

Республиканская олимпиада по информатике 2010 года

Заключительный этап

Разбор задач

Авторы разбора: А.О. Сикорский,
С.И. Кашкевич

Конфетный розыгрыш

Тур 1, задача 1

Пытались решить:	119
Решили полностью:	116
Среднее количество набранных баллов:	99.1

Конфетный розыгрыш

Бочонок с минимальным числом непременно будет отброшен всеми детьми, которые его вытянут, и, следовательно, останется в мешке. Следовательно, результатом решения задачи будет сумма всех A_i , за исключением минимального.

Если совместить поиск минимального элемента и накопление суммы, то задачу можно решить за один просмотр массива A .

Трудоёмкость решения этой задачи – $O(N)$.

Спартакиада

Тур 1, задача 2

Пытались решить:	119
Решили полностью:	86
Среднее количество набранных баллов:	88

Спартакиада

Задача сводится к расчёту величины

$$T_i = A_i * X + B_i * Y + C_i * Z$$

для всех учеников школы и нахождению трёх учеников, для которых величина T_i максимальна.

Как и в предыдущей задаче, можно совместить поиск максимальных элементов и вычисление T_i . Задачу также можно решить за один просмотр массивов **A, B, C**.

Трудоёмкость решения этой задачи – $O(N)$.

Морковная засуха

Тур 1, задача 3

Пытались решить:	112
Решили полностью:	19
Среднее количество набранных баллов:	58

Морковная засуха

Добавим к числу орошаемых горизонтальных борозд 0-ю и $N+1$ -ю борозду, соответствующую границам поля. Тогда поле разбивается на $N+1$ горизонтальную полосу, ограниченную орошаемыми бороздами. Аналогичные рассуждения выполним для вертикальных полос.

Обозначим соответственно через P_i и Q_i ширину вертикальной и горизонтальной полосы с номером i .

Полосы разбиваются на три группы:

1. $P_i \leq 2 \cdot K_1$
2. $P_i > 2 \cdot (K_1 + K_2)$
3. $2 \cdot K_1 < P_i \leq 2 \cdot (K_1 + K_2)$

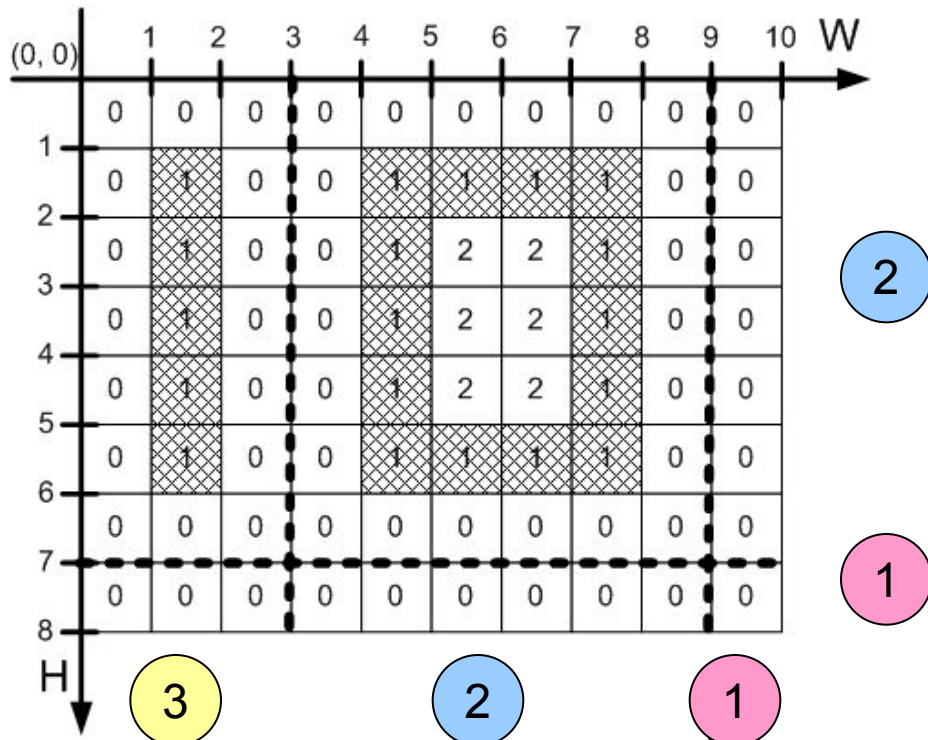
Морковная засуха

Для каждого участка, ограниченного орошаемыми бороздами, выполняем следующие рассуждения:

- Если хотя бы одна из полос, в которых лежит участок, относится к первому типу, безопасных гряд на этом участке нет.
- Иначе, если хотя бы одна из полос относится к третьему типу, то безопасные гряды образуют прямоугольник общей площадью $(P_i - 2 * K_1) * (Q_j - 2 * K_1)$
- Наконец, если обе полосы участка относятся к второму типу, безопасные гряды образуют «кольцо» площадью $(P_i - 2 * K_1) * (Q_j - 2 * K_1) - (P_i - 2 * (K_1 + K_2)) * (Q_j - 2 * (K_1 + K_2))$

Морковная засуха

Типы полос на рисунке из условия задачи:



Трудоёмкость решения этой задачи – $O(M*N)$.

