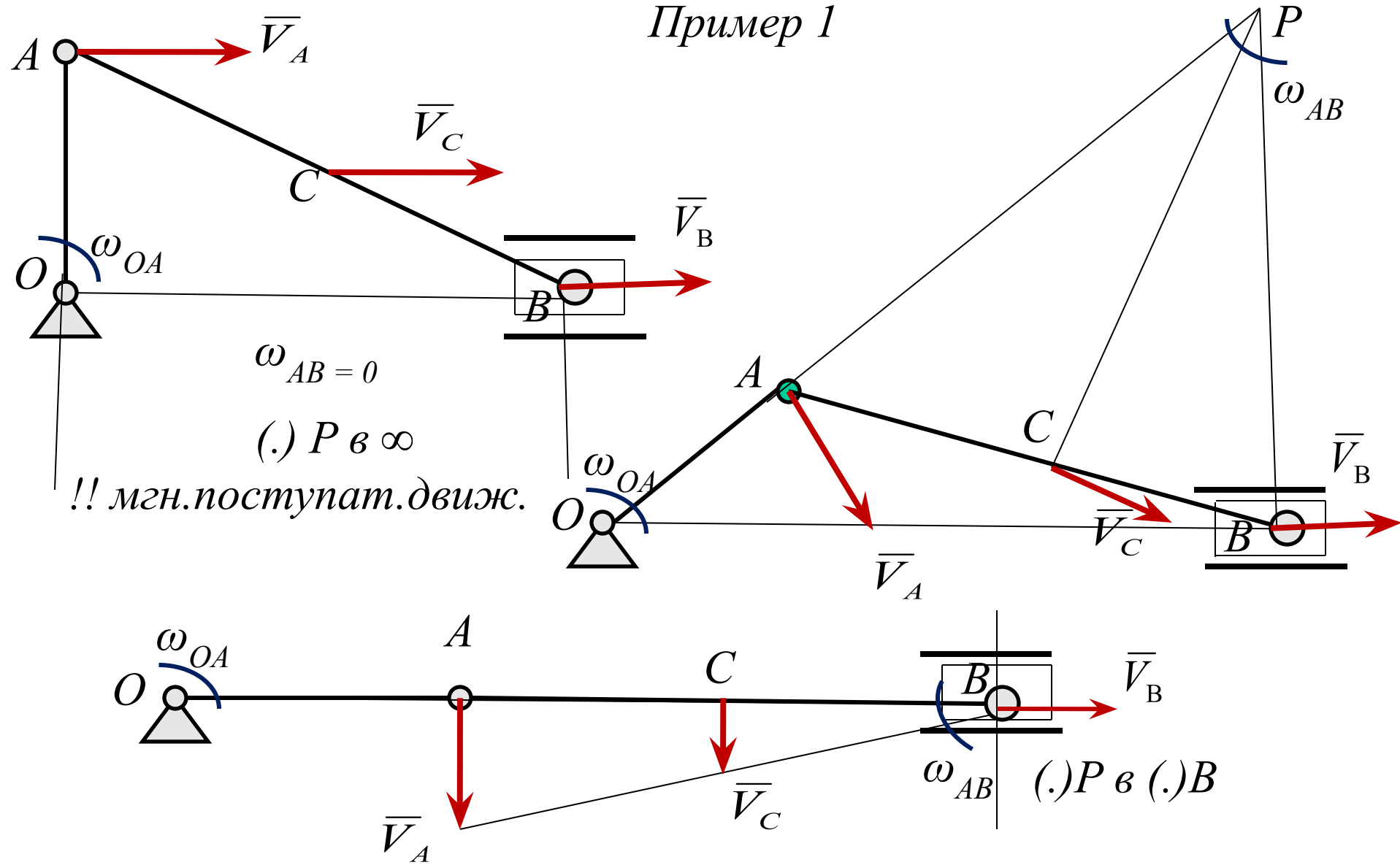
$$V_A = V_B$$

МЦС в бесконечности

4. Тело катится без скольжения по неподвижной поверхности.

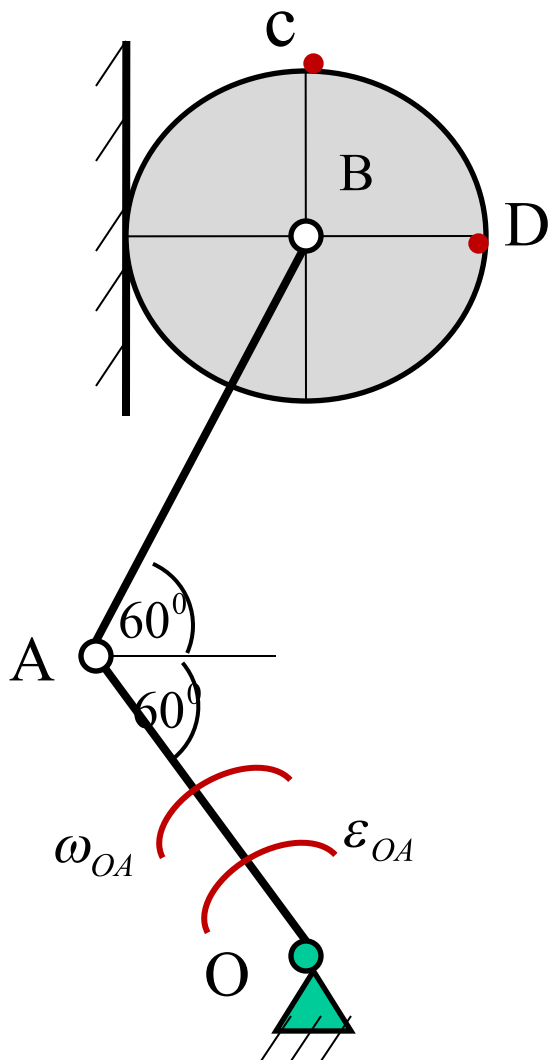


Пример 1



Постановка задачи:

Найти для заданного положения механизма скорости, указанных точек, угловые скорости всех звеньев и ускорения двух точек.



Дано : $\omega_{OA} = 3c^{-1}$; $\epsilon_{OA} = 4c^{-2}$; $OA = 4cm$; $AB = 4cm$; $r = 2cm$

Определить : $V_A; V_B; V_C; V_D; a_A; a_B; a_C; a_D$

1. Определение скоростей

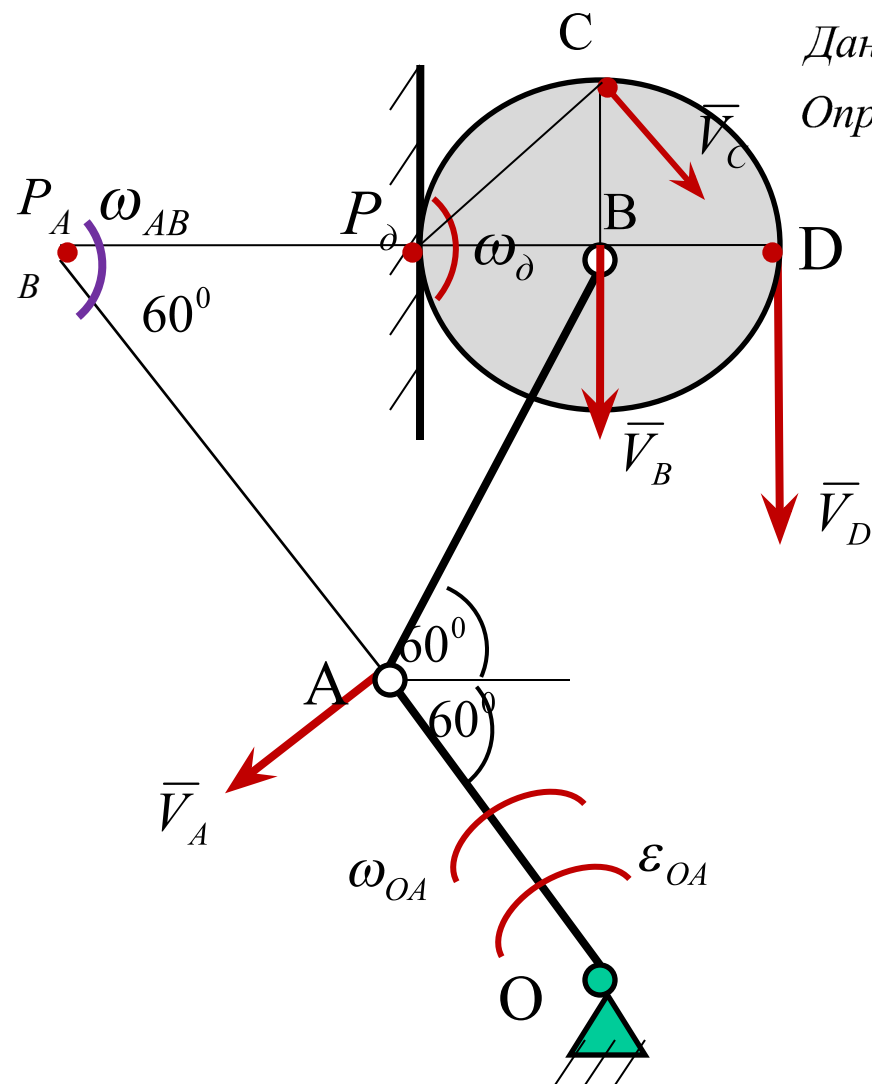
1.1 С помощью мгновенного центра скоростей.

1.2 С помощью плана скоростей.

2. Определение ускорений

2.1 С помощью теоремы ускорений.

Для заданного положения механизма определить скорости всех указанных точек и угловые скорости всех звеньев.



Дано : $\omega_{OA} = 3 \text{ c}^{-1}$; $\varepsilon_{OA} = 4 \text{ c}^{-2}$; $OA = 4 \text{ см}$; $AB = 4 \text{ см}$; $r = 2 \text{ см}$

Определить : $V_A; V_B; V_C; V_D; \omega_{AB}; \omega_{\delta}$

Решение:

1. Построить механизм в масштабе!!!
2. Анализ движения звеньев системы.

Стержень OA – вращательное движение $\bar{V}_A \perp OA$ ||

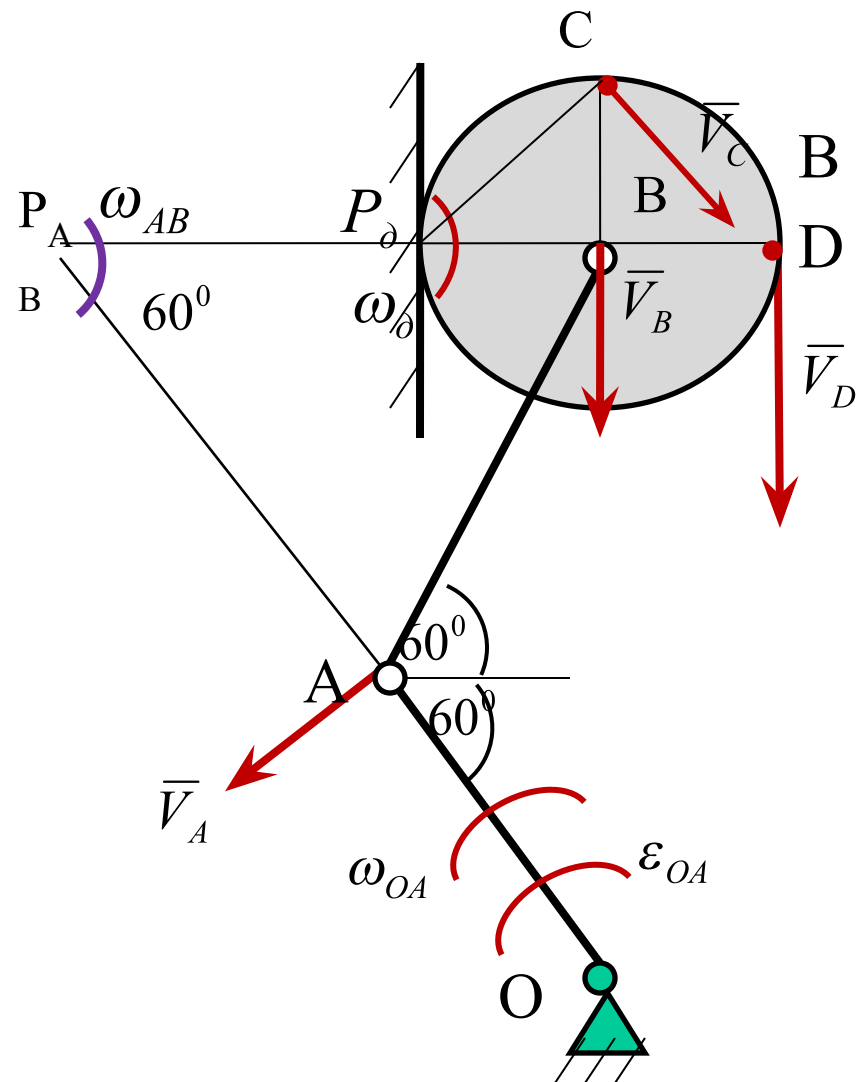
Точка B движется по прямой направляющей диска

Стержень AB – плоскопараллельное движение. Точка P_{AB} – МЦС

Диск – плоскопараллельное движение. Точка P_{δ} – МЦС

$\bar{V}_B \perp P_{\delta}B$; $\bar{V}_C \perp P_{\delta}C$; $\bar{V}_D \perp P_{\delta}D$

3. Определение скоростей с помощью мгновенного центра скоростей



$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см/с}$$

Стержень AB – плоскопараллельное движение. Точка P_{AB} – МЦС

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_B}{BP_{AB}}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{12}{4} = 3 \text{ с}^{-1};$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см/с}$$

Диск – плоскопараллельное движение. Точка P_{AB} – МЦС

$$\omega_{\delta} = \frac{V_B}{BP_{\delta}} = \frac{V_C}{CP_{\delta}} = \frac{V_D}{DP_{\delta}}$$

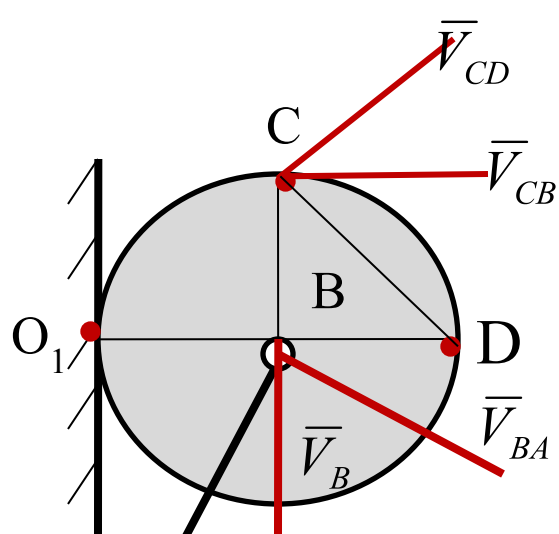
$$\omega_{\delta} = \frac{V_B}{r} = \frac{V_D}{2r} = \frac{V_C}{r\sqrt{2}}; \omega_{\delta} = \frac{V_B}{r} = 6 \text{ с}^{-1}$$

$$V_C = \omega_{\delta} \cdot CP_{\delta} = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 17 \text{ см/с}$$

$$V_D = \omega_{\delta} \cdot DP_{\delta} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ см/с}$$

4. Построение плана скоростей

Графическое изображение векторов скоростей точек плоской фигуры



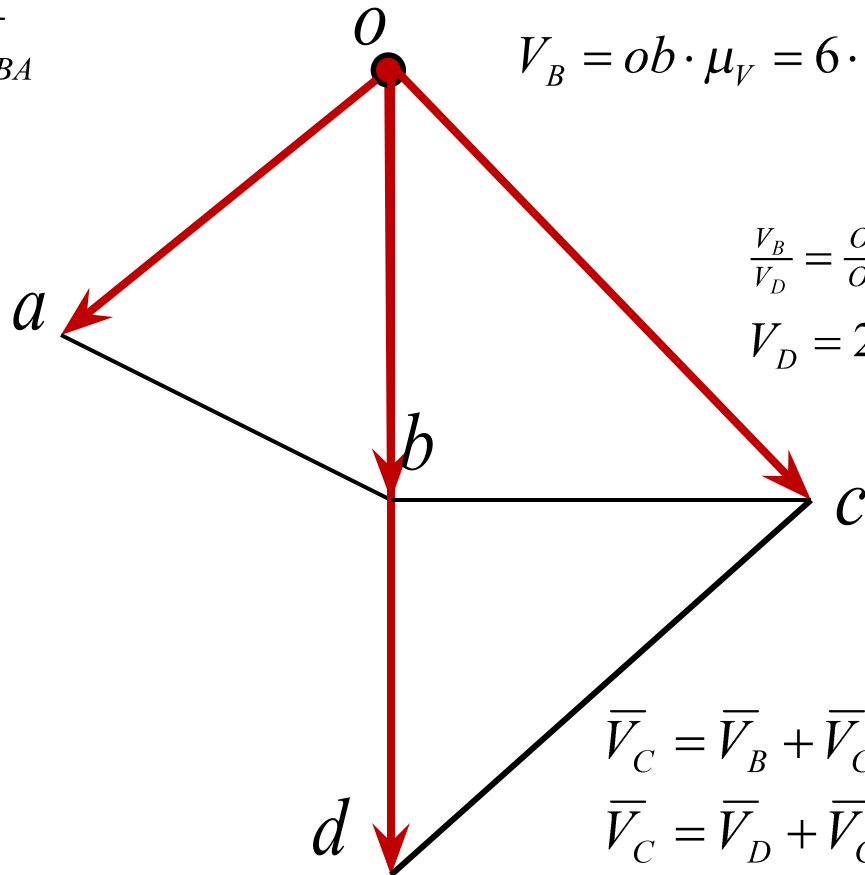
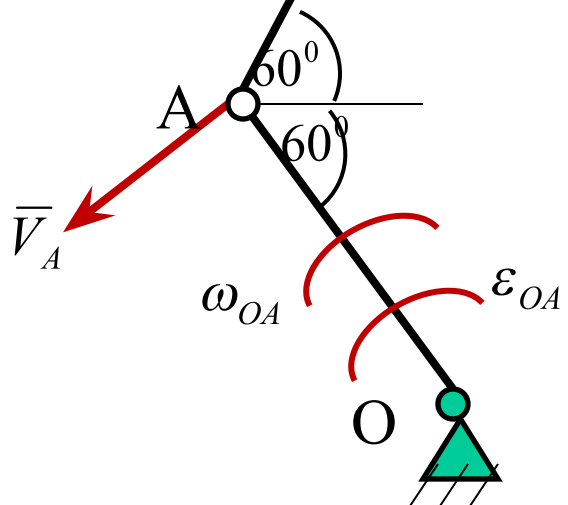
$$\bar{V}_A \perp OA; \quad V_A = 12 \text{ см/с}$$

$\mu_v = 2 \frac{1}{c}$ – масштабный коэффициент скорости

$$oa = \frac{V_A}{\mu} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}; \quad \bar{V}_{BA} \perp AB$$

$$V_B = ob \cdot \mu_v = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см/с}$$



$$\frac{V_B}{V_D} = \frac{O_1B}{O_1D} = \frac{ob}{od} = \frac{r}{2r} = 0,5$$

$$V_D = 2V_B = 24 \text{ см/с}$$

$$V_C = oc \cdot \mu_v = 8,5 \cdot 2 = 17 \text{ см/с}$$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}; \quad \bar{V}_{CB} \perp CB$$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{CD}; \quad \bar{V}_{CD} \perp CD$$

Свойства плана скоростей

- 1. Одноименные отрезки плана скоростей и механизма взаимно перпендикулярны.*
- 2. Одноименные отрезки плана скоростей и механизма прямо пропорциональны.*
- 3. Одноименные фигуры плана скоростей и механизма подобны и повернуты друг относительно друга на угол 90^0*

Правило оформления ИДЗ К.

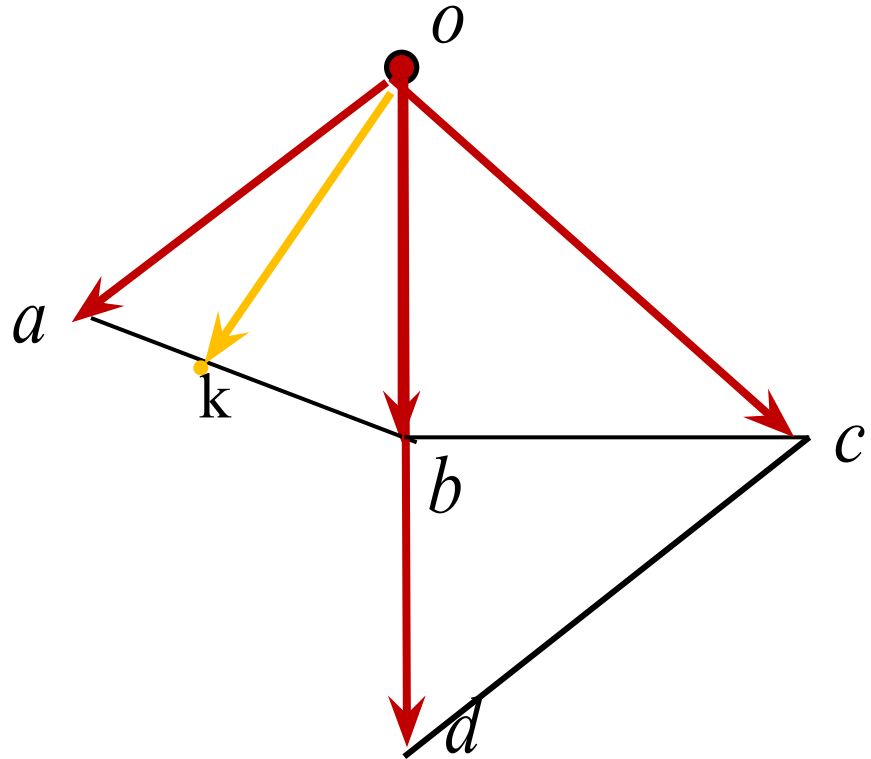
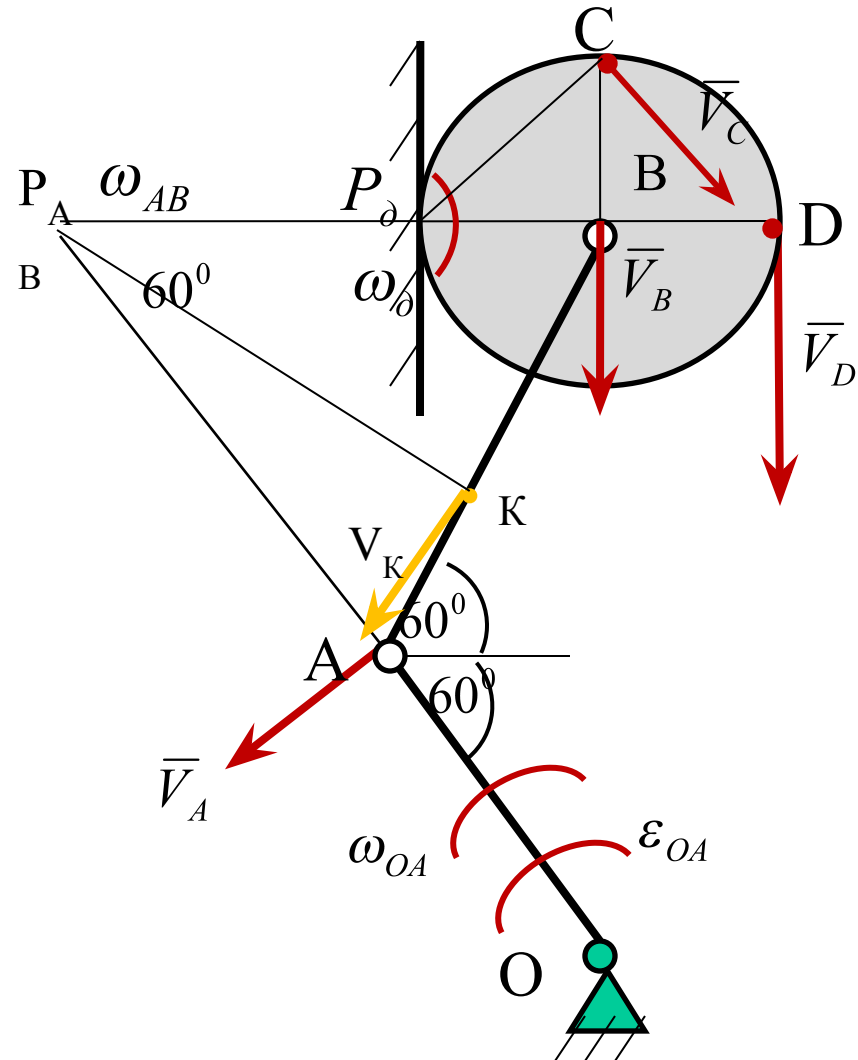
Титульный лист.

