

Дифференциальное исчисление

Определение производной.

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X . Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

- **Определение. Производной функции**

$y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

- $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

- Производная обозначается ...

- Нахождение производной называется дифференцированием этой функции

Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.

- Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.*

- Производные:

1. Постоянной величины
2. Аргумента;
3. Суммы;
4. Произведения;
5. Частного;
6. Сложной функции
7. Таблица производных.
8. Производные высших порядков.

Основные теоремы дифференциального исчисления

- Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.

$$f'(x_0) = 0.$$

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b) ;

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка

$\xi \in (a, b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке,

- $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Правило Лопитала

- **Теорема.** *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных {конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.*

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ TO

•

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Возрастание и убывание функций

- Теорема (достаточное условие возрастания функции). *Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X , то функция возрастает на этом промежутке.*

- **Теорема (достаточное условие убывания функции).** *Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X , то она убывает на этом промежутке.*

Экстремум функции

- **Определение 1.** Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$
- **Определение 2.** Точка x_1 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_1)$

Необходимое условие экстремума.

- Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0 , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.

Первое достаточное условие экстремума.

- Теорема. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 1°. Найти производную $y'=f'(x)$.
- 2°. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x)=0$ или не существует.
- 3°. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.
- 4°. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Второе достаточное условие экстремума.

- **Теорема.** *Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 , а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f(x)$;*
если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 - точка максимума.

Выпуклость функции. Точки перегиба

- Функция $y=f(x)$ называется выпуклой вниз на промежутке X , если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

- Функция $y=f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке X , если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

- Теорема. Функция выпукла вниз(вверх) на промежутке X тогда и только тогда, если ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).
- Теорема. Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X , то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

- Определение. Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.
- Теорема. Необходимое условие перегиба. Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю.
- Теорема. Достаточное условие перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через некоторую точку X_0 меняет свой знак, то X_0 точка перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба.

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак $f''(x)$ слева и справа от найденных точек.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

Асимптоты графика функции

- Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется такая прямая, расстояние от точки $(X, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

- При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:
- 1°. Найти область определения функции.
- 2°. Исследовать функцию на четность - нечетность.
- 3°. Найти вертикальные асимптоты.
- 4°. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

- 5°. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
- 6°. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
- 7°. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Понятие дифференциала функции

- **Определение.** *Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной*

$$dy = f'(x) \Delta x.$$