Использование методов типа ветвей и границ для решения экстремальных задач на графах

Лекция 12

Поиск минимальных разрезов на взвешенных ориентированных сильносвязных графах

СОДЕРЖАНИЕ:

- Часть 1. Общие черты методов типа ветвей и границ.
- Часть 2. Методы типа ветвей и границ, осуществляющие поиск минимального разреза на сильносвязном взвешенном ориентированном графе фронтальным спуском по дереву ветвлений с помощью «наивных» методов вычисления оценок.
- Часть 3. Методы типа ветвей и границ, осуществляющие «поиск с возвратом» минимального разреза на сильносвязном взвешенном ориентированном графе.

ЧАСТЬ 1: МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Две обязательные компоненты методов типа ветвей и границ:

- Построение дерева ветвления (выбор стратегии ветвления).
- Выбор методов вычисления оценок (зависит от специфики задачи).

ИДЕЯ МЕТОДОВ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

1. **Все множество планов решаемой задачи разбивается на ряд подмножеств.**
2. **Для планов каждого подмножества вычисляется наилучшая оценка.**
3. **На основании оценок отбрасываются те подмножества планов, которые заведомо не могут содержать наилучшего решения, а оставшиеся исследуются.**

СТРАТЕГИИ ВЕТВЛЕНИЯ

Приняты две основные стратегии построения дерева ветвлений:

- Фронтальный спуск по дереву ветвлений.
- Движение по дереву ветвлений с возвратом.

ЧАСТЬ 2

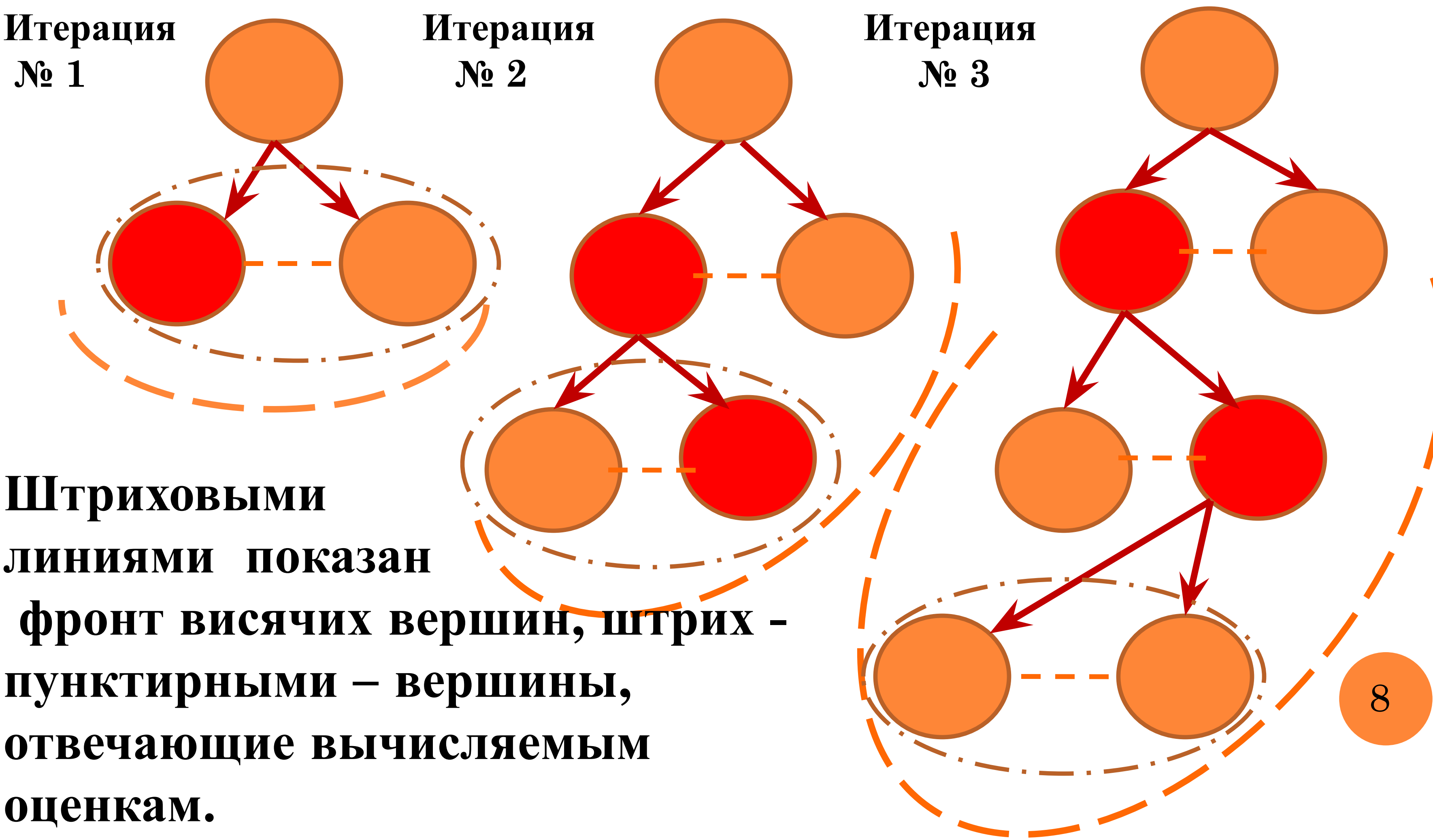
МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЕ ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ ФРОНТАЛЬНЫМ СПУСКОМ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

ИДЕЯ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

Три основных шага построения дерева ветвлений фронтальным спуском:

1. **На множестве висячих вершин построенной части дерева выбирается вершина с наилучшей оценкой.**
2. **Ветвление осуществляется из вершины, выбранной на предыдущем шаге.**
3. **Если выбранной вершине отвечает случай, когда в базис введены все переменные, то алгоритм закончен – оптимальный план найден.**

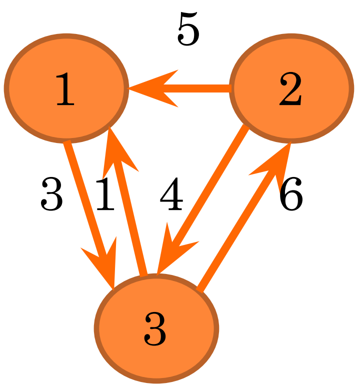
ИЛЛЮСТРАЦИЯ К РЕАЛИЗАЦИИ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ



Штриховыми линиями показан фронт висячих вершин, штрих - пунктирными – вершины, отвечающие вычисляемым оценкам.

ПРИМЕР № 1: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ -ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

- Исходный граф G(X,U):



Формальная постановка задачи:

$$\begin{cases} 3z(1,3)+5z(2,1)+4z(2,3)+6z(3,2)+z(3,1)\to \min; \\ z(1,3)+z(3,1)\geq 1; \\ z(2,3)+z(3,2)\geq 1; \\ z(1,3)+z(3,2)+z(2,1)\geq 1; \\ \forall i\neq j: z(i,j)=1,0; \\ \forall i=j: z(i,j)=0. \end{cases}$$

Контуры на графе G(X,U):

$A_1 = \{1,3,1\}$;

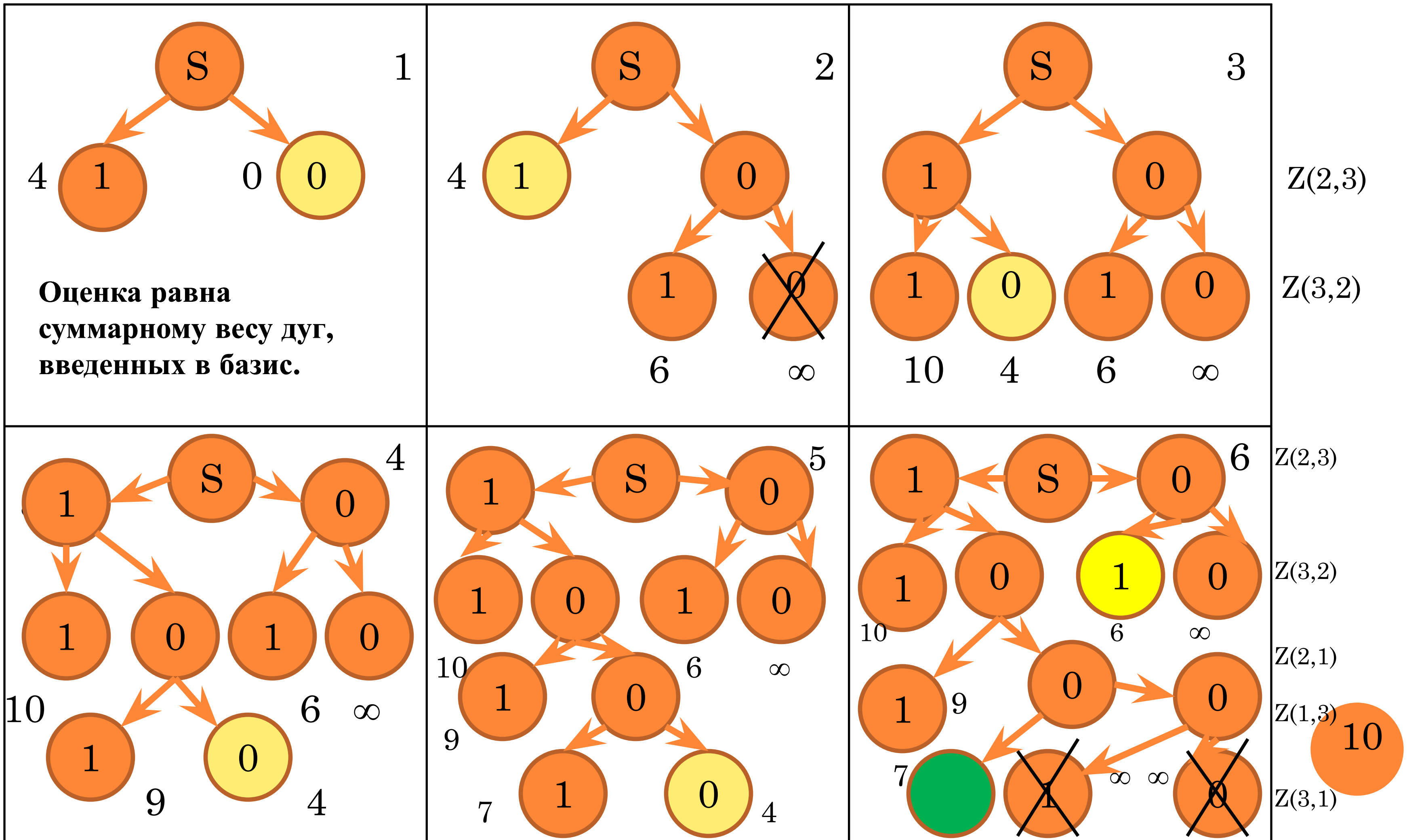
$A_2 = \{2,3,2\}$;

$A_3 = \{1,3,2,1\}$.