«Кинематический анализ плоского механизма.»

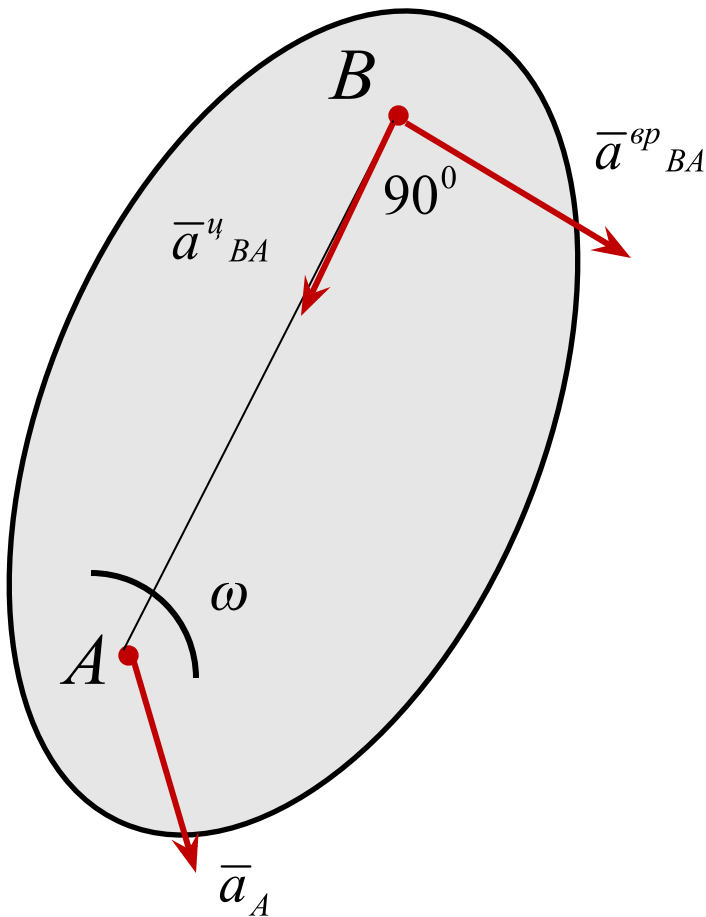
- 1. Формат отчета: А4*
- 2. Лист 1. Схема механизма. Постановка задачи. Дано.*
- 3. Лист 2. Схема механизма в масштабе.
Аналитическое определение скоростей (МЦС) и ускорений.*
- 4. Лист 3. Схема механизма в масштабе.
Графическое определение скоростей (план скоростей).*

Защита задания

Найти скорость точки K (двумя способами)



Теорема о сложении ускорений точек при плоскопараллельном движении тела



Ускорение произвольной точки тела при его плоскопараллельном движении равно векторной сумме ускорения полюса, вращательного и центростремительного ускорений этой точки при вращении вокруг полюса.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{6p} + \bar{a}_{BA}^u$$

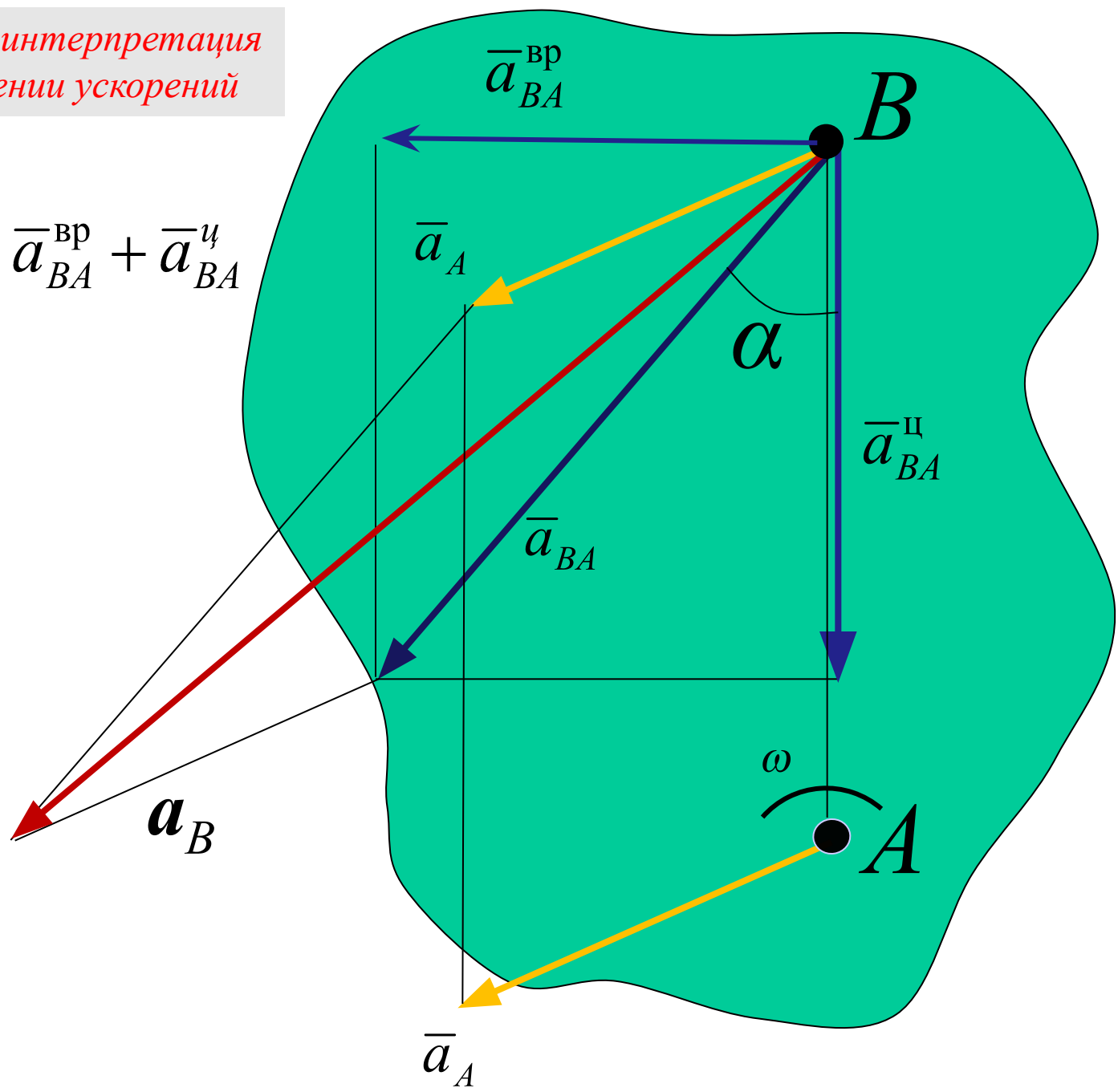
$$\bar{a}_{BA}^{6p} = \boldsymbol{\varepsilon} \times AB; \quad \bar{a}_{BA}^{6p} \perp AB$$

$$\bar{a}_{BA}^u = \boldsymbol{\omega}^2 \times AB;$$

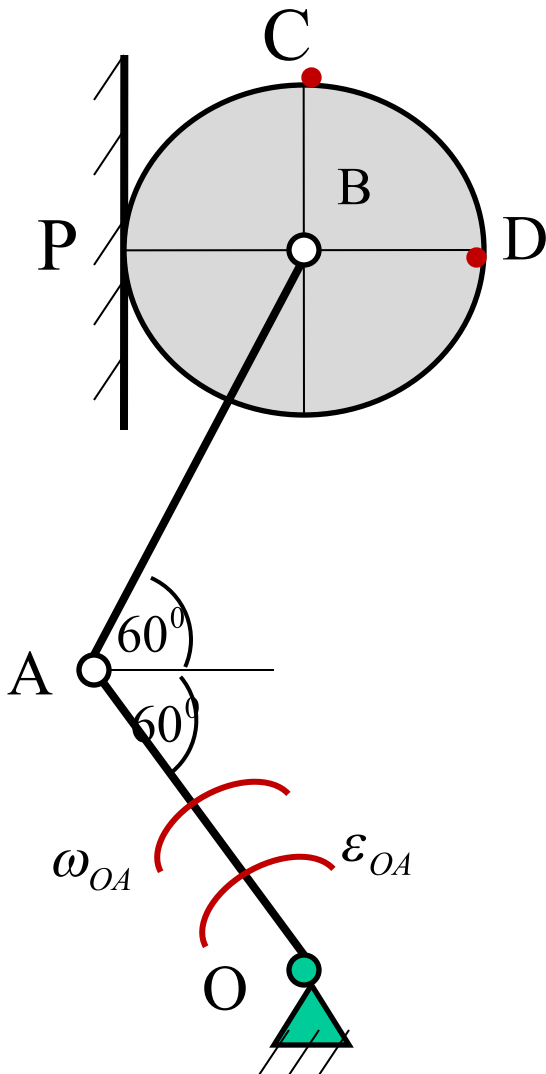
\bar{a}_{BA}^u направлено по AB от $(\cdot)B$ к $(\cdot)A$

*Геометрическая интерпретация
Теоремы о сложении ускорений*

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{вр} + \bar{a}_{BA}^u$$



Постановка задачи: Найти для заданного положения механизма ускорения всех указанных точек и угловые ускорения всех звеньев.



Дано : $\omega_{OA} = 3c^{-1}$; $\epsilon_{OA} = 4c^{-2}$; $OA = 4\text{см}$; $AB = 4\text{см}$; $r = 2\text{см}$

Определить : a_A ; a_B ; a_C ; a_D ; ϵ_{AB} ; ϵ_{δ}

2. Определение ускорений

2.1 С помощью теоремы ускорений.

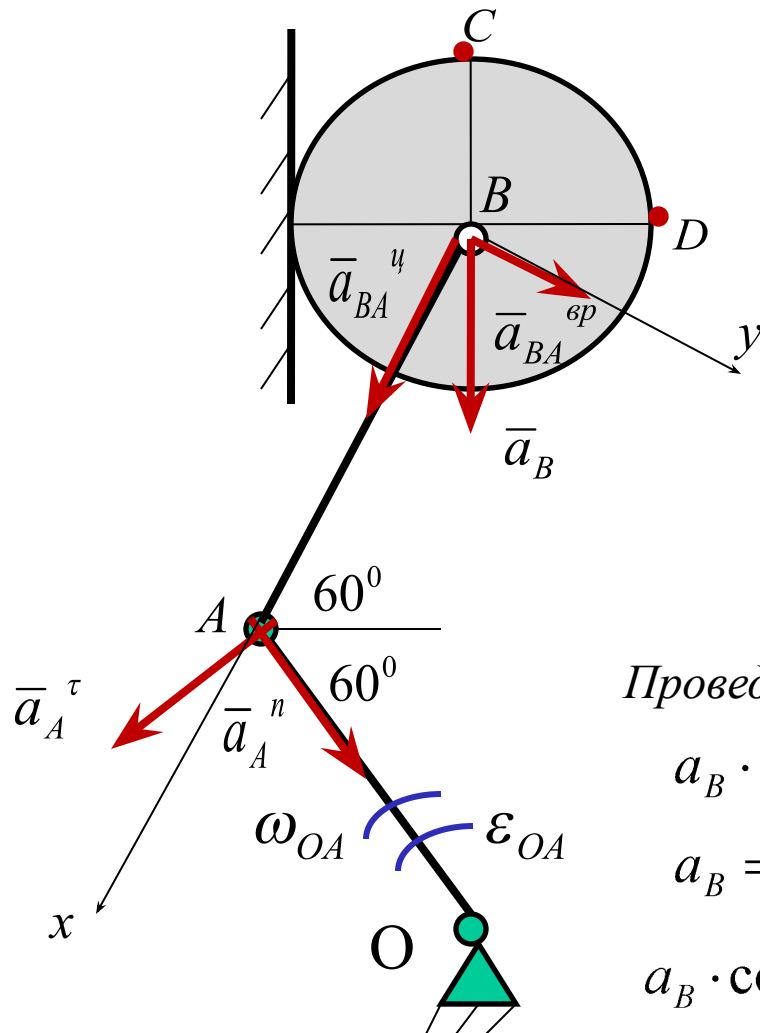
2.2 С помощью плана ускорений.

Аналитическое определение ускорений.

Дано: $\omega_{OA} = 3c^{-1}$; $\varepsilon_{OA} = 4c^{-2}$;

$OA = 4cм$; $AB = 4cм$; $r = 2cм$

$\omega_{AB} = 3c^{-1}$; $\omega_{\partial} = 6c^{-1}$



$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9 \cdot 4 = 36 cм / c^2$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 4 = 16 cм / c^2$$

$$a_A = \sqrt{36^2 + 16^2} = 39,4 cм / c^2$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^y + \bar{a}_{BA}^{sp} \quad (*)$$

$$a_{BA}^y = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 9 \cdot 4 = 36 cм / c^2$$

Проведем оси координат и спроецируем (*) на эти оси

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ + a_{BA}^y$$

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ + a_{BA}^y}{\cos 30^\circ} = 78,3 cм / c^2$$

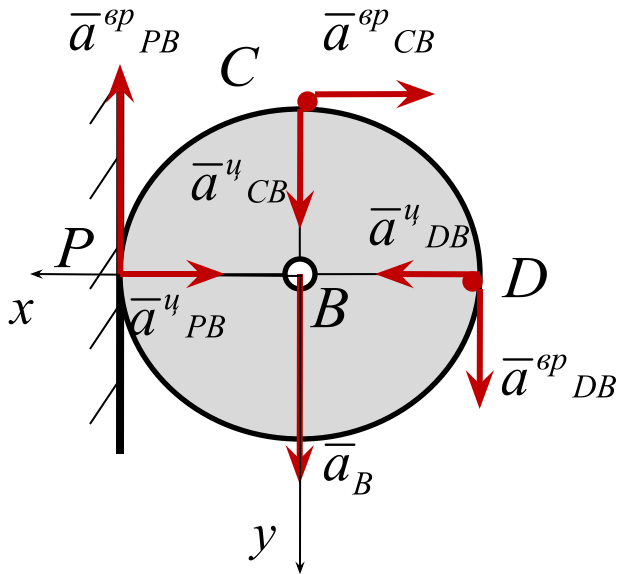
$$a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^{sp}$$

$$a_{BA}^{sp} = a_B \cdot \cos 60^\circ + a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ$$

$$a_{BA}^{sp} = 39,15 + 8 - 31,21 = 16 = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{16}{4} = 4 c^{-2}$$

Найти ускорения всех указанных точек и угловое ускорение диска.



Дано: $\omega_\partial = 6\text{с}^{-1}$; $r = 2\text{см}$; $a_B = 78,3\text{см}/\text{с}^2$

Определить: a_P ; a_C ; a_D ; ε_∂

$$\varepsilon_\partial = \frac{d\omega_\partial}{dt} = \frac{d(V_B)}{dt \cdot R} = \frac{a_B}{R} = \frac{78,3}{2} = 39,15\text{с}^{-2}$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_B + \bar{a}^u_{PB} + \bar{a}^{6p}_{PB}; \quad a_B = \varepsilon_\partial \cdot r$$

$$a^u_{PB} = \omega_\partial^2 \cdot r = 36 \cdot 2 = 72\text{см}/\text{с}^2 \quad a^{6p}_{PB} = \varepsilon_\partial \cdot r$$

проецируем на оси x и y :

$$a_{Px} = -a^u_{PB}; \quad a_{Py} = -a^{6p}_{PB} + a_B = 0$$

$$a_P = a^u_{PB} = \omega_\partial^2 \cdot r = 72\text{см}/\text{с}^2$$

$$(*) \quad a^u_{DB} = \omega_\partial^2 \cdot r = 36 \cdot 2 = 72\text{см}/\text{с}^2$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_B + \bar{a}^u_{DB} + \bar{a}^{6p}_{DB}$$

$$a^{6p}_{DB} = \varepsilon_\partial \cdot r = 39,15 \cdot 2 = 78,3\text{см}/\text{с}^2$$

Аналогично определяем ускорение (.) C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}^u_{CB} + \bar{a}^{6p}_{CB}$$

$$a_{Cx} = a^{6p}_{CB} = -78,3$$

$$a_{Cy} = a^u_{CB} + a_B = 150,3$$

$$a_C = \sqrt{(-78,3)^2 + 150,3^2} = 169,5\text{см}/\text{с}^2$$

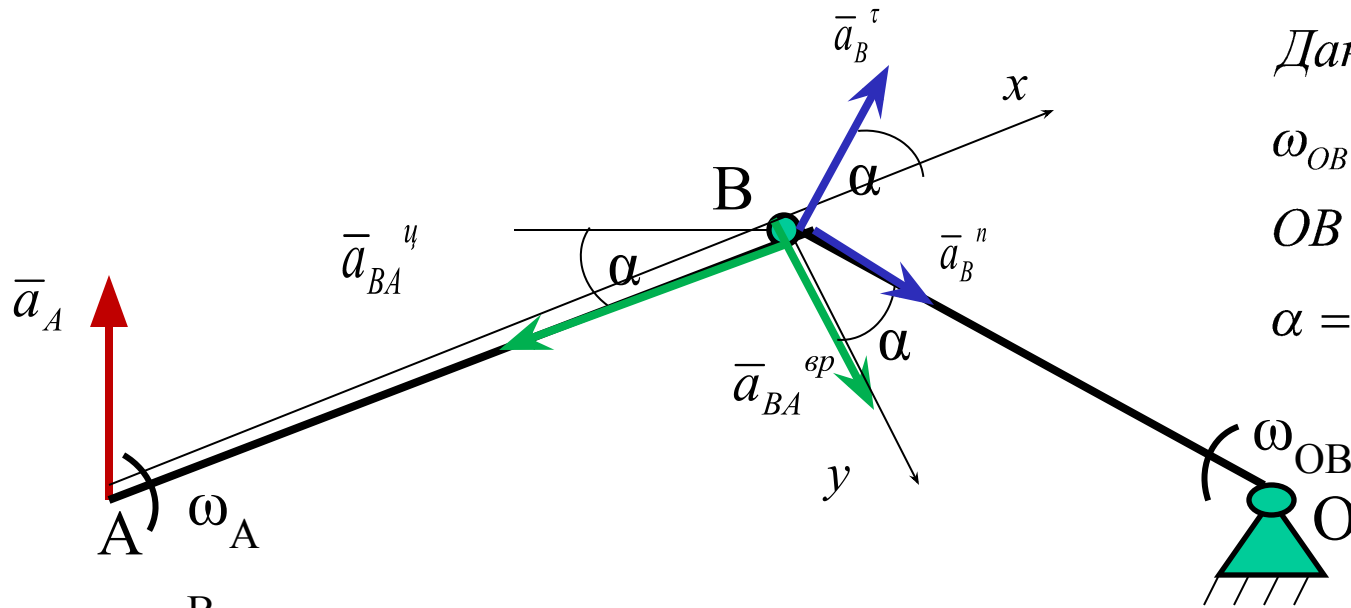
Спроецируем (*) на оси координат

$$a_{Dx} = a^u_{DB} = 72$$

$$a_{Dy} = a^{6p}_{DB} + a_B = 156,6$$

$$a_D = \sqrt{72^2 + 156,6^2} = 172,4\text{см}/\text{с}^2$$

Пример определения ускорения точки B, когда не известно его направление.



Дано : $\omega_{AB} = 2 \text{ c}^{-1}$

$\omega_{OB} = 1 \text{ c}^{-1}$; $AB = 1 \text{ м}$

$OB = 0,8 \text{ м}$; $a_A = 2 \text{ м} / \text{c}^2$

$\alpha = 30^\circ$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$$

$$a_{BA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4 \text{ м} / \text{c}^2$$

$$a_B^n = \omega_{OB}^2 \cdot OB = 0.64 \text{ м} / \text{c}^2$$

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep} = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$$

$$a_A \sin \alpha - a_{BA}^u = a_B^\tau \cos \alpha + a_B^n \sin \alpha$$

Проецируем на ось X:

$$a_B^\tau = 3,86 \text{ м} / \text{c}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 3,9 \text{ м} / \text{c}^2$$

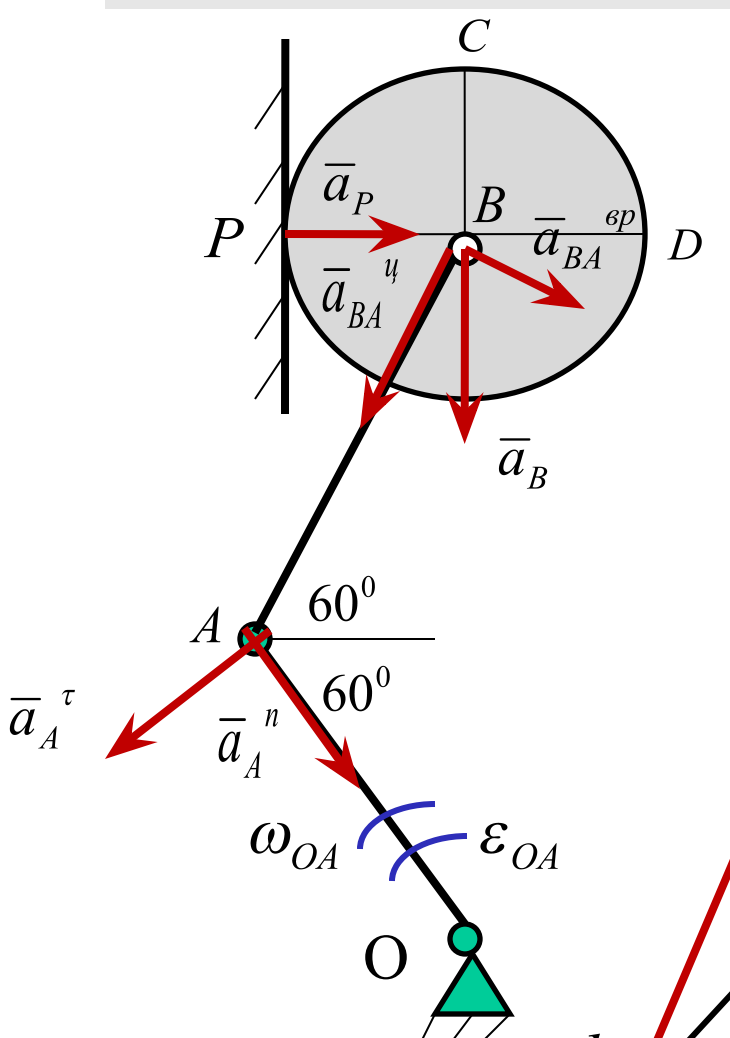
Построение плана ускорений.

Свойства плана ускорений

- *1. Одноименные отрезки плана ускорений и механизма прямо пропорциональны.*
- *2. Одноименные фигуры плана ускорений и механизма подобны.*
- *Одноименные отрезки плана ускорений и механизма подобны и одноименные фигуры плана ускорений и механизма повернуты друг относительно друга на угол $\alpha = \arctg(\varepsilon/\omega^2)$, где ε и ω соответствующего звена механизма*

План ускорений

Графическое изображение векторов ускорений точек плоской фигуры



$$a^n_A = \omega^2_{OA} \cdot OA = 36 \text{ см} / \text{с}^2; \quad a^\tau_A = \epsilon_{OA} \cdot OA = 16 \text{ см} / \text{с}^2;$$

$$a_P = \omega^2_{\partial} \cdot r = 72 \text{ см} / \text{с}^2; \quad \mu_a = 10 \frac{1}{\text{с}^2} - \text{м. коэфф. ускорения}$$

$$o_1 n_1 = \frac{a^n_A}{\mu_a} = 3,6 \text{ см}$$

$$n_1 a_1 = \frac{a^\tau_A}{\mu_a} = 1,6 \text{ см}$$

$$a_A = \mu_a \cdot o_1 a_1 = 10 \cdot 3,9 = 39 \text{ см} / \text{с}^2$$



$$o_1 p_1 = \frac{a_P}{\mu_a} = 7,2 \text{ см}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^u_{BA} + \bar{a}^{6p}_{BA}$$

$$a^u_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 36 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$a_1 k_1 = \frac{a^u_{BA}}{\mu_a} = 3,6 \text{ см}$$

$$a_B = \mu_a \cdot o_1 b_1 = 10 \cdot 7,8 = 78 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$\frac{PB}{BD} = \frac{p_1 b_1}{b_1 d_1} = 1$$

$$BC \perp PD; \quad b_1 c_1 \perp p_1 d_1$$

$$PD = BD = CB = r$$

$$p_1 d_1 = b_1 d_1 = b_1 c_1$$

$$a_D = \mu_a \cdot o_1 d_1 = 10 \cdot 17,3 = 173 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$a_C = \mu_a \cdot o_1 c_1 = 10 \cdot 16,9 = 169 \text{ см} / \text{с}^2$$

Защита.

Найти ускорение точки M или точки L (два способа).

