Теория вероятностей

Введение. Предмет теории вероятностей его основные задачи и области применения

Способность предвидеть возможные варианты будущего и выбирать между альтернативными решениями лежит в основе современных сообществ.

Деятельность в условиях риска заставляет нас принимать множество решений.

Мы вынуждены постоянно опираться на оценку вероятностей неполадок и ошибок.

Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучаются закономерности массовых, случайных явлений.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые, случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

Пример. Нельзя определить заранее результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз.

Одной из главных задач в теории вероятностей, является задача, определения количественной меры возможности появления события.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники:

- теории надежности;
- теории массового обслуживания;
- теоретической физике;
- астрономии;
- теории стрельбы;
- теории автоматического управления и др.

Теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и др.

Краткая историческая справка

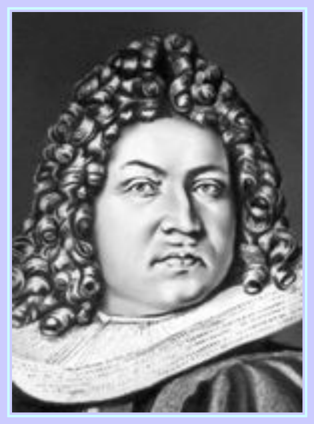
- Первые работы по теории вероятности, принадлежащие французским учёным Б. Паскалю, П. Ферма и голландскому учёному Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчётом различных вероятностей в азартных играх.
- Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (опубликован в 1713 г.)

Основатели теории вероятностей

Б. Паскаль

П.Ферма

Х. Гюйгенс



Якоб Бернулли

Семья Берну́лли (Bernoulli) — протестантская семья из Южных Нидерландов (нынешняя Бельгия), многие члены которой внесли существенный вклад в науку.

Купец Якоб Бернулли в 1567 году покинул Антверпен из-за религиозных притеснений испанских властей, переселившись во Франкфурт-на-Майне, а в начале XVII века его внук (также именовавшийся Якоб) обосновался в Базеле (Швейцария). Три поколения Бернулли дали 8 крупных математиков и физиков, из которых наиболее известны:
Бернулли, Якоб (1654—1708);
Бернулли, Иоганн (1667—1748), младший брат Якоба;
Бернулли, Даниил (1700—1782), сын Иоганна;
Бернулли, Якоб II (1759—1789), племянник Даниила.
Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

Биографические данные

Якоб Бернулли (Якоб I)

Дата рождения: 27 декабря 1654 года

Место рождения: Базель

Дата смерти:16 августа 1705 года

Место смерти:Базель

Гражданство:Швейцария

Научная сфера:Математик

Место работы:Базельский университет

Научный руководитель:Лейбниц

Якоб родился в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли. Вначале учился богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно. В 1677 году совершил поездку во Францию для изучения идей Декарта, затем в Нидерланды и Англию, где познакомился с Гуком и Бойлем.

Вернувшись в Базель, некоторое время работал частным учителем.

С 1687 года — профессор физики (позже — математики) в Базельском университете.

1684: штудирует первый мемуар Лейбница по анализу и становится восторженным адептом нового исчисления. Пишет письмо Лейбницу с просьбой разъяснить несколько тёмных мест. Ответ он получил только спустя три года (Лейбниц тогда был в командировке в Париже); за это время Якоб Бернулли самостоятельно освоил дифференциальное и интегральное исчисление, а заодно приобщил к нему брата Иоганна. По возвращении Лейбниц вступает в активную и взаимно-полезную переписку с обоими. Сложившийся триумвират — Лейбниц и братья Бернулли — 20 лет возглавлял европейских математиков и чрезвычайно обогатил новый анализ.

1699: оба брата Бернулли избраны иностранными членами Парижской Академии наук.

Якоб Бернулли внёс огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, и особенно логарифмическую спираль. Последнюю из перечисленных кривых Якоб завещал нарисовать на своей могиле; к сожалению, по невежеству там изобразили спираль Архимеда.

Согласно завещанию, вокруг спирали выгравирована надпись на латыни, «EADEM MUTATA RESURGO» («изменённая, я вновь воскресаю»), которая отражает свойство логарифмической спирали восстанавливать свою форму после различных преобразований.

Спираль Бернулли

- Следующий период истории развития (XVIII век) связан с именами А. Муавра (Англия), Д. Бернулли (Россия), Т. Байеса (Англия). Это период, когда теория вероятностей, уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании, экономике, технике (главным образом в теории ошибок наблюдений).
- Новый наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А. Маркова (1856-1922) и А. М. Ляпунова (1857-1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.

Строгое логическое обоснование теории вероятностей произошло в XX в. и связано с именами советских математиков С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова.

С. Н. Бернштейн

А. Н. Колмогоров

- Чебышев чрезвычайно просто доказал (1867) закон больших чисел при весьма общих предположениях. Он же впервые сформулировал (1887) центральную предельную теорему для сумм независимых случайных величин и указал один из методов её доказательства. Другим методом Ляпунов получил (1901) близкое к окончательному решение этого вопроса. Марков впервые рассмотрел (1907) один случай зависимых испытаний, который впоследствии получил название цепей Маркова

Тема. Элементы комбинаторики

План:

1. **Основные понятия комбинаторики.**
2. **Правила комбинаторики.**

Контрольные вопросы

- Что изучают в разделе комбинаторика?
- Какие виды соединений элементов вы знаете?
- Что называют размещениями. Сочетаниями, перестановками из n элементов по m в каждом?
- Запишите формулы для вычисления числа этих соединений.

Контрольные вопросы

- Какие виды событий вы знаете?
- Какое событие называют случайным, достоверным, невозможным?
- Какие события называют несовместными, противоположными?
- Что означает, что события образуют полную группу?
- Сформулируйте классическое определение вероятности события и свойства вероятности.

1. Основные понятия комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называют **соединениями**.

Различают три основных вида соединений:

-размещения;

-перестановки;

-сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются **комбинаторными**, а раздел математики занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ обозначают символом n!

(читают **«n-факториал»**), причем:

1!=1

0!=1

Размещения

Размещениями из n элементов по m в каждом называют такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом

$$A_n^m$$

Размещение - *Accommodation*

и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Перестановки

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом

$$P_n$$

Перестановки - Permutation

и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Пример.

Сколькими способами можно рассадить пять человек по пяти местам?

Пример.

Сколькими способами можно рассадить пять человек по пяти местам?

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний без повторений из n элементов по m в каждом обозначается символом

$$C_n^m$$

Сочетание - *Combinaison*

и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \frac{A_n^m}{P_m}$$

Пример.

Сколькими способами из 10 врачей можно создать бригады скорой помощи по 4 человека в каждой?

Пример.

Сколькими способами из 10 врачей можно создать бригады скорой помощи по 4 человек в каждой?

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6!}=210$$

Справедливы тождества:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = 1$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots C_n^n = 2^n$$

$$\sum_{m=0}^{n} \left(C_n^m\right)^2 = C_{2n}^n$$

Замечание.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам.

Схема выбора с возвращениями.

- Если при выборе m элементов из n – элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещение с повторениями.*

$$A_n^m = n^m$$

Пример :

В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырех человек. Сколько существует способов размещения, прибывших четырех гостей?

Решение :

Каждый следующий гость из 4 может быть помещен в любую из 10 комнат, поэтому общее число размещений по формуле размещений с повторениями, равно

$$\overline{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10000$$

- Если при выборе m элементов из n элементы возвращаются без последующего упорядочивания, то говорят, что это

сочетания с повторениями

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$$

Пример :

В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов

Решение :

Число возможных заказов по формуле

$$\overline{C}_{10+3-1}^{3} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$$

Схема упорядоченных разбиений

Пусть $к_1$, $к_2$,...,$к_r$ – целые числа, такие, что $к_1+к_2+...+к_r=n$, $к_i \geq 0$

Число способов, которыми генеральную совокупность из n элементов можно разделить на r упорядоченных частей, из которых первая содержит $к_1$ элементов, вторая- $к_2$ элементов и r-ая $к_r$ элементов вычисляется

$$P_n(k_1, k_2, \ldots k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

Пример.

Девять человек размещается в гостинице в четырехместный, трехместный и двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

$$P_9(4,3,2) = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

2. Правила комбинаторики

Правило суммы.

Если некоторый объект ***A*** может быть выбран из совокупности объектов ***m*** способами, а другой объект ***B*** может быть выбран ***n*** способами, то выбрать либо ***A***, либо ***B*** можно ***m+n*** способами.

Правило произведения.

Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов A *и* B в указанном порядке может быть выбрана $m\ n$ способами.

Пример.

В меню 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

Пример.

В меню 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

$$2\cdot 3\cdot 5=30$$

Тема: Случайные события

План:

1. Испытания и события.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Статистическое определение вероятности.

1. Испытания и события

Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит.

Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента**.

Событие рассматривают, как результат испытания (опыта).

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита

A, B, C и т.д.

Виды событий

- событие называется **случайным**, если в результате опыта оно может произойти, либо не произойти;
- событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного опыта;
- событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в данном опыте.

Пример.

Испытание - подбрасывание игральной кости.

События (исходы):

A – выпало четное число очков;

B – выпало 8 очков;

C – выпало менее 7 очков.

2. Виды случайных событий

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте (т.е. появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же опыте).

События называются **единственно возможными**, если в результате опыта появление одного из них, есть событие достоверное.

События называются **равновозможными**, если ни у одного из них нет преимущества для появления перед другими.

События образуют **полную группу событий**, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Пример.

В аптеку принимаются на реализацию лекарственные препараты от двух поставщиков.

События:

A- отсутствие поставок;

B- поступление товара от одного из поставщиков;

C - поступление товара от двух поставщиков;

образуют полную группу.

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из противоположных событий обозначить через $\boldsymbol{A}$, то другое обозначают

$$\overline{A}$$

Пример.

Брошена монета.

События:

A - «появился герб»;

$\overline{A}$ -«появилась надпись».

3. Классическое определение вероятности

Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры, возможности появления события.

Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность.

- **Вероятностью события** ***А*** - называется число, равное отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события А к общему числу возможных исходов.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

- где m-число исходов благоприятствующих наступлению события A;
- n – общее число возможных исходов.

Probabilitas(лат.)- вероятность

Свойства вероятности

- Вероятность достоверного события равна единице;
- Вероятность невозможного события равна нулю;
- Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

4. Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Относительная частота события *A* определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

где *m*-число появлений события, *n* – общее число испытаний.

Пример.

Среди 1000 новорожденных оказалось 517 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Событие *A* – рождение мальчика.

$$W(A) = \frac{517}{1000} = 0{,}517$$

Сопоставляя определение вероятности и относительной частоты, делаем вывод: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Статистической вероятностью события A - называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

5. Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события *A*, к мере всей области

Пример: Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная в квадрат со стороной 4 попадает в квадрат со стороной 3, находящийся внутри первого квадрата

Пример: Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная в квадрат со стороной 4 попадает в квадрат со стороной 3, находящийся внутри первого квадрата

Решение:

$P(A)=9/16$

Пример: Два студента договорились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 9.00 до 10.00. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого и ожидает 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY, в качестве единиц масштаба выберем часы. Пусть x и y- моменты прихода A и B соответственно. Необходимым и достаточным условием встречи является выполнение неравенства $y-x <1/6$ (или $x-1/6<y< x+1/6$). Тогда все возможные исходы будут являться точками квадраты 1*1. Заштрихованной области квадрата, ограниченной сторонами квадрата, а также прямыми $y=x-1/6$ и

$y=x+1/6$, соответствуют исходы благоприятствующие встрече.

Искомая вероятность площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата.