Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики

Основные вопросы:

- ***Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины.***
- ***Числовые характеристики дискретных случайных величин.***

Определение

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

- <u>Пример</u>

Случайными величинами являются: *температура больного в некоторое наугад выбранное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента.*

Определение

- ***Дискретной случайной величиной*** называется такая величина, которая в результате опыта может ***принимать определенные значения с определенной вероятностью***, образующие ***счетное множество*** (множество, элементы которого могут быть занумерованы).
- Это множество может быть как <u>***конечным***</u>, так и <u>***бесконечным***</u>.
- <u>Например</u>, число посетителей аптеки в течение дня, количество яблок на дереве.

Определение

- ***Непрерывной случайной величиной*** называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.
- Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины ***<u>бесконечно</u>***.
- **<u>Например</u>**: температура больного в фиксированное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины x_1, x_2, x_3,… и соответствующими им вероятностями p_1, p_2, p_3,… .

Закон распределения может быть задан ***аналитически****, в* ***виде таблицы*** *или* ***графически****.*

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется ***рядом распределения***.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместных событий.

Обозначим вероятности этих событий буквами *p* с соответствующими индексами:

$$P(X=x_1)=p_1; \quad P(X=x_2) = p_2; \quad \ldots; \quad P(X = x_n) = p_n.$$

Так как *несовместные* события образуют полную группу, то сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ряд распределения **случайной величины *X* имеет следующий вид**

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его **графическому изображению**: по *оси абсцисс* откладываются возможные значения случайной величины X, а по оси ординат — вероятности этих значений Р. Такая фигура называется ***многоугольником распределения (полигон частот)***.

Пример 2. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень. Найти ее закон распределения.

△ Случайная величина X может принимать следующие значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Для определения соответствующих вероятностей составим производящий многочлен:

$$(0{,}2 + 0{,}8x)^3 = 0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8x + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 x^2 + 0{,}8^3 x^3.$$

Известно, что коэффициент при x^k дает вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное k. Поэтому

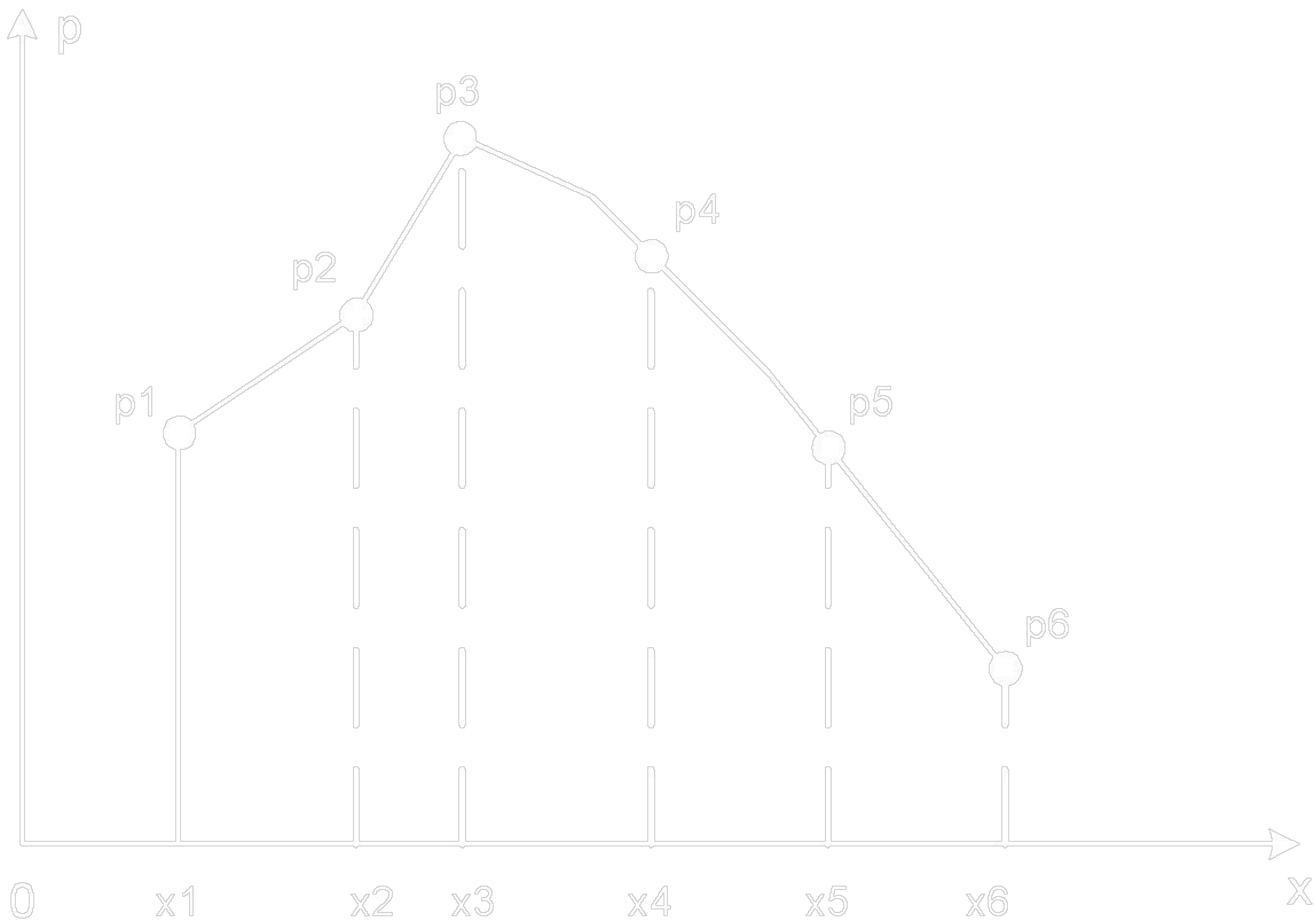
$$p_1 = 0{,}2^3 = 0{,}008,$$
$$p_2 = 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096,$$
$$p_3 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384,$$
$$p_4 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