Морковная засуха

Существует и другое решение с трудоёмкостью $O(M+N)$.

Вначале просматриваем горизонтальные полосы и рассчитываем числовые величины S_1 , S_2 и S_3 . Изначально они равны нулю.

В зависимости от типа полосы происходит увеличение этих величин:

Если полоса принадлежит к второму типу, то

$$S_2 := S_2 + (Q_j - 2 * K_1), S_3 := S_3 + (Q_j - 2 * (K_1 + K_2))$$

Если полоса принадлежит к третьему типу, то

$$S_1 := S_1 + (Q_j - 2 * K_1)$$

Морковная засуха

Затем просматриваем вертикальные полосы.

Если полоса принадлежит к второму типу, то количество безопасных гряд увеличивается на

$$(P_i - 2 * K_1) * S_1 + (P_i - 2 * (K_1 + K_2)) * S_3$$

Если полоса принадлежит к третьему типу, то количество безопасных гряд увеличивается на

$$(P_i - 2 * K_1) * (S_1 + S_2)$$

Видео сервис

Тур 1, задача 4

Пытались решить:	102
Решили полностью:	6
Среднее количество набранных баллов:	25

Видео сервис

Будем считать Иваново кемпингом с номером 0, а Славино – кемпингом с номером $N+1$.

Введём функцию $F(i, j)$ – искомая сумма коэффициентов при условии, что i сервисов расположены до кемпинга с номером j , а оставшиеся $k-i$ сервисов – в кемпинге j (хоть это и запрещено условиями задачи).

Тогда решение нашей задачи – $F(k, N+1)$. Для этой функции будем строить рекуррентное соотношение.

Видео сервис

Очевидно, $F(0, 0) = 0$.

Рекуррентное соотношение для $F(i, j)$ имеет вид

$$F(i, j) = \max_{t=1, \dots, j-1} (F(i-1, t) + (C_j - C_t) * (k - i + 1)) * (i - 1)$$

при условии

$$A \leq C_j - C_t \leq B \quad (*)$$

Решение про этой формуле имеет трудоёмкость $O(N^3)$ и набирает 60 баллов.

Видео сервис

Перепишем рекуррентное соотношение, вынося члены, не зависящие от t :

$$F(i, j) = \max_{t=1, \dots, j-1} (F(i-1, t) - C_t * (k - i + 1) * (i - 1)) + C_j * (k - i + 1) * (i - 1)$$

Рассчитываемые величины $F(i-1, t) - C_t * (k - i + 1) * (i - 1)$ помещаем в кучу, единую для всех j . При этом из кучи, возможно, придётся выбросить элементы, для которых условие (*) не выполняется.

Такое решение имеет трудоёмкость $O(N * K * \log N)$ и набирает 100 баллов.

Бактериальное родство

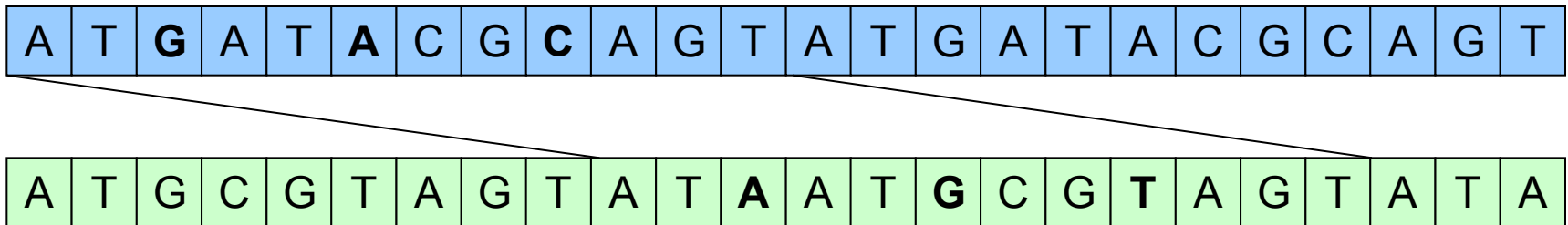
Тур 2, задача 1

Пытались решить:	119
Решили полностью:	116
Среднее количество набранных баллов:	99.3

Бактериальное родство

Задача решается полным перебором. Просматриваем все модификации A_x и B_y для всех возможных x и y и рассчитываем степень родства для каждой пары.

Для упрощения расчётов можно продублировать каждую строку и для модификаций A_x и B_y сравнивать символы $A[x+t]$ и $B[y+t]$ для всех возможных t .



Стоп игра!

Тур 2, задача 2

Пытались решить:	119
Решили полностью:	58
Среднее количество набранных баллов:	80.5

Стоп игра!

Задача сводится к нахождению числа из интервала $[L, R]$, для которого первый делитель, отличный от единицы, максимален (точнее, самого такого делителя). При этом имеет смысл проходить от больших чисел к меньшим: если мы найдём простое число, то перебор прекращается.

Брокер

Тур 2, задача 3

Пытались решить:	119
Решили полностью:	27
Среднее количество набранных баллов:	66.6

Брокер

Простейшее решение этой задачи состоит в моделировании процесса продажи и покупки акций и может быть реализовано следующим фрагментом программы:

```
for i := 1 to K do  
    if N >= i then {покупаем акцию}  
        N := N - i  
    else {продаём акцию}  
        N := N + i;
```

Такое решение набирает 50 баллов.

Брокер

Для того, чтобы обнаружить закономерность и уменьшить количество итераций, рассмотрим поведение брокера при $N=1$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-
0	2	5	1	6	0	7	15	6	14	5	17	4	18	3	19

Когда количество денег уменьшается до нуля, брокер продаёт две акции подряд, иначе дни покупки и продажи чередуются.

Брокер

Если баланс достигает нуля в день T , далее следуют продажа и $T+1$ цикл продажи – покупки. Следующее обнуление баланса наступит в день $3*(T+1)$.

Таким образом, нам необходимо определить день R последнего обнуления баланса, а затем рассчитать окончательный баланс.

В случае, когда изначально брокер имеет достаточно денег для нескольких покупок, необходимо выполнить указанный ранее цикл до первого обнуления баланса.

Трудоёмкость этого решения – $O(\log N)$.

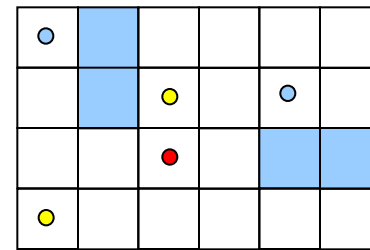
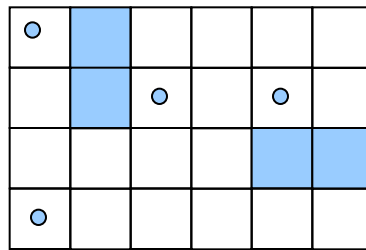
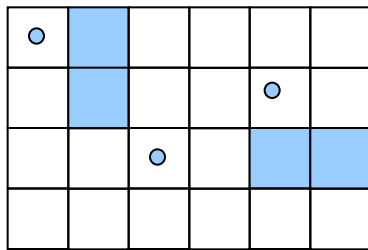
Шарики 2010

Тур 2, задача 4

Пытались решить:	116
Решили полностью:	1
Среднее количество набранных баллов:	38.8

Шарики 2010

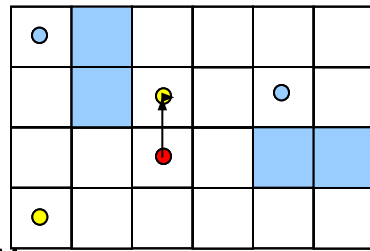
Сведём начальную и конечную позицию воедино, добавив обозначения «шарик исчез» и «шарик появился»:



Заметим, что если $A + B \leq C$, то применять сдвиг нецелесообразно, достаточно выполнять лишь операции первого и второго типа (1 тест). Если отказаться от операции сдвига вообще, то можно получить 40 баллов.

Шарики 2010

Пусть K – целая часть от деления $A + B$ на C . Тогда имеет смысл переместить шарик из красной в жёлтую позицию, если расстояние между ними не превосходит K и на этом пути нет запрещённых клеток.



Осталось найти пары клеток, для которых надо выполнить сдвиг. 😊

Шарики 2010

Для решения этой задачи можно пойти несколькими путями, например:

Построить двудольный граф, вершины которого соответствуют красным и жёлтым клеткам. Рёбра графа связывают вершины разных цветов, расстояние между которыми не превышает K , а вес вершины равен минимальному расстоянию между клетками. В этом графе находим максимальное паросочетание минимального веса. Для $K=4$ и предыдущего примера имеем:

