Лекція 10. Елементи теорії поля

1. Заряди і поля.
2. Силове поле.
3. Властивості векторних полів. Дивергенція. Теорема Остроградського-Гауса.
4. Циркуляція. Ротор. Теорема Стокса.
5. Диференціальний оператор.
6. Циркуляція вектора напруженості. Потік вектора напруженості. Рівняння Пуасона.

Заряди і поля

У Всесвіті на всіх масштабах від елементарних частинок до Метагалактики взаємодія між структурними елементами Всесвіту відбувається через силові поля. У кожного силового поля є своє джерело, яке ми будемо називати зарядом. Електростатичне поле породжується електричними зарядами, гравітаційне – масами.

Оскільки поле зумовлює наявність сили, воно має векторну природу. Тому поле зручно зображати за допомогою силових ліній – векторів, які беруть початок чи закінчуються на зарядах. Домовились вважати, що силова лінія направлена від позитивного і до негативного електричного заряду. При цьому однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні притягуються.

Закон збереження зарядів – в ізольованій системі сума електричних зарядів залишається незмінною.

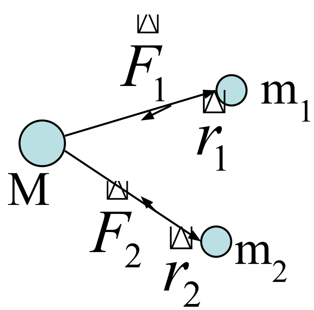
Всесвіт в середньому електронейтральний.

Що стосується гравітаційного поля, то воно відповідає лише притяганню, оскільки ми маємо справу лише з масами одного знаку.

Силове поле

- **Силове поле** – це простір, в кожній точці якого на вміщену туди частинку (пробне тіло) діє сила. Силове поле створює інша частинка, яка є джерелом поля.
- <u>**Вектор поля**</u> – сила, що діє на тіло в даній точці поля:

$$f_m = \gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad f_q = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$



Напруженість – сила, що діє на тіло одиничної величини:

$$E_m = \frac{f_m}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad E_q = \frac{f_q}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

Силове поле

- **<u>Потенціальна енергія</u>** – можливість виконувати роботу при переміщенні частинки з однієї точки поля консерва-тивних сил в іншу.

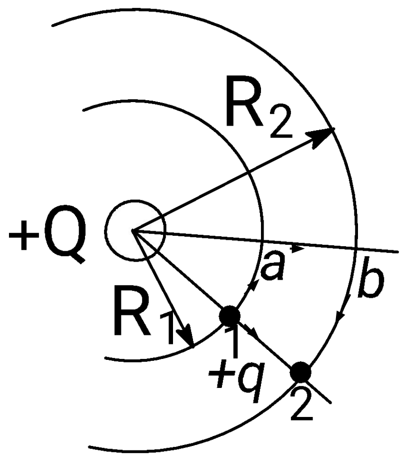
$$dU = -\left(\vec{F} d\vec{\ell}\right) = -F_{\ell} d\ell$$

$$A_{12} = \int_{1}^{2} F_{\ell} d\ell = U_1 - U_2$$

Отже, робота йде на зміну потенціальної енергії в полі консервативних сил (гравітаційному чи електростатичному)

Силове поле

- **<u>Робота</u>** з переміщення заряду q в полі заряду Q по траєкторії 1-*a*-*b*-2 дорівнює роботі по траєкторії 1-2.



$$A_{1ab2} = A_{1a} + A_{ab} + A_{b2} = A_{ab} = A_{12} =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qqdr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Звідси випливає, що робота в полі консер-вативних сил по замкнутій траєкторії =0.

Силове поле

- **<u>Потенціал</u>** – це потенціальна енергія одиничного пробного тіла. Тоді різниця потенціалів – це робота з переміщення одиничного пробного тіла

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_{12} = \int_1^2 E_{\square} d\square$$

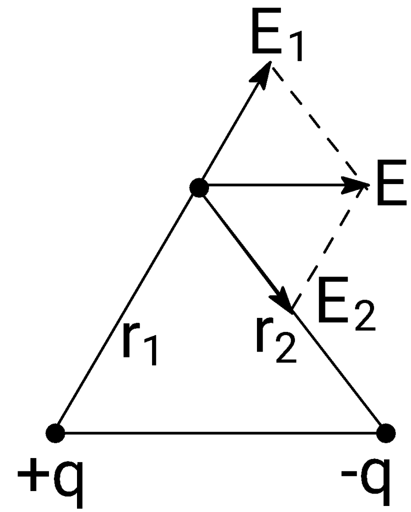
Взявши початок в ∞, знаходимо

$$\varphi(r) = A_{\infty,r} = \int_\infty^r E_{\square} d\square$$

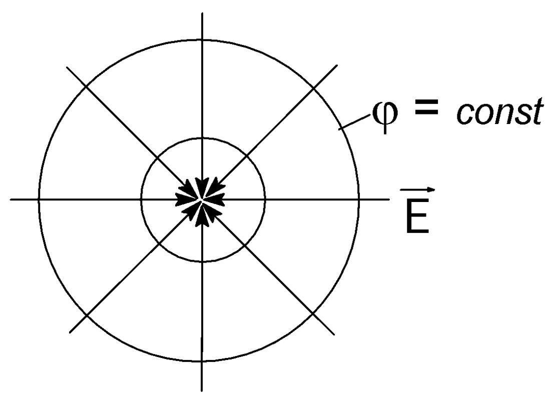
$$\varphi_q(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \quad \varphi_m(r) = -\frac{\gamma M}{r}$$

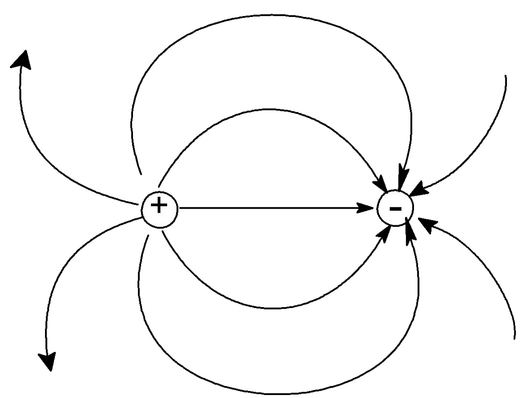
Силове поле

- Принцип суперпозиції сил



Графічне зображення силового поля





Властивості векторних полів. Дивергенція. Теорема Остроградського-Гауса.

Потік вектора через деяку поверхню і циркуляція вектора по заданому контуру дозволяють судити про характер векторного поля. Зменшуючи розміри поверхні чи контуру в точку, можна знайти характеристики векторного поля в даній точці.

Розглянемо потік рідини через певний об'єм рідини. Довкола точки Р беремо поверхню S. Якщо в об'ємі рідина не виникає і не зникає, то потік дорівнює нулю. Нерівність нулю свідчить про наявність в об'ємі джерел чи стоків. Тоді величина потоку дорівнює алгебраїчній сумі джерел та стоків. Відношення потоку рідини до об'єму, з якого вона витікає, тобто Φ_p / V, називають питомою потужністю джерел в об'ємі. При $V \to 0$ (до точки Р) отримаємо справжню питому потужність, яку назвемо <u>дивергенцією</u> (розходженням) вектора $\vec{v}$ ($div\,\vec{v}$).

Дивергенція

- Отже, за визначенням

$$div\vec{\upsilon} = \lim_{V \to P} \frac{\Phi_p}{V}.$$

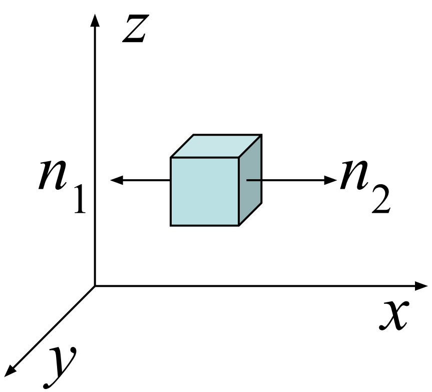
- Аналогічно для довільного вектора $\vec{A}$

$$div\vec{A} = \lim_{V \to P} \frac{\Phi_A}{V} = \lim_{V \to P} \frac{1}{V} \oint_S A_n dS.$$

- Ця величина не може залежати від форми поверхні, оскільки здійснюється перехід $V \to$P.
- З визначення випливає, що $div\vec{A}$ - скалярна величина.
- Знайдемо вираз для $div\vec{A}$

Дивергенція

- Розглянемо в точці $P(x,y,z)$ малий об'єм у формі паралелепіпеда $dxdydz$. Потік через цю поверхню складається з потоку через кожну з шести граней. Знайдемо потік через пару граней $\perp x$.



Зовнішня нормаль до поверхні $\|x$.
$A_{n2} = A_{x2}$, $A_{n1} = -A_{x1}$. Потік через грань 2 $A_{n2}dydz$, а через грань 1 - $A_{n1}dydz$.
Сумарний потік $(A_{x2} - A_{x1})dydz$
Величина $(A_{x2} - A_{x1})$ – це приріст при зміщенні на dx. Отже

$$A_{x2} - A_{x1} = \frac{\partial A_x}{\partial x}dx, \quad \textit{сумарний потік}\ \frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial A_x}{\partial x}dV.$$

Дивергенція. Теорема Остроградського-Гауса

- Аналогічно отримаємо $\frac{\partial A_y}{\partial y} dV \;\; i \;\; \frac{\partial A_z}{\partial z} dV.$
- Отже, потік
$$d\Phi_A = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$
- Нарешті
$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$
- Знаючи $div\vec{A}$, можна знайти потік через довільну поверхню: $\int div\vec{A} dV = \oint_S A_n dS$ – теорема Остроградського-Гауса.

Михайло Васильович Остроградський (24.09.1801, Полтавська губ. – 01.01.1862)

- Український математик і механік, лідер математиків Російської імперії. Закінчив Харківський університет. Продовжив освіту в Сорбонні (Париж). Основні роботи Остроградського відносяться до прикладних аспектів математичного аналізу, механіки, теорії пружності та магнетизму, теорії ймовірностей. В фізиці надзвичайно корисна формула Остроградського для перетворення об'ємного інтегралу в поверхневий.

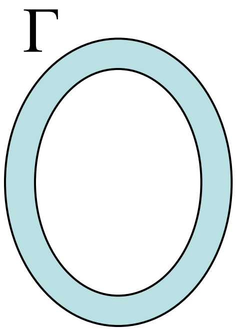
Карл Фрі́дріх Га́ус

(*Johann Carl Friedrich Gauß,* 30.04.1777 – 23.02.1855)

- Видатний німецький математик, астроном і фізик. Вільно володів багатьма мовами. Навчався в Геттингенському університеті. Має величезну кількість відкриттів в області математики, фізики і астрономії. Він ввів неевклідову геометрію. Заклав основи математичної теорії електромагнетизму. Розробив метод найменших квадратів в статистиці. Більшість його наукових праць опублікована після смерті.

Циркуляція. Ротор. Теорема Стокса.

- Тепер розглянемо циркуляцію по контуру.



Якщо це рух рідини, то циркуляція рівна $\upsilon\ell$.
У швидкості є лише тангенціальна складова υ_ℓ.
З нею пов'язаний імпульс $dp_\ell = \rho S \upsilon_\ell d\ell$.

Отже $$\rho S\upsilon\ell = \oint_\Gamma \rho S \upsilon_\ell d\ell, \quad \textit{або} \;\; \Gamma = \upsilon\ell = \oint_\Gamma \upsilon_\ell d\ell.$$

Аналогічно циркуляція для довільного вектора $\vec{A}$.

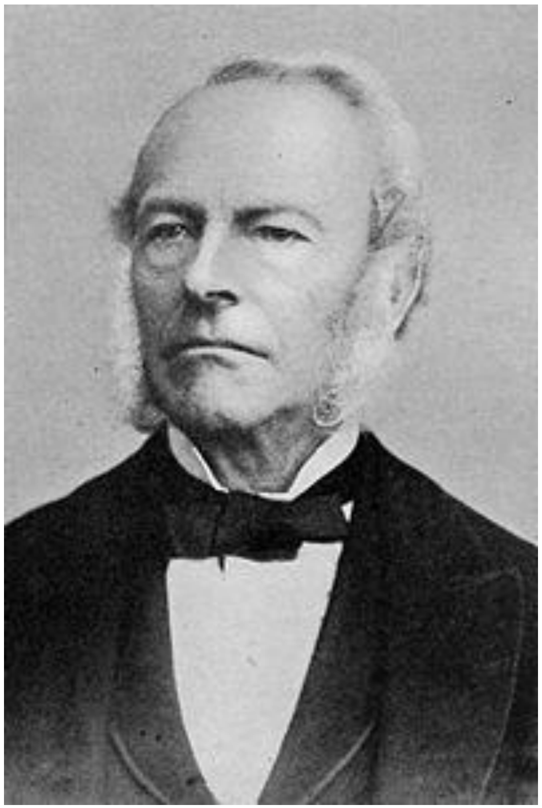
Циркуляція вектора $\vec{A}$ по контуру Γ

$$\Gamma = A_\ell \ell = \oint_\Gamma A_\ell d\ell.$$

Щоб отримати характеристику поля в точці P, потрібно стягнути розмір контуру в т. P.

Джордж Габріе́ль Стокс

(*George Gabriel Stokes*; 13.08.1819 – 01.02.1903)



- Англійський математик і фізик ірландського походження. Навчався в Кембриджському університеті. Там і працював. Вніс значний вклад в гідро- і газодинаміку, оптику і математику. В 1845 р. Стокс розробив теорію в'язкості рідин. В 1851 р. вивів формулу для опору руху кульки в рідині. В 1852 р. встановив, що смуга флуоресценції має довгохвильовий зсув стосовно смуги поглинання. В математиці він вивів формулу, яка носить його ім'я.

Циркуляція.

- Як характеристику поля в т. *P* беруть

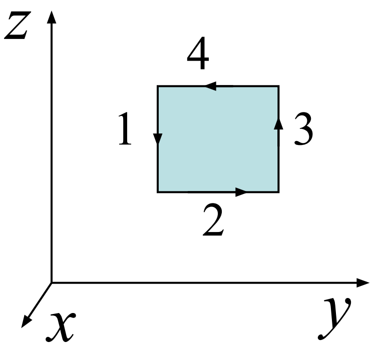
$$\lim_{S\to P}\frac{Цирк.\,A\,по\,\Gamma}{S}$$

- В залежності від напрямку обходу точки *P* величина буде мати різний знак. Позитивний напрямок відповідає правилу правого гвинта. Для певного напрямку така величина матиме максимальне значення. Цей напрям дає напрям вектора, який будемо називати <u>ротором</u> (вихором) вектора А.

$$\lim_{S\to P}\frac{Цирк.\,\vec{A}\,по\,\Gamma}{S}=\left(rot\vec{A}\right)_n -$$ проекція ротора на нормаль до площі S.

Ротор

- Знайдемо вираз для $rot\vec{A}$.



Визначимо проекцію $rot\vec{A}$ для площадки $dydz$, $n||x$. На ділянці 1 $-A_{z1}$, далі A_{y2}, A_{z3}, $-A_{y4}$. В результаті циркуляція

$$(A_{z3} - A_{z1})dz - (A_{y4} - A_{y2})dy.$$

Враховуючи, що

$$A_{z3} - A_{z1} = \frac{\partial A_z}{\partial y}dy, \quad A_{y4} - A_{y2} = \frac{\partial A_y}{\partial z}dz,$$

знаходимо циркуляцію A

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dydz = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dS$$

Ротор

- Отже $$\left(rot\vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

- Аналогічно $$\left(rot\vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\left(rot\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Ці вирази можна отримати один з одного шляхом циклічної перестановки індексів ($z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$).

Теорема Стокса

- Разом:

$$rot\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

- Знаючи ротор в кожній точці поверхні S, можна знайти циркуляцію вектора по контуру, який обмежує S.

$$\int_S \left(rot\vec{A}\right)_n dS = \oint_\Gamma A_l\, dl - \textit{теорема Стокса.}$$

Диференціальний оператор

- Записи векторного аналізу спрощуються, якщо ввести диференціальний оператор

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Тоді, діючи вектором на скаляр, отримаємо вектор

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = grad\varphi = -\vec{E}$$

Скалярний добуток:

$$\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\vec{A}$$

Диференціальний оператор

- Векторний добуток

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Оператор діє на функцію, яка стоїть справа від нього.

$$div\, grad\varphi = \left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi\right) = \left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\varphi = \left(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2\right)\varphi =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi, \quad \Delta - \textit{оператор Лапласа}$$

Диференціальний оператор

- $$rot\,grad\varphi = [\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi] = [\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\varphi = 0$$ паралельні вектори, тому векторний добуток дорівнює нулю.
- Електростатичне поле $E = -\nabla\varphi$, $rotE = [\nabla\nabla]\varphi=0$.
- $$div\,rot\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}] = 0,$$ - об'єм паралелепіпеда =0, якщо 2 вектори збігаються. Оскільки div=0, поле ротора не має джерел, лінії поля замкнуті. Подібні властивості має магнітне поле. Це дозволяє зобразити магнітне поле $B = rotA$. A – вектор-потенціал.

$$rot\,rot\vec{A} = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - (\nabla\nabla)A = grad\,divA - \Delta A$$

Циркуляція вектора напружености. Потік вектора напружености. Рівняння Пуасона.

- В потенціальному полі

$$A_0 = \oint \vec{E} d\vec{\ell} = \oint E_\ell d\ell = 0$$

- Тут $d\ell$ направлене по дотичній до контуру. Такий інтеграл називають циркуляцією вектора напружености E вздовж замкнутого контуру.
- Згідно з теоремою Стокса

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = \oint_S rot\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- Оскільки поверхня dS довільна, то $rotE = 0$ – вихор в потенціальному полі відсутній.

Потік вектора напруженості

- Потік вектора *E*:

$$dN_E = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha = E_n dS$$

$$N_E = \int dN_E = \int\limits_S E_n dS \;\Rightarrow\; N_E^0 = \oint\limits_S E_n dS$$

- Візьмемо замкнуту поверхню у вигляді сфери. Тоді

$$E_k = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \quad N_E^0 = \int E_n dS = E_n S = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

- Якщо зарядів багато

$$N_E^0 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Потік вектора напруженості

- Введемо вектор електричної індукції $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$
- В такому разі

$$N_D^0 = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i$$

- Для гравітаційного поля

$$N_m^0 = \oint_S E_n dS = \frac{\gamma M}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma M = 4\pi\gamma \sum_i m_i$$

- Згідно з теоремою Гауса

$$\oint_S E_n dS = \int_V divE \cdot dV$$

Потік вектора напруженості

- Густина заряду

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sum q_i = \int \rho_q dV$$

- В такому разі

$$\int divEdV = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int \rho_q dV \quad \Rightarrow \quad divE = \frac{\rho_q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

- Аналогічно

$$div\vec{D} = \rho_q, \quad div\vec{E}_m = 4\pi\gamma\rho_m$$

Потік вектора напруженості

- Поле рівномірно зарядженої сфери.

Всередині сфери (r < R)

$$N_E^0 = \frac{\sum q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0$$

оскільки там зарядів немає.

Поза сферою:

$$N_E^0 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2, \ \ тому \ \ E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

як для точкового заряду.

Рівняння Пуасона

- Рівняння дозволяє знайти потенціал, коли відомий розподіл заряду в просторі.

$$\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) = div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -grad\varphi$$

$$div\vec{E} = -div\,grad\varphi = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho_q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Дія оператора ∇

- <u>Підсумки</u>:
- Дія векторного оператора $\vec{\nabla}$ на скалярну функцію перетворює її на векторну функцію, тобто перетворює скаляр у вектор.
- Векторна дія $\vec{\nabla}$ на векторну величину приводить до утворення нового вектора ($rot\vec{E}$).
- Скалярна дія $\vec{\nabla}$ на векторну величину приводить до утворення скаляра ($div\vec{E}$).
- При дії оператора Лапласа Δ на скалярну величину утворюється новий скаляр (Δφ).