. ▲

Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину; он является одной из форм закона распределения.



Пример. **По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.**

Решение:

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

Итак,

$$P_{5,5} = 0{,}01024, \quad P_{4,5} = 0{,}0768, \quad P_{3,5} = 0{,}2304$$

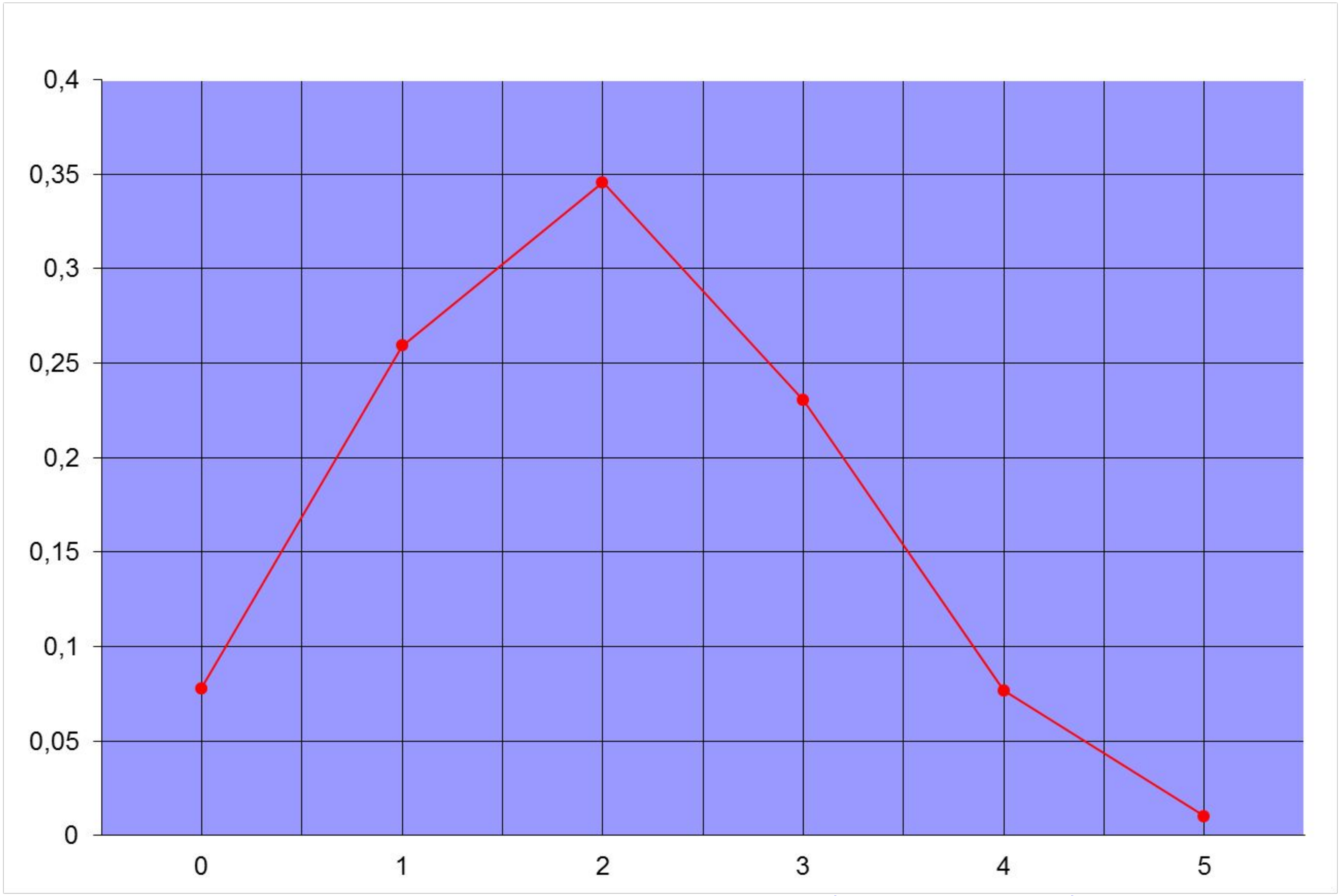
Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей.



При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности

Биноминальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле ***Бернулли***.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется ***биноминальным***.

<u>Пример.</u> В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

<u>Решение:</u>

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$$

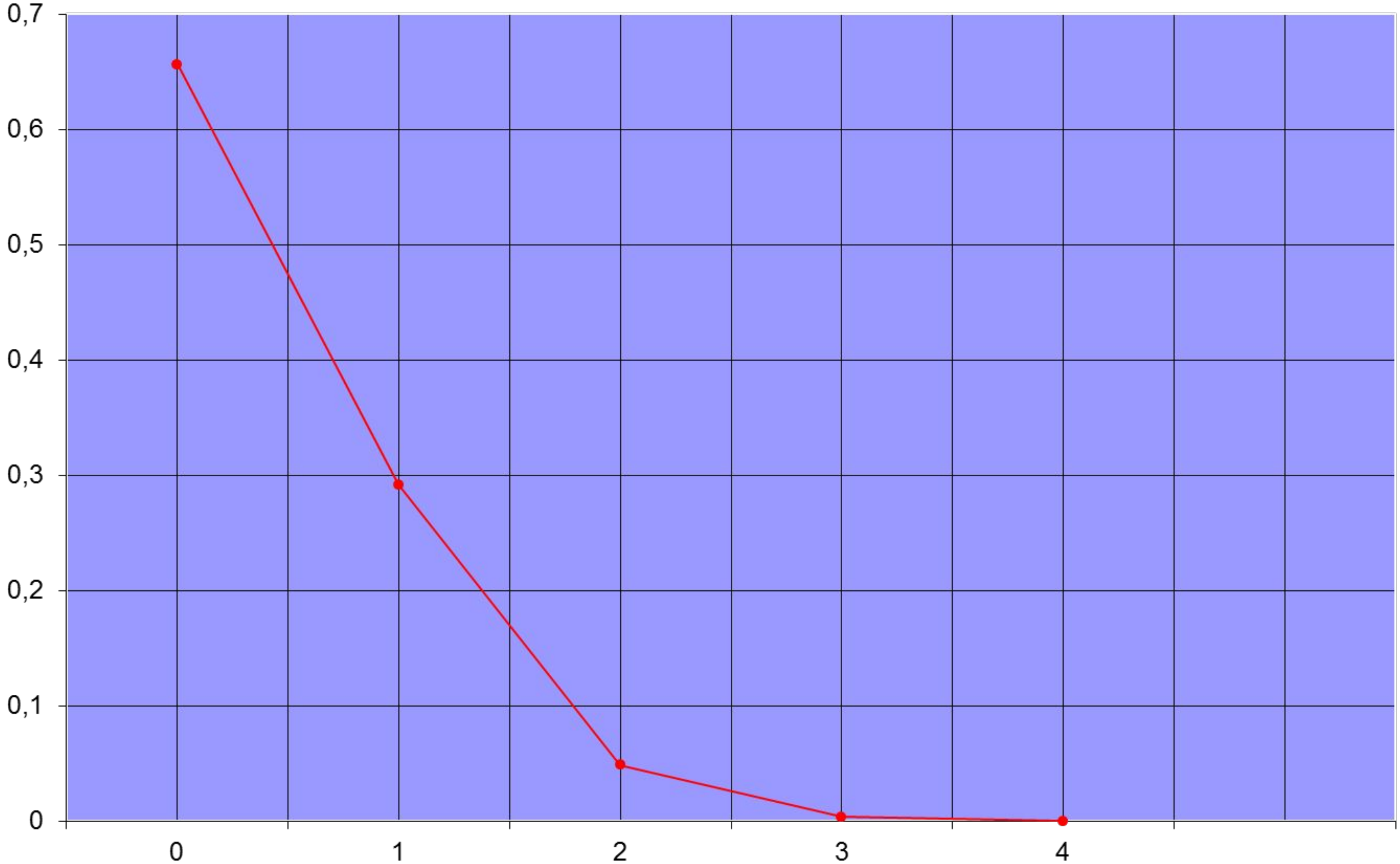
4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$$

Построим многоугольник распределения.


0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
1
2
3
4

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины называется ***сумма*** произведений всех возможных ***значений случайной величины*** на ***вероятности этих значений***.

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

, где

X – прерывная случайная величина,

M[X] – среднее значение случайной величины,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – возможные значения величины X,

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ – вероятности значений.

Пример 3. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Решение. По формуле (1) находим

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,3 = 1,25.$$

Пример В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

Ряд распределения с. в. X — суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

(Контроль: $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.) Находим MX:

$$MX = 500 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,69 = 8,65 \text{ руб.}$$

Свойства математического ожидания:

1. ***Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.***

$$M(C) = C$$

2. ***Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.***

$$M(Cx) = CM(x)$$

Свойства математического ожидания:

3. ***Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.***

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) + M(X) + M(Y)$$

Пусть производится ***n*** независимых испытаний, вероятность появления события ***A*** в которых равна ***p***.

Теорема. ***Математическое ожидание M(X) числа появления*** *события A в* ***n*** *независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Дисперсия

Дисперсией (рассеиванием) D(X) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

Пример. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала находим

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9,$$

а затем

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}1.$$

По формуле (3) имеем:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

Теорема

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии:

- ***Дисперсия постоянной величины равна нулю.***

$$D(C) = 0$$

- ***Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.***

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Свойства дисперсии:

- ***Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.***

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

- ***Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.***

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

Теорема

Дисперсия числа появления** события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна **произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины ***X*** называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Теорема

Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}$$

<u>Пример.</u> Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна $p = 0{,}96$.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$$

<u>Пример.</u> Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что M(X) = 0,9.

Т.к. случайная величина X распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

Домашнее задание:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятности, математической статистики и случайным процессам./Д. Письменный. – 3-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2008 г. – 288 с.

гл.2,§2.1 – 2.7

2. конспект лекции

СВР: Составить опорный конспект по теории

Задачи

Выучить все определения.

- **Задача 1.** Случайная величина принимает все четные значения от –2 до 6 с равными вероятностями. Постройте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.
- **Задача 2.** Пять человек выстраиваются в очередь случайным образом. Среди этих пятерых в очереди стоит Иван Иванович. Постройте распределение случайной величины «число людей в очереди, стоящих перед Иваном Ивановичем».
- **Задача 3.** В таблице дано распределение некоторой случайной величины *X*. Найдите пропущенную вероятность.

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,16	0,2	0,03	0,05	0,12	0,07	?	0,24