Республиканская олимпиада по информатике 2010 года

Заключительный этап

Разбор задач

Авторы разбора: А.О. Сикорский,
С.И. Кашкевич

Конфетный розыгрыш

Тур 1, задача 1

Пытались решить:	**119**
Решили полностью:	**116**
Среднее количество набранных баллов:	**99.1**

Конфетный розыгрыш

Бочонок с минимальным числом непременно будет отброшен всеми детьми, которые его вытянут, и, следовательно, останется в мешке. Следовательно, результатом решения задачи будет сумма всех $\mathbf{A}_i$, за исключением минимального.

Если совместить поиск минимального элемента и накопление суммы, то задачу можно решить за один просмотр массива **A**.

Трудоёмкость решения этой задачи – O(**N**).

Спартакиада

Тур 1, задача 2

Пытались решить:	**119**
Решили полностью:	**86**
Среднее количество набранных баллов:	**88**

Спартакиада

Задача сводится к расчёту величины

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_i * \mathbf{X} + \mathbf{B}_i * \mathbf{Y} + \mathbf{C}_i * \mathbf{Z}$$

для всех учеников школы и нахождению трёх учеников, для которых величина $\mathbf{T}_i$ максимальна.

Как и в предыдущей задаче, можно совместить поиск максимальных элементов и вычисление $\mathbf{T}_i$. Задачу также можно решить за один просмотр массивов **A, B, C**.

Трудоёмкость решения этой задачи – O(**N**).

Морковная засуха

Тур 1, задача 3

Пытались решить:	**112**
Решили полностью:	**19**
Среднее количество набранных баллов:	**58**

Морковная засуха

Добавим к числу орошаемых горизонтальных борозд 0-ю и N+1-ю борозду, соответствующую границам поля. Тогда поле разбивается на N+1 горизонтальную полосу, ограниченную орошаемыми бороздами. Аналогичные рассуждения выполним для вертикальных полос.

Обозначим соответственно через P_i и Q_i ширину вертикальной и горизонтальной полосы с номером i.

Полосы разбиваются на три группы:

1. $P_i \le 2*K_1$
2. $P_i > 2*(K_1 + K_2)$
3. $2*K_1 < P_i \le 2*(K_1 + K_2)$

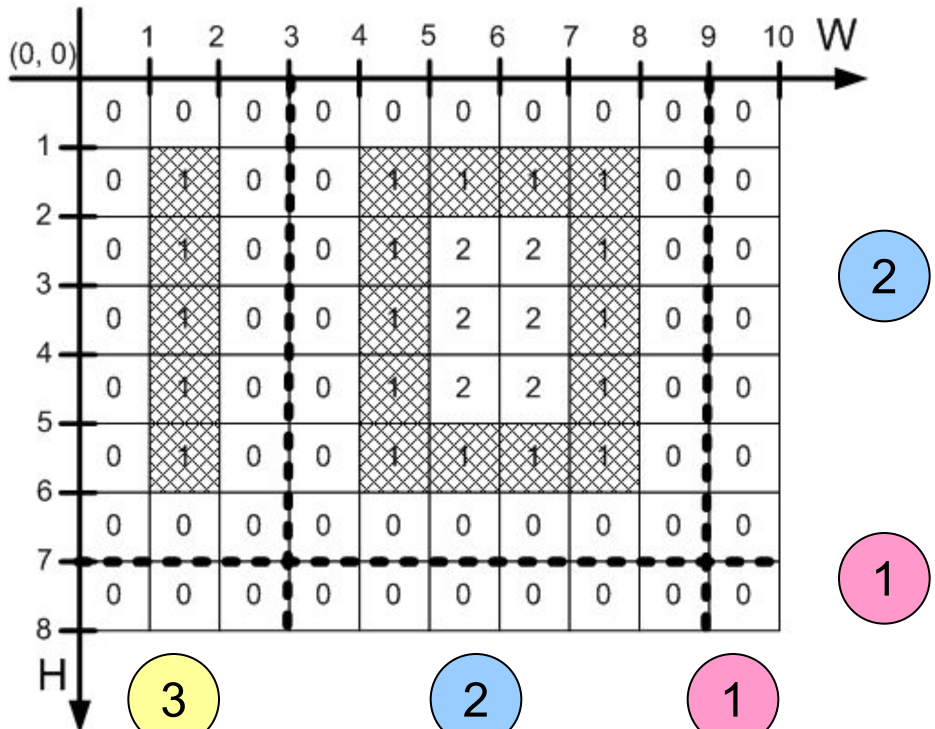
Морковная засуха

Для каждого участка, ограниченного орошаемыми бороздами, выполняем следующие рассуждения:

