Геометрические основы компьютерной графики

Лекция 3

Система координат (СК)

- Для перехода от зрительных геометрических образов к математическому описанию формы объектов и их взаимного расположения необходимо выполнить *арифметизацию пространства*
- Это достигается путем введением *системы координат*

Системы координат

- Введение системы координат сводится к установлению способа сопоставления каждой точке пространства набора вещественных чисел – *координат* этой точки
- Точка пространства Набор вещественных чисел (координат точки)

Размерность пространства

- Число координат в таком наборе определяется *размерность* пространства
- Обычно рассматривают двумерные (2D) пространства на различных поверхностях и трехмерное (3D) пространство

Геометрия на плоскости

- В 2D-пространствах графическими элементами являются точки и линии, в 3D-пространствах к ним добавляются поверхности
- Простейшей формой поверхности является плоскость. Для описания геометрических объектов на плоскости используют *декартову* и *полярную* системы координат

Декартовы и полярные координаты

- Координаты (x,y) и (r,ϕ) в этих системах связаны соотношениями:

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Точки и линии на плоскости

- Введем обозначение для точки на плоскости:

$$p = (x, y) \equiv (r,\phi)$$

- Взаимосвязь между координатами точек линии может быть задана в виде
  - *неявного уравнения $f(p)=0$*
  - *параметрической функции $p(t)$*

Координатная и векторная формы

- Эти соотношения могут быть записаны в координатной или в векторной форме
- Векторная форма записи более компактна, а координатная более удобна для проведения вычислений

Расстояние между точками

- Расстояние d между двумя точками $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ в декартовых координат выражается формулой:

$$d = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- В полярных координатах это расстояние определяется формулой:

$$d = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = \sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1 * r_2 * \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Способы описания линии

- Уравнение линии в неявной форме имеет вид:

$$f(x, y) = 0$$

- Параметрическая функция для линии:

$$p(t) = \left[x(t), y(t)\right]$$

Уравнение прямой

- Для прямой линии *неявное уравнение* имеет вид:

$$A * x + B * y + D = 0,$$

где коэффициенты A и B одновременно не равны 0

- Прямая может быть задана координата-ми одной из своих точек p_0 и *вектором нормали* $\vec{N} = [N_x, N_y]$

Уравнение прямой

- В этом случае неявное уравнение прямой записывается в *нормальной форме:*

$$N_x * (x - x_0) + N_y * (y - y_0) = 0.$$

- Для задания прямой вместо вектора нормали можно использовать вектор, направленный вдоль прямой - *направляющий вектор*

$$\vec{V} = [V_x, V_y]$$

Параметрическая функция прямой

- В этом случае для описания прямой удобно использовать *параметрическую функцию,* которая имеет вид:

$$x(t) = x_0 + V_x * t, \quad y(t) = y_0 + V_y * t.$$

- *Направляющий вектор* начинается в точке p_0 и направлен в сторону увеличения значений параметра t

Связь нормали и направляющего вектора

- Из условия ортогональности векторов N и V следует, что

$$N_x * V_x + N_y * V_y = 0.$$

- Компоненты нормали и направляющего вектора можно выразить через коэффициенты неявного уравнения прямой:

$$\vec{N} = [A, B] \qquad \vec{V} = [-B, A]$$

Отрезки и лучи

- Параметрическая функция удобна для построения частей прямой – отрезков и лучей
  - $(-\infty < t < \infty)$, протяженность прямой не ограничена;
  - $(t \geq 0)$, луч, выходящий из точки p_0 в направлении вектора V;
  - $(t_1 \leq t \leq t_2)$,, отрезок прямой между точками p_0+V*t_1 и p_0+V*t_2.

Линеаризация кривой

- Для произвольной линии на плоскости в любой регулярной (гладкой и некратной) точке

$$\vec{p}_0 = [x_0, y_0] = \vec{p}_0(t)$$

возможна *линеаризация*, т.е. построение *касательной прямой*

Уравнение касательной

- Уравнение касательной удобно записать в нормальной форме с компонентами вектора нормали вычисленными как частные производные от функции в левой части неявного уравнения:

$$N_x = \frac{df(x,y)}{dx}\Big|_{x_0,y_0}, \quad N_y = \frac{df(x,y)}{dy}\Big|_{x_0,y_0}$$

Неявное уравнение касательной

- Такое уравнение имеет вид:

$$\frac{df(x,y)}{dx}\bigg|_{x_0,y_0} * (x - x_0) + \frac{df(x,y)}{dy}\bigg|_{x_0,y_0} * (y - y_0) = 0$$

- Вектор нормали ортогонален касательной и направлен в ту сторону, где f(x,y)>0

Параметрическая функция касательной

- Для линии, заданной параметрически, можно построить параметрическую функцию касательной с компонентами направляющего вектора:

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t_0}, \quad V_y = \frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t_0}.$$

Способы описания кривых

- Выбор между описанием линии с помощью уравнения или с помощью параметрических функций определяется характером решаемой задачи
- При построении линий удобно использовать их параметрическое представление, либо, явную форму уравнения $y = f(x)$

Способы описания кривых

- Анализ свойств кривых и вычисление координат точек их пересечения удобно проводить с использованием явных и неявных уравнений
- В целом же параметрическое описание является более универсальным и для большого класса кривых оно является единственно возможным

Параметрические кривые

- Такие кривые называются *параметрическими*
- Примеры параметрических кривых:
  - фигуры Лиссажу

    $x = \cos(w_x * t + w_{x0})$, $y = \sin(w_y * t + w_{y0})$;
  - спираль Архимеда

    $x = (r_0 + r_1 * t) * \cos(w_x * t + w_{x0})$,

    $y = (r_0 + r_1 * t) * \sin(w_y * t + w_{y0})$;

Параметрические кривые

- спираль Бернулли

  $x = r_0*\exp(r_1*t) * \cos(w_x*t+w_{x0})$,

  $y = r_0*\exp(r_1*t) * \sin(w_y*t+w_{y0})$;

- параболическая спираль

  $x = (r_0+r_1*\mathrm{sqrt}(t)) * \cos(w_x*t+w_{x0})$,

  $y = (r_0+r_1*\mathrm{sqrt}(t)) * \sin(w_y*t+w_{y0})$;

Параметрические кривые

- циклоида

$x = r_0*\exp(r_1*t) * \cos(w_x*t+w_{x0}),$

$y = r_0*\exp(r_1*t) * \sin(w_y*t+w_{y0});$

- улитка Паскаля

$x=(r_0*\cos(t)+r_1) * \cos(w_x*t+w_{x0}),$

$y=(r_0*\cos(t)+r_1) * \sin(w_y*t+w_{y0});$

Параметрические кривые

- трисектрисса

  $x = (r_0 * \cos(t) - r_1 / \cos(t)) * \cos(w_x * t + w_{x0})$,

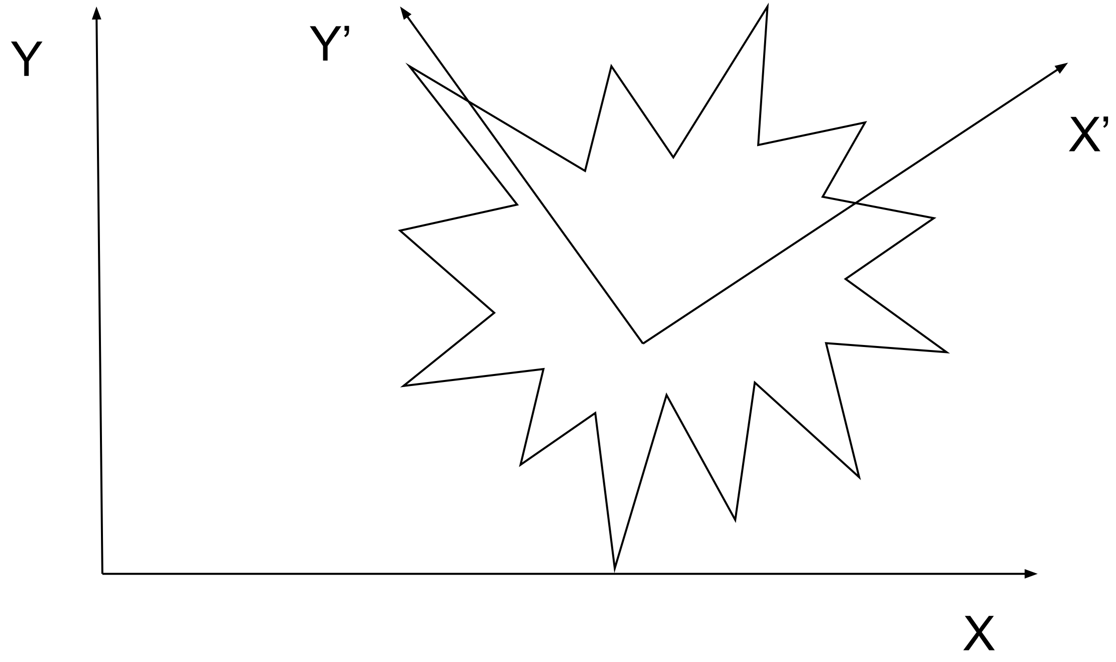
  $y = (r_0 * \cos(t) - r_1 / \cos(t)) * \sin(w_y * t + w_{y0})$;

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

СК в компьютерной графике

- В компьютерной графике используются три системы координат:
- неподвижная *мировая система координат* (**МСК**);
- подвижная *объектная система координат* (**ОСК**), связанная с объектом;
- *экранная система координат* (**ЭСК**).

МСК и ОСК в 2D-пространстве



Сцена

- *Сценой* называется система объектов, изображение которой должно быть воспроизведено средствами компьютерной графики
- Сцена является ограниченной областью пространства

Координаты точки в МСК и ОСК

- Пусть некоторой точке P сцены в МСК соответствуют координаты (x,y), а в ОСК – координаты (x',y')
- Если угол поворота ОСК относительно МСК равен φ, а начало ОСК расположено в точке (x_0,y_0), то

$$x' = (x - x_0) * \cos(\varphi) + (y - y_0) * \sin(\varphi),$$

$$y' = -(x - x_0) * \sin(\varphi) + (y - y_0) * \cos(\varphi)$$

Обратное преобразование

- Обратное преобразование имеет вид:

$$x = x' * \cos(\varphi) - y' * \sin(\varphi) + x_0 ,$$
$$y = x' * \sin(\varphi) + y' * \cos(\varphi) + y_0$$

- В общем случае, переход от МСК к ОСК включает в себя два действия – поворот на угол ϕ и сдвиг в направлении вектора (x_0,y_0).

Интерпретация преобразований

- Эти преобразования можно интерпретировать двояко:
  - как изменение координат некоторой фиксированной точки сцены при изменении системы координат;
  - как изменение точки сцены, находящейся в данной точке пространства, при использовании фиксированной системы координат

Интерпретация преобразований

- В первом случае говорят об изменении координат данной точки сцены
- Во втором случае – о перемещении объекта, приводящем к появлению в данной точке пространства другой его точки

Аффинное преобразование

- В любом случае это отображение является линейным и может быть обобщено следующим образом:

$$x = \alpha * \overline{x} + \beta * \overline{y} + \lambda,$$
$$y = \gamma * \overline{x} + \delta * \overline{y} + \mu$$

Условие обратимости

- Для обеспечения обратимости аффинного преобразования его коэффициенты должны быть связаны соотношением:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

Базовые преобразования

- **<u>Теорема</u>**. Любое аффинное преобразование можно представить как суперпозицию поворота, растяжения, отражения и переноса
- Перечисленные преобразования являются *базовыми* и могут быть представлены соответствующими матрицами

Преобразование поворота

- Имеет вид

$$x = \overline{x} * \cos(\varphi) - \overline{y} * \sin(\varphi),$$

$$y = \overline{x} * \sin(\varphi) + \overline{y} * \cos(\varphi)$$

- Задается матрицей

$$R = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

Преобразование растяжения

- Имеет вид

$$x = \alpha * \overline{x},$$

$$y = \delta * \overline{y}$$

- Задается матрицей

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{vmatrix}$$

Преобразование отражения

- Имеет вид (относительно оси абсцисс)

$$x = \bar{x},$$

$$y = -\bar{y}$$

- Задается матрицей

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Преобразование переноса

- Имеет вид

$$x = \overline{x} + \lambda,$$

$$y = \overline{y} + \mu$$

- Задается вектором

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

Общее преобразование

- Произвольное аффинное преобразование можно представить в виде:

$$p = \overline{p} * M + T,$$

где p = [x, y] – векторное представление точки

Однородные координаты

- Данное преобразование является *неоднородным*, т.к. преобразование переноса выполняется аддитивно
- Для обеспечения его однородности вводят *однородные координаты* точки

Однородные координаты

- Однородными координатами точки p = [x, y] называется такая тройка чисел x_1, x_2, x_3, что

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

и $x_3 \neq 0$

Однородные координаты

- Обычно полагают $x_3 = 1$, и тогда в однородных координатах вектор точки имеет вид:

$$p = [x, y, 1]$$

Матрицы преобразований

$$R = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{vmatrix}$$

Конец лекции