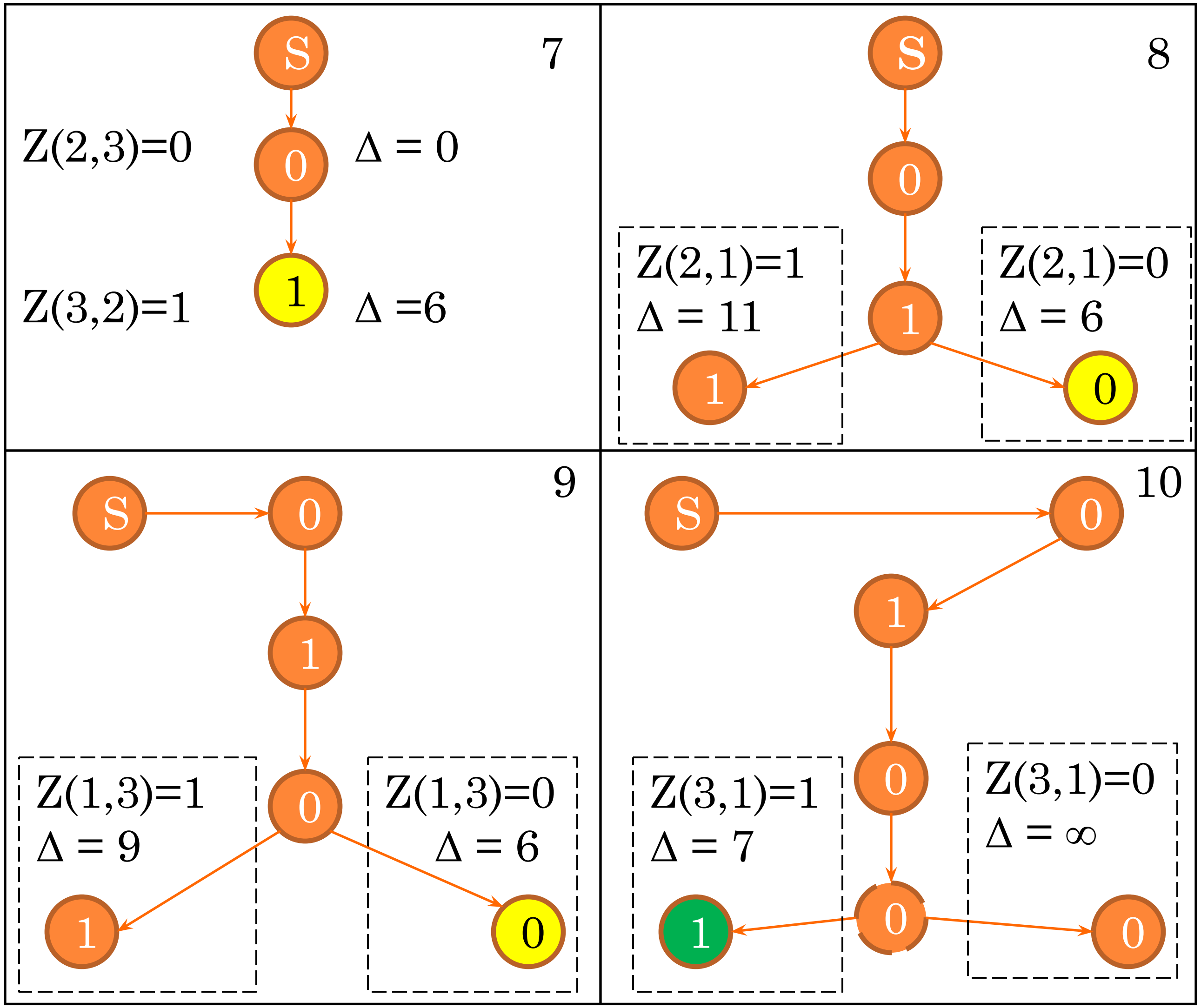
<u>Способ вычисления оценки</u> $\Delta:\Delta=\sum_{(i,j)\in I} r(i,j)z(i,j),$

где I – подмножество дуг, введенных в базис.

ПРИМЕР № 1: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ



ПРИМЕР № 1: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – ИТЕРАЦИИ 7 - 10



ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 1

- Число вычисленных оценок: 12.
- Число итераций: 6.
- Число операций сравнения: 21
- Два верных ответа:

1) $z(3,2)=z(3,1)=1$; $R=7$;
2) $z(2,3)=z(1,3)=1$; $R=7$.

Остальные переменные в обоих случаях равны нулю.

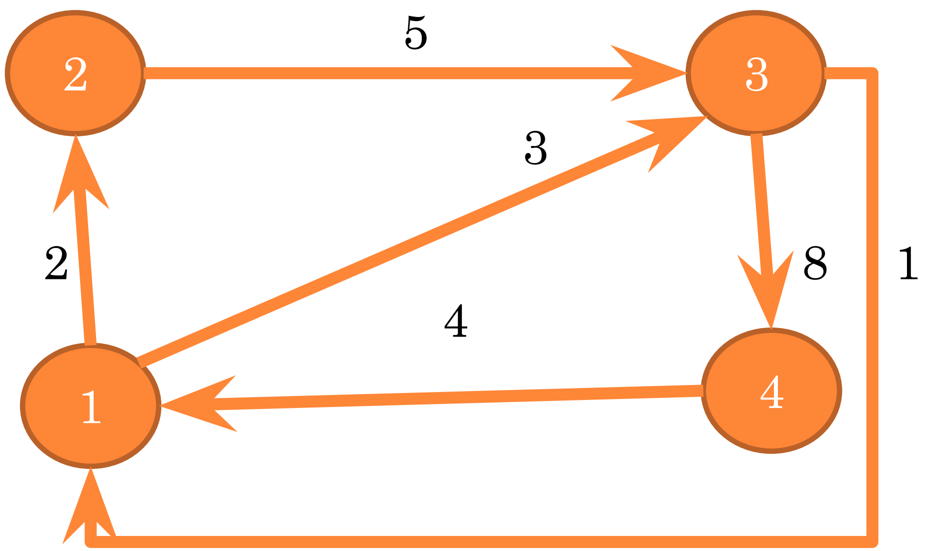
Достоинства и недостатки фронтального спуска по дереву ветвлений

- **Достоинства:** шанс на неполный перебор, первый же полный допустимый план является глобально оптимальным.
- **Недостатки:** по мере спуска по дереву ветвлений растут:

1) число оценок, хранимых в памяти;
2) затраты времени на их сравнение при выборе направления спуска.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений:



ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ: НАЙТИ РАЗРЕЗ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

НОМЕР ЗАДАНИЯ– СПРАВА ОТ МАТРИЦЫ

0	7	2
3	0	1
4	5	0

1

0	1	4
8	0	7
3	2	0

2

0	5	1
9	0	10
2	4	0

3

0	1	10
5	0	3
6	2	0

4

0	7	1
2	0	5
8	4	0

5

0	2	8
7	0	3
1	4	0

6

0	4	3
5	0	9
6	6	0

7

0	9	6
8	0	5
7	4	0

8

0	2	3
5	0	4
6	7	0

9

0	7	6
8	0	4
9	3	0

10

0	11	4
5	0	7
6	12	0

11

0	3	9
8	0	1
2	7	0

12

0	12	1
2	0	11
10	3	0

13

0	17	16
8	0	14
9	2	0

14

0	11	14
5	0	17
16	13	0

15

0	13	10
18	0	2
12	17	0

16

0	3	4
6	0	5
7	8	0

17

0	4	5
7	0	6
8	9	0

18

0	9	12
3	0	15
14	11	0

19

0	16	13
11	0	5
15	20	0

20

0	7	8
10	0	9
11	12	0

21

0	9	10
12	0	11
13	14	0

22

0	15	18
9	0	21
20	17	0

23

0	23	30
18	0	12
22	27	0

24

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНКИ

Теорема В.Н. Буркова: Величина максимальной циркуляции не превышает величины минимального разреза.

Пусть: U' – подмножество удаляемых из графа G(X,U) дуг; G'(X,U\U') – граф, полученный после удаления дуг подмножества U'; S(G') – некоторая циркуляция на G'(X,U'); Δ(G') – нижняя граница величины разреза, включающего дуги подмножества U'.

Тогда справедливо:

$$\Delta(G') = \sum_{(i,j)\in U'} r(i,j) + S(G').$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ГРАФЕ G(X,U)

- Формальная постановка задачи определения S(G'):

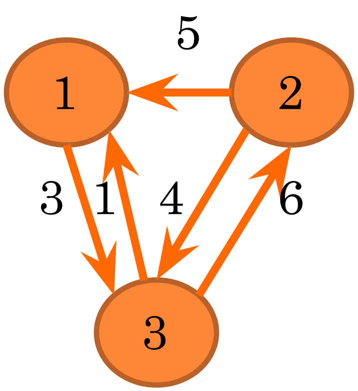
$$\begin{cases} \sum\limits_{a_k \in A(G')} s(a_k) \to \max; \\ \forall (i,j) \in U \setminus U': \sum\limits_{a_k \in A(i,j)} s(a_k) \le r(i,j); \\ \forall a_k \in A(G'): s(a_k) \ge 0, \end{cases}$$

- Контуры на графе:
- $a_1 = \{1,3,1\}$;
- $a_2 = \{2,3,2\}$;
- $a_3 = \{1,3,2,1\}$.

- где a_k - k – й контур множества A(G');
- *r(i,j)* – пропускная способность дуги *(i,j)*;
- $s(a_k)$- циркуляция в контуре ;a_k
- *A(i,j)* – множество контуров, проходящих через дугу *(i,j)*.

ПОИСК МАКСИМАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ОРГРАФЕ G(X,U)

- Исходный граф G(X,U):



Формальная постановка задачи:

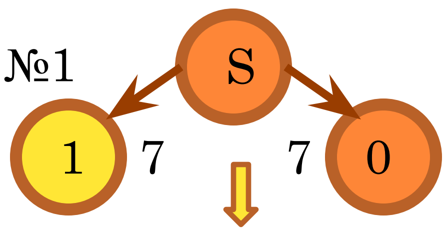
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max; \\ x_1 + x_3 \le 3; \\ x_2 + x_3 \le 6; \\ 0 \le x_1 \le 1; \\ 0 \le x_2 \le 4; \\ 0 \le x_3 \le 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Контуры на графе G(X,U):
$A_1 = \{1,3,1\}$;
$A_2 = \{2,3,2\}$;
$A_3 = \{1,3,2,1\}$.

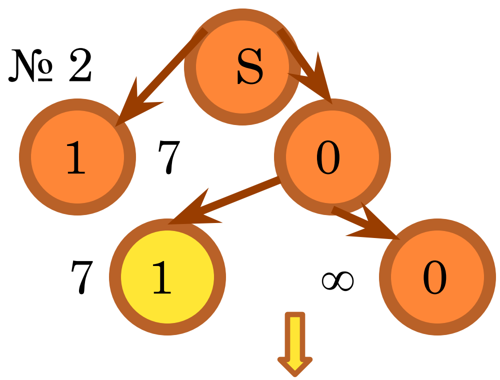
Решение системы (1) симплекс методом:

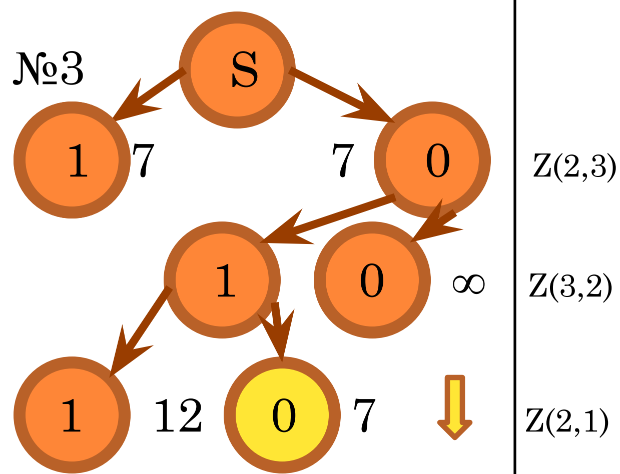
$$x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 2; S_{\max} = 7.$$

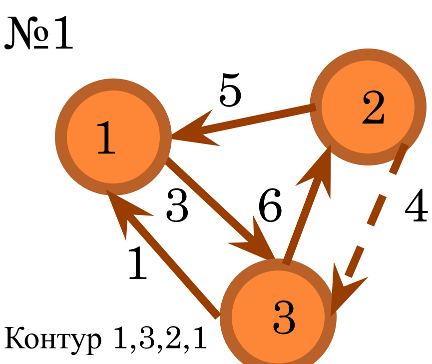
ПРИМЕР № 2: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – НАЧАЛО ПОСТРОЕНИЯ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ ЦИРКУЛЯЦИЙ НА ГРАФЕ ПРИМЕРА 1.



Оценка равна суммарному весу дуг, введенных в базис плюс максимальная циркуляция на G(X,U\I)

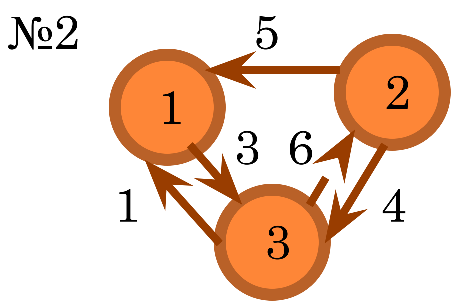






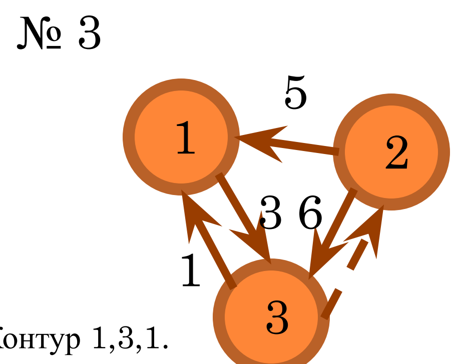
Контур 1,3,2,1

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(2,3)) равна 3, оценка равна Δ = 3+4=7.



Контур 1,3,1.

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(3,2)) равна 1, оценка равна Δ = 1+6=7.

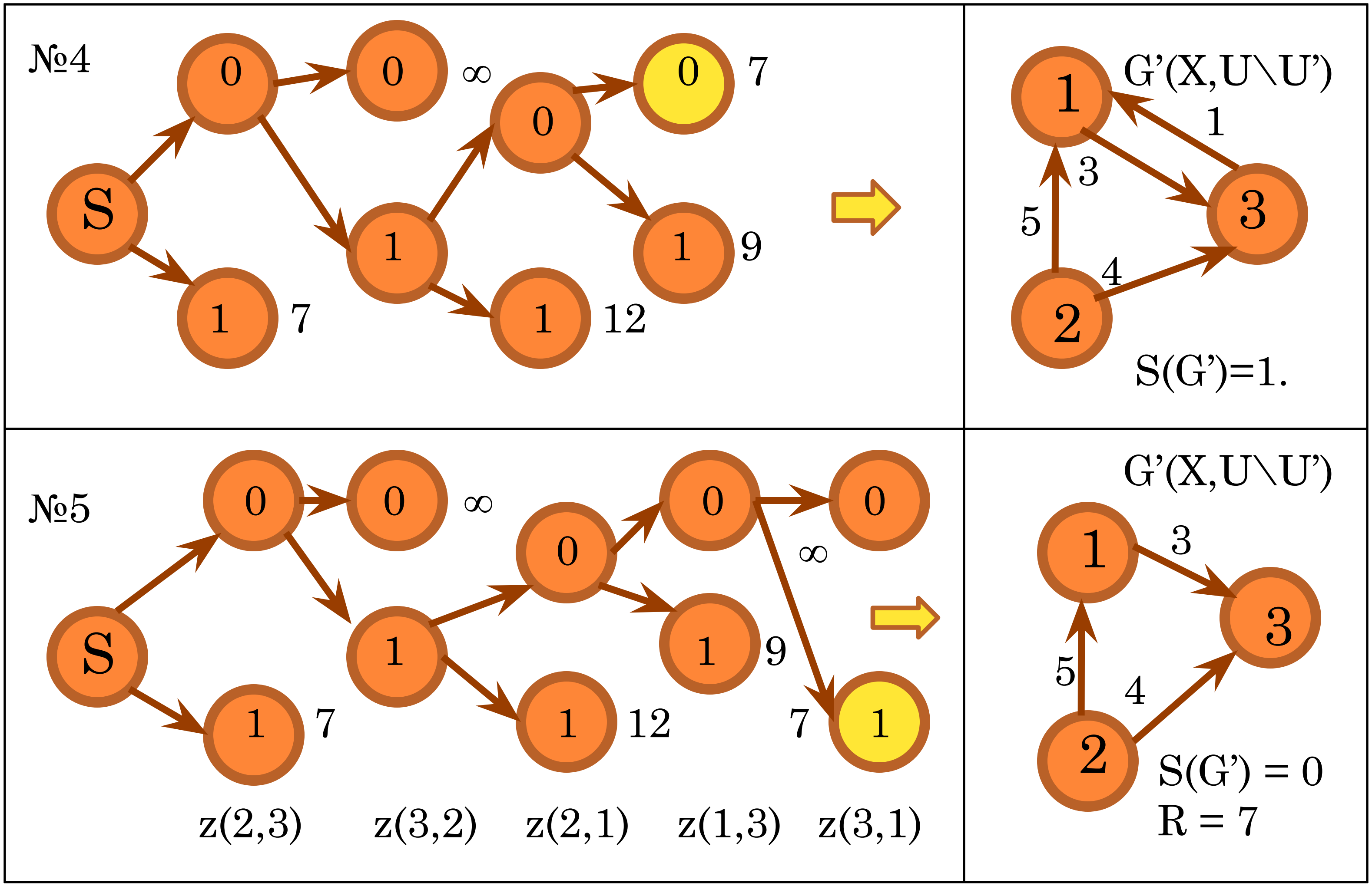


Контур 1,3,1.

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(3,2)) равна 1, оценка равна Δ = 1+6=7.

.

ПРИМЕР № 2: ЗАВЕРШЕНИЕ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ ЦИРКУЛЯЦИЙ НА ГРАФЕ ПРИМЕРА 1.



ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 2 (ВЫЧИСЛЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ОЦЕНОК)

- Число вычисленных оценок: 10.
- Число итераций: 5.
- Число операций сравнения: 5.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА

- Достоинства:

  - гарантия глобально оптимального решения;

  - первый же выбранный полный план отвечает минимальному разрезу.

- Недостатки:

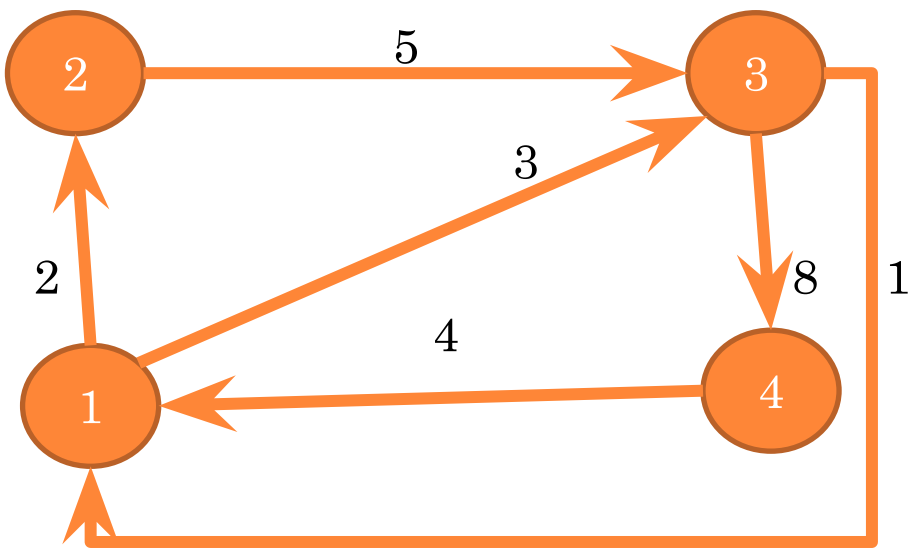
  - высокие требования к памяти используемого компьютера;

  - большие затраты времени на сравнение оценок.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь: а) методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений;

б) задачей о максимальной циркуляции для вычисления оценок.



САМОСТОЯТЕЛЬНО 2

- Найти минимальный разрез на орграфе, приведенном в списке персональных заданий, пользуясь:
- Методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений;
- Циркуляциями на этом графе для уточнения оценок.
- Сравнить число вершин полученного дерева ветвлений.

ЧАСТЬ 3

МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЕ ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ ДВИЖЕНИЕМ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СТРАТЕГИИ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА ДЕРЕВЕ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ

1. **В памяти компьютера постоянно присутствуют две величины: одна оценка Δ выбранного направления движения и текущее значение рекорда R.**
2. **Если Δ меньше R, то осуществляется спуск по дереву ветвлений (расширение базиса), в противном случае – подъем (последняя введенная в базис переменная покидает его).**
3. **Поиск завершается, когда алгоритм возвращается в стартовую вершину.**

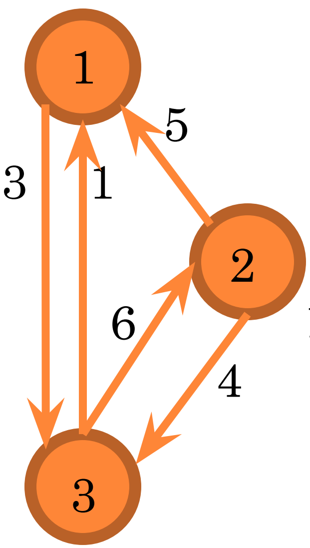
АЛГОРИТМ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ МЕТОДОМ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЙ ДВИЖЕНИЕ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ – ШАГИ 1 – 7.

- **Шаг 1.** R = +∞
- **Шаг 2.** Каждой дуге $(p,q) \in U$ графа G(X,U) присваивается уникальный индекс i (0<i<|U|+1) и переменная z_i .
- **Шаг 3.** i = 1
- **Шаг 4.** $z_i = 1$
- **Шаг5.** Одним из рассмотренных в части 1 методов вычисляется оценка Δ.
- **Шаг 6.** Если Δ < R, то перейти к **шагу 7**, нет – к **шагу 10**
- **Шаг 7.** Если все ограничения удовлетворяют, то
- перейти к **шагу 8**, нет **к шагу 10**.

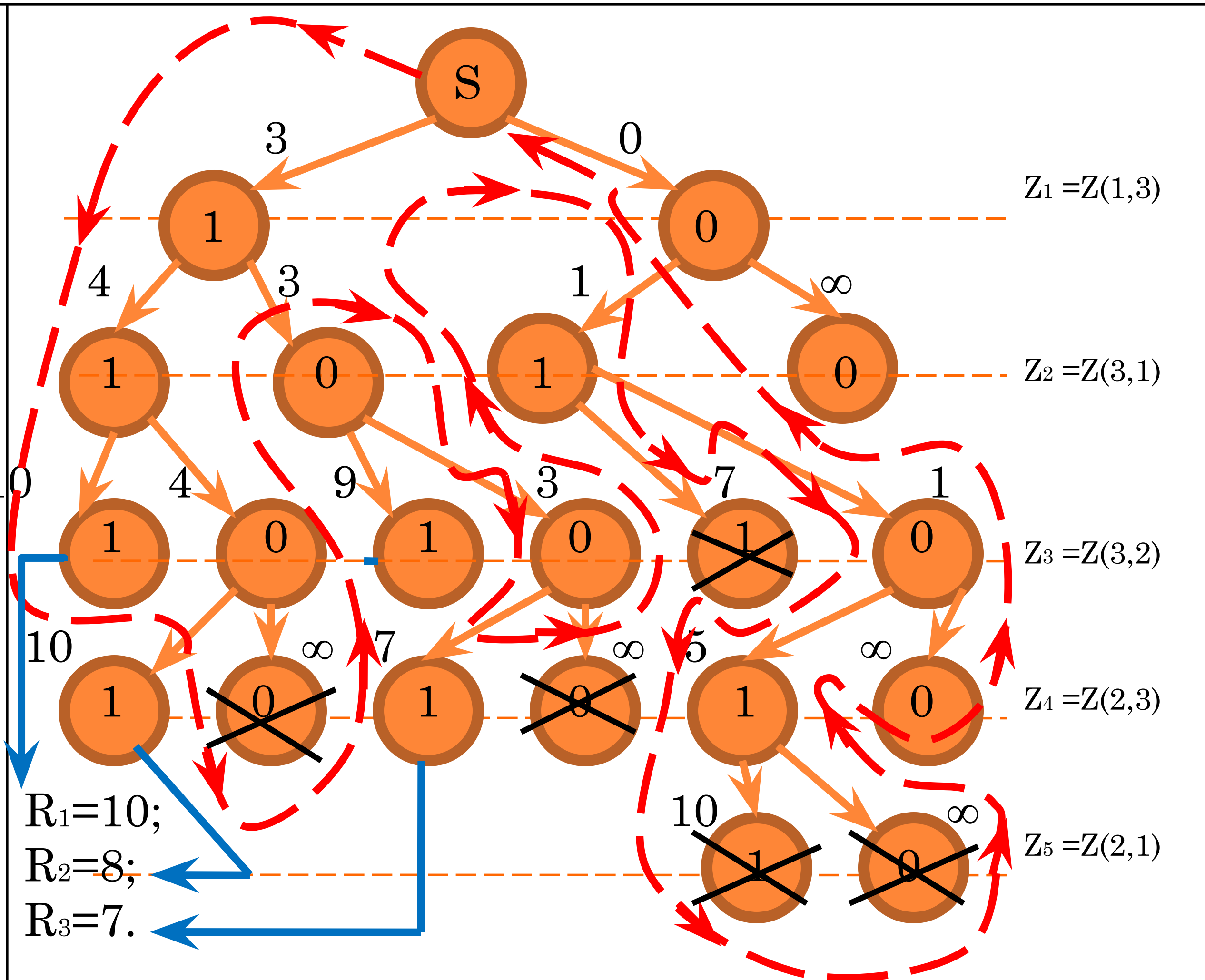
ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ МЕТОДОМ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИМ ДВИЖЕНИЕ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ – ШАГИ 8 – 15.

- **Шаг 8.** Если i = n, то перейти к **шагу 9**, нет – к **шагу 14**
- **Шаг 9.** R = F, печать R и вектора
- **Шаг 10.** Если z_i = 1, то перейти к **шагу 11,** нет – к **шагу 13.**
- **Шаг 11.** z_i = 0, перейти к **шагу 5.**
- **Шаг 12.** Если i = 1, то перейти к **шагу 15,** нет к **шагу 13.**
- **Шаг 13.** i = i - 1, перейти к **шагу 10.**
- **Шаг 14.** i = i + 1, перейти к **шагу 4.**
- **Шаг 15.** Конец алгоритма. Последние выданные на печать значения R и вектор переменных, оптимальны.

ПРИМЕР 3: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ «ГРУБЫХ» МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК



$$\Delta(U') = \sum_{(i,j)\in U'} r(i,j)$$

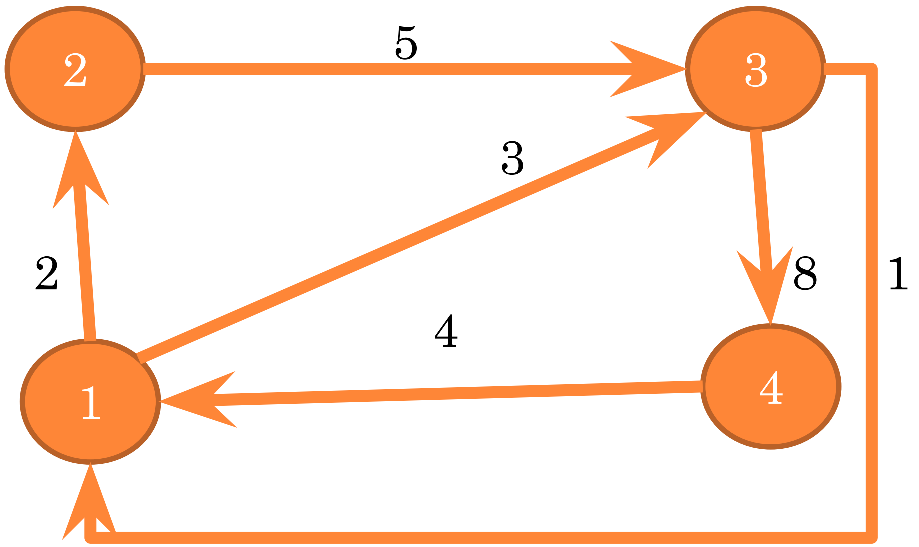


ИТОГИ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 3

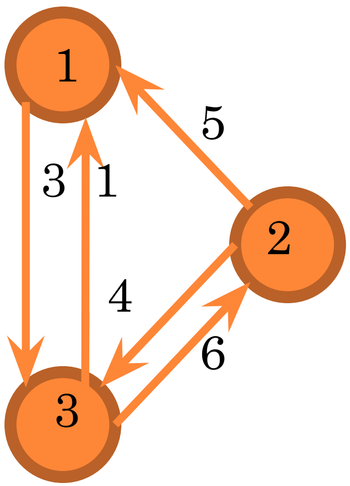
- Число вычисленных оценок – 20
- Число итераций – 20
- Число операций сравнения - 20

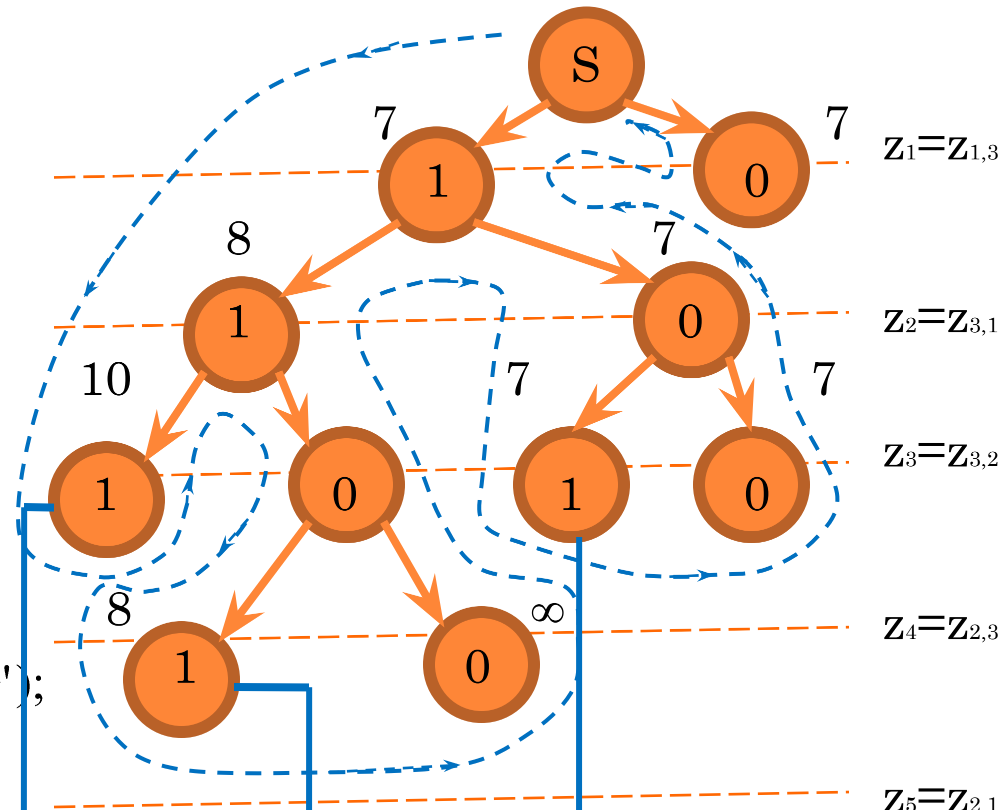
САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим поиск с возвратом по дереву ветвлений с «наивным» методом вычисления оценки.



ПРИМЕР 4: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНКИ





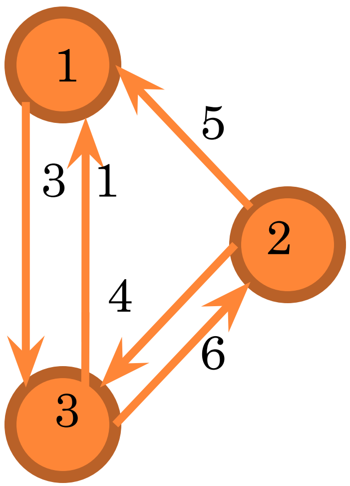
$$\begin{cases} \Delta(U') = \sum\limits_{(i,j)\in U'} r(i,j) + S(G'); \\ G' = G(X, U \setminus U') \end{cases}$$

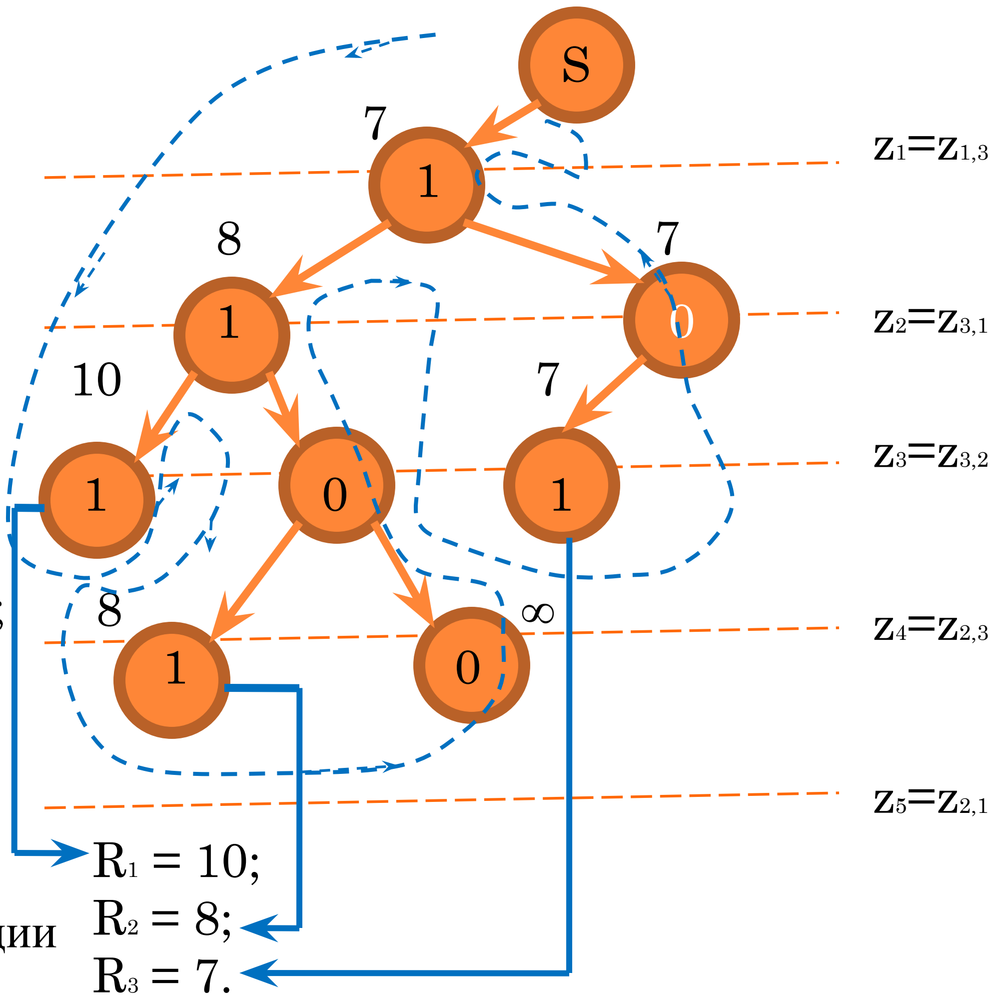
$R_1 = 10;$
$R_2 = 8;$
$R_3 = 7.$

ИТОГИ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 4

- Число вычисленных оценок – 10
- Число итераций – 10
- Число операций сравнения - 10

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНКИ И ЗАВЕРШЕНИЯ ПОИСКА





$$\begin{cases} \Delta(U') = \sum\limits_{(i,j)\in U'} r(i,j) + S(G'); \\ G' = G(X, U \setminus U') \end{cases}$$

Поиск прекращается
т.к. разрез равен
максимальной циркуляции

ИТОГИ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 4

- Число вычисленных оценок – 8
- Число итераций – 8
- Число операций сравнения - 5

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ СТРАТЕГИИ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Достоинства:

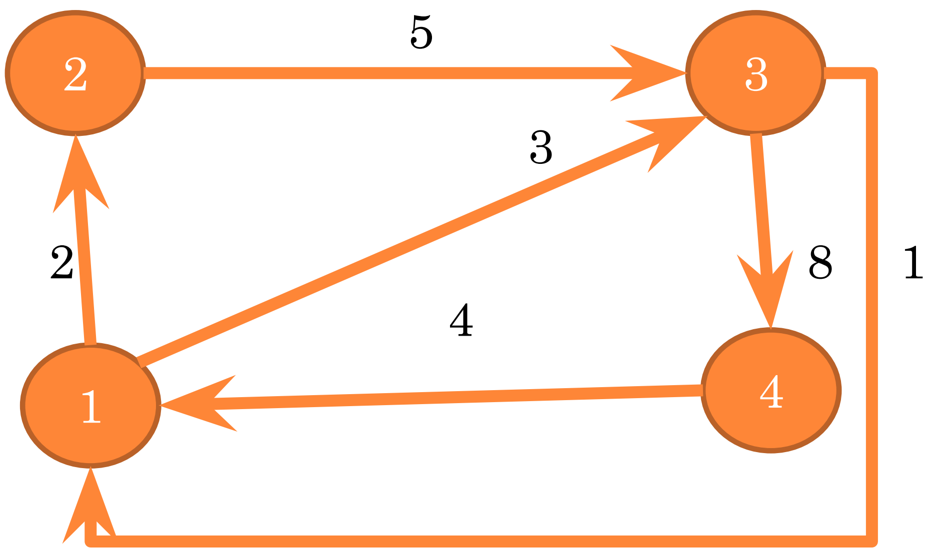
- гарантия глобально оптимального решения;
- возможность прервать поиск и получить локально оптимальное решение;
- Низкие требования к памяти компьютера;
- Одна операция сравнения на каждой итерации.

Недостатки:

- Даже после определения оптимального подмножества дуг, удаление которых разрывает все контуры графа, алгоритм продолжает поиск, чтобы убедиться в том, что полученное решение является глобально оптимальным.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим поиск с возвратом по дереву ветвлений с уточнением оценки с помощью циркуляций:



САМОСТОЯТЕЛЬНО 2

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь матрицей персональных заданий и методом типа ветвей и границ, осуществляющим поиск с возвратом по дереву ветвлений с уточнением оценки с помощью циркуляций.