- Если хотя бы одна из полос, в которых лежит участок, относится к первому типу, безопасных гряд на этом участке нет.
- Иначе, если хотя бы одна из полос относится к третьему типу, то безопасные гряды образуют прямоугольник общей площадью $(P_i - 2*K_1) * (Q_j - 2*K_1)$
- Наконец, если обе полосы участка относятся к второму типу, безопасные гряды образуют «кольцо» площадью $(P_i - 2*K_1) * (Q_j - 2*K_1) - (P_i - 2*(K_1 + K_2)) * (Q_j - 2* (K_1 + K_2))$

Морковная засуха

Типы полос на рисунке из условия задачи:



Трудоёмкость решения этой задачи – O(M*N).

Морковная засуха

Существует и другое решение с трудоёмкостью O(M+N).

Вначале просматриваем горизонтальные полосы и рассчитываем числовые величины S_1, S_2 и S_3. Изначально они равны нулю.

В зависимости от типа полосы происходит увеличение этих величин:

Если полоса принадлежит к второму типу, то

$S_2 := S_2 + (Q_j - 2*K_1)$, $S_3 := S_3 + (Q_j - 2*(K_1 + K_2))$

Если полоса принадлежит к третьему типу, то

$S_1 := S_1 + (Q_j - 2*K_1)$

Морковная засуха

Затем просматриваем вертикальные полосы.

Если полоса принадлежит к второму типу, то количество безопасных гряд увеличивается на

$$(P_i - 2*K_1) *S_1 + (P_i - 2*(K_1+K_2)) * S_3$$

Если полоса принадлежит к третьему типу, то количество безопасных гряд увеличивается на

$$(P_i - 2*K_1) *(S_1+S_2)$$

Видео сервис

Тур 1, задача 4

Пытались решить:	**102**
Решили полностью:	**6**
Среднее количество набранных баллов:	**25**

Видео сервис

Будем считать Иваново кемпингом с номером 0, а Славино – кемпингом с номером N+1.

Введём функцию F(i, j) – искомая сумма коэффициентов при условии, что i сервисов расположены до кемпинга с номером j, а оставшиеся k-i сервисов – в кемпинге j (хоть это и запрещено условиями задачи).

Тогда решение нашей задачи – F(k, N+1). Для этой функции будем строить рекуррентное соотношение.

Видео сервис

Очевидно, F(0, 0) = 0.

Рекуррентное соотношение для F(i, j) имеет вид

$$F(i, j) = \max_{t=1,\dots j-1} (F(i-1, t) + (C_j - C_t) * (k - i + 1)) * (i-1)$$

при условии

$$A \le C_j - C_t \le B \qquad (*)$$

Решение про этой формуле имеет трудоёмкость $O(N^3)$ и набирает 60 баллов.

Видео сервис

Перепишем рекуррентное соотношение, вынося члены, не зависящие от t:

$$F(i, j) = \max_{t=1,\dots j-1} (F(i-1, t) - C_t * (k-i+1) * (i-1)) +$$

$$C_j * (k-i+1) * (i-1)$$

Рассчитываемые величины $F(i-1, t) - C_t * (k-i+1) * (i-1)$ помещаем в кучу, единую для всех j. При этом из кучи, возможно, придётся выбросить элементы, для которых условие (*) не выполняется.

Такое решение имеет трудоёмкость O(N*K*logN) и набирает 100 баллов.

Бактериальное родство

Тур 2, задача 1

Пытались решить:	**119**
Решили полностью:	**116**
Среднее количество набранных баллов:	**99.3**

Бактериальное родство

Задача решается полным перебором. Просматриваем все модификации **A**$_x$ и **B**$_y$ для всех возможных **x** и **y** и рассчитываем степень родства для каждой пары.

Для упрощения расчётов можно продублировать каждую строку и для модификаций **A**$_x$ и **B**$_y$ сравнивать символы A[x+t] и B[y+t] для всех возможных t.

A	T	**G**	A	T	**A**	C	G	**C**	A	G	T	A	T	G	A	T	A	C	G	C	A	G	T
A	T	G	C	G	T	A	G	T	A	T	**A**	A	T	**G**	C	G	**T**	A	G	T	A	T	A

Стоп игра!

Тур 2, задача 2

Пытались решить:	**119**
Решили полностью:	**58**
Среднее количество набранных баллов:	**80.5**

Стоп игра!

Задача сводится к нахождению числа из интервала [L, R], для которого первый делитель, отличный от единицы, максимален (точнее, самого такого делителя). При этом имеет смысл проходить от больших чисел к меньшим: если мы найдём простое число, то перебор прекращается.

Брокер

Тур 2, задача 3

Пытались решить:	**119**
Решили полностью:	**27**
Среднее количество набранных баллов:	**66.6**

Брокер

Простейшее решение этой задачи состоит в моделировании процесса продажи и покупки акций и может быть реализовано следующим фрагментом программы:

```
for i := 1 to K do
  if N>=i then {покупаем акцию}
    N := N-i
  else {продаём акцию}
    N := N+i;
```

Такое решение набирает 50 баллов.

Брокер

Для того, чтобы обнаружить закономерность и уменьшить количество итераций, рассмотрим поведение брокера при N=1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	–	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–
0	2	5	1	6	0	7	15	6	14	5	17	4	18	3	19

Когда количество денег уменьшается до нуля, брокер продаёт две акции подряд, иначе дни покупки и продажи чередуются.

Брокер

Если баланс достигает нуля в день T, далее следуют продажа и T+1 цикл продажи – покупки. Следующее обнуление баланса наступит в день 3*(T+1).

Таким образом, нам необходимо определить день R последнего обнуления баланса, а затем рассчитать окончательный баланс.

В случае, когда изначально брокер имеет достаточно денег для нескольких покупок, необходимо выполнить указанный ранее цикл до первого обнуления баланса.

Трудоёмкость этого решения – O(logN).

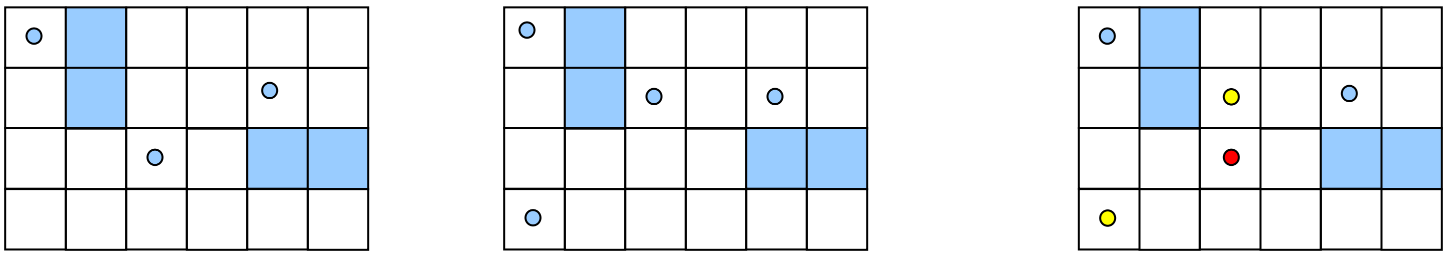
Шарики 2010

Тур 2, задача 4

Пытались решить:	**116**
Решили полностью:	**1**
Среднее количество набранных баллов:	**38.8**

Шарики 2010

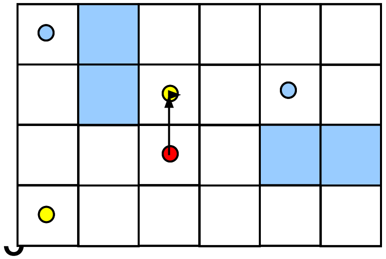
Сведём начальную и конечную позицию воедино, добавив обозначения «шарик исчез» и «шарик появился»:



Заметим, что если A + B ≤ C, то применять сдвиг нецелесообразно, достаточно выполнять лишь операции первого и второго типа (1 тест). Если отказаться от операции сдвига вообще, то можно получить 40 баллов.

Шарики 2010

Пусть K – целая часть от деления A + B на C. Тогда имеет смысл переместить шарик из красной в жёлтую позицию, если расстояние между ними не превосходит K и на этом пути нет запрещённых клеток.



Осталось найти пары клеток, для которых надо выполнить сдвиг. ☺️

Шарики 2010

Для решения этой задачи можно пойти несколькими путями, например:

Построить двудольный граф, вершины которого соответствуют красным и жёлтым клеткам. Рёбра графа связывают вершины разных цветов, расстояние между которыми не превышает K, а вес вершины равен минимальному расстоянию между клетками. В этом графе находим максимальное паросочетание минимального веса. Для K=4 и предыдущего примера имеем: