Методические рекомендации по решению задач ОГЭ по математике

Андреева Наталья Александровна
учитель математики
МАОУ СОШ №36 г. Владимира

Характеристика структуры и содержания КИМ

Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика».

В модули «Алгебра» и «Геометрия» входит две части, соответствующие проверке на базовом и повышенном уровнях, в модуль «Реальная математика» – одна часть, соответствующая проверке на базовом уровне.

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий :
в части 1 - 8 заданий, ***в части 2*** - 3 задания.

Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий :
в части 1- 5 заданий, ***в части 2*** - 3 задания.

Модуль «Реальная математика» содержит
7 заданий ***в части 1***.

Характеристика структуры и содержания КИМ

Модуль «Алгебра»	Модуль «Геометрия»	Модуль «Реальная математика»
Распределение заданий по разделам содержания курса математики		
▪Числа и вычисления ▪Алгебраические выражения ▪Уравнения и неравенства ▪Числовые последовательности ▪Функции и их графики	▪Геометрические фигуры и их свойства ▪Треугольник ▪Многоугольники ▪Окружность и круг ▪Измерение геометрических величин	▪Статистика и теория вероятностей ▪Функции ▪Числа и вычисления ▪Алгебраические выражения ▪Геометрия
Распределение заданий по проверяемым умениям и способам действий		
▪Уметь выполнять вычисления и преобразования ▪Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений ▪Уметь решать уравнения, неравенства и их системы ▪Уметь строить и читать графики	▪Умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами ▪Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения ▪Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	▪Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и в повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели

Характеристика структуры и содержания КИМ

При проверке базовой математической компетентности обучающиеся должны продемонстрировать:	▪владение основными алгоритмами; ▪знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приёмов решения задач и проч.); ▪ умение пользоваться математической записью, ▪применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять математические знания в простейших практических ситуациях.
Задания части 2 модуля «Алгебра» направлены на проверку таких качеств математической подготовки выпускников, как:	•уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом; • умение решить комплексную задачу, включающую в себя знания из разных тем курса алгебры; •умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования; • владение широким спектром приёмов и способов рассуждений.
Задания части 2 модуля «Геометрия» направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:	▪умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания; ▪умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования; ▪владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Задание 19

Задачи на сложение и умножение вероятностей

Задача про срок службы техники	Задача про тестирование	Задача про автобус
Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,8. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.	Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т, верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.	Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 21 пассажира, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 20.
Решение: Формула примет следующий вид: $P(>1\text{ года}) = P(>2\text{ лет}) + P(\text{от 1 до 2 лет})$ Подставляем: $0{,}94 = 0{,}8 + P(\text{от 1 до 2 лет})$ $P(\text{от 1 до 2 лет}) = 0{,}94 - 0{,}8 = 0{,}14$ Ответ: 0,14	**Решение**: Формула примет следующий вид: $P(>7\text{ задач}) = P(>8\text{ задач}) + P(\text{ровно 8})$ Подставляем: $0{,}88 = 0{,}76 + P(\text{ровно 8 задач})$ $P(\text{ровно 8 задач}) = 0{,}88 - 0{,}76 = 0{,}12$ Ответ: 0,12	**Решение**: Формула примет следующий вид: $P(<21) = P(<12) + P(\text{от 12 до 20})$ Подставляем: $0{,}93 = 0{,}49 + P(\text{от 12 до 20})$ $P(\text{от 12 до 20}) = 0{,}93 - 0{,}49 = 0{,}44$ Ответ: 0,44

Задание 19

Задача про экзамен по геометрии	Задача про шахматистов
На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,25. Вероятность того, что вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,1. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.	Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
Решение: Складывать вероятности необходимо тогда, когда нам подходит или одно событие **или** другое. $0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}35$ Ответ: 0,35	**Решение:** Умножать вероятности необходимо тогда, когда нам подходит **и** одно событие **и** другое одновременно. $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$ Ответ: 0,156

Задание 19

Задача про биатлон

Биатлонист 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

Вероятность попадания $= 0{,}8$
Вероятность промаха $= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

0,8 0,8 0,2

$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128 \approx 0{,}13$

Ответ: 0,13

Задача про гарантийный ремонт

Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,093. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 97 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение:

Частота отличается от вероятности только тем, что она берётся за какой-то конкретный период времени.

$$\text{Частота} = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$$

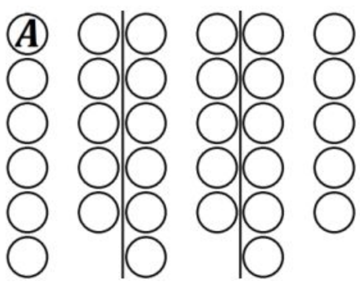
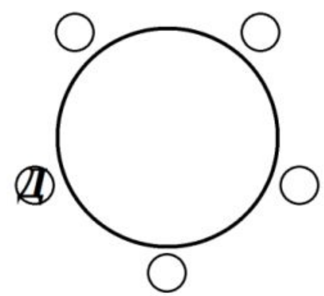
$$\text{Частота} = \frac{97}{1000} = 0{,}097$$

$$\text{Вероятность} = 0{,}093$$

$$0{,}097 - 0{,}093 = 0{,}004$$

Ответ: 0,004

Задание 19

Задача про рассадку детей в классе	Задача про рассадку за круглый стол
В классе 33 учащихся. Среди них два друга – Андрей и Михаил. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе.	За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживают 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
Решение: Если учащихся 33, а групп 3, то в каждой группе по 11 человек. Нарисуем 3 группы и посадим на один из стульев Андрея:  Михаил может сесть на одно из 32 оставшихся мест. Мест в одной группе с Андреем 10 $p = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$ Ответ: 0,3125	**Решение:** Нарисуем круглый стол, 5 стульев и посадим на один из стульев одну из девочек.  Вторая девочка может сесть на одно из 4 оставшихся мест. Мест слева и справа от первой девочки 2. $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ Ответ: 0,5

Задание 21

1. Сократите дробь

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}$$

Решение:

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=$$

$$=\frac{(9\cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=$$

$$=\frac{3^{2n+6}\cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=$$

$$=3^{2n+6-(2n+5)}\cdot 2^{n+3-(n-2)}=$$

$$=3\cdot 2^5=96.$$

Ответ: 96.

2. Сократите дробь

$$\frac{x^3+2x^2-9x-18}{(x-3)(x+2)}.$$

1 способ	2 способ
$\begin{array}{r\|l} x^3+2x^2-9x-18 & x-3 \\ \hline -(x^3-3x^2) & x^2+5x+6 \\ 5x^2-9x & \\ -(5x^2-15x) & \\ 6x-18 & \\ -(6x-18) & \\ 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} x^2+5x+6 & x+2 \\ \hline -(x^2+2x) & x+3 \\ 3x+6 & \\ -(3x+6) & \\ 0 & \end{array}$	$\frac{x^3+2x^2-9x-18}{(x-3)(x+2)}=$ $=\frac{x^2(x+2)-9(x+2)}{(x-3)(x+2)}=$ $=\frac{(x+2)(x^2-9)}{(x-3)(x+2)}=$ $=\frac{(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}=$ $=x+3.$

Задание 21

3. Найдите значение выражения $39a-15b+25$, если $\dfrac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=7$.

Решение:

$$\frac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=7$$

$$3a-6b+4=42a-21b+28$$

$$39a-15b+24=0$$

$$39a-15b+25=1$$

Ответ: 1.

4. Решите неравенство: (ОГЭ - 2014)

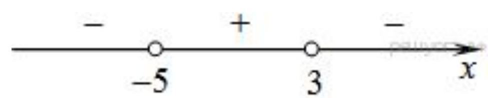
$$\frac{-14}{x^2+2x-15}\le 0.$$

1 способ

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала разложим на множители выражение

$$x^2+2x-15:$$

$$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$$



Теперь расставим точки на прямой и определим знаки выражения на каждом получившемся промежутке (см рис.).
Таким образом, ответ

$$(-\infty;\ -5)\cup(3;\ +\infty).$$

2 способ

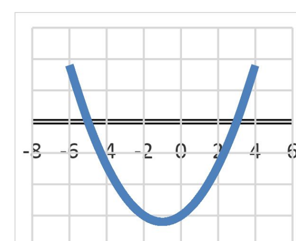
Числитель дроби отрицателен, значит знаменатель

$$x^2+2x-15>0$$

$$x^2+2x-15=0$$

$$x=-5$$

$$x=3$$



$$(-\infty;\ -5)\cup(3;\ +\infty).$$

Задание 21

5. Решите уравнение ОГЭ-2014	6. Решите уравнение ОГЭ-2015	7. Решите уравнение ОГЭ-2016
$x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8.$	$x(x^2+2x+1)=6(x+1).$	$x^4=(x-20)^2.$
Решени $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$ $x^2-2x-8=0$ $(x-4)(x+2)=0$ $\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=4.\end{array}\right.$ Поскольку подкоренное выражение не может быть меньше нуля, область допустимых значений исходного уравнения ограничивается неравенством $3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3,$ значит, решением уравнения является только $x=-2.$ Ответ: -2.	**Решение:** $x(x^2+2x+1)=6(x+1)$ $x(x+1)^2-6(x+1)=0$ $(x+1)(x(x+1)-6)=0$ $(x+1)(x^2+x-6)=0$ $(x+1)(x+3)(x-2)=0$ $\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=-3,\\x=2.\end{array}\right.$ Ответ: -3; -1; 2.	**Решение:** Квадраты чисел равны, если сами числа равны или противоположны $x^4=(x-20)^2$ $\left[\begin{array}{l}x^2=x-20,\\x^2=20-x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-x+20=0,\\x^2+x-20=0\end{array}\right.$ $x^2+x-20=0$ $\left[\begin{array}{l}x=-5,\\x=4.\end{array}\right.$ Ответ: -5; 4.

Задание 21

8. Решите систему уравнений ОГЭ -2014	9. Решите систему уравнений ОГЭ - 2015	Комментарии к заданиям 21
$\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ x^2 + 2 = 7y + y^2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$	▪Ошибка в знаках при группировке слагаемых считается существенной, при ее наличии решение не засчитывается. ▪Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби. ▪Ошибки в алгоритме решения неравенства считаются существенными и решение при их наличии не засчитывается. ▪Ошибки при составлении дискриминанта, в применении формул, в том числе в подстановке числовых значений в формулы, считаются существенными. ▪Ошибки при объединении найденных значений переменных в пары считаются существенными.
Решение: Последовательно получаем: $\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ x^2 + 2 = 7y + y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ 7y + 2 + 2 = 7y + y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ y^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4, \\ y = 2. \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$ Ответ: $(-4; 2)$; $(4; 2)$.	**Решение:** $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 22 = 11x \end{cases}$ $\begin{cases} 3y^2 + 8 = 11, \\ x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 1, \\ x = 2, \end{cases}$ откуда получаем решения системы уравнений : $(2; -1)$ и $(2; 1)$. Ответ: $(2; -1)$; $(2; 1)$.	

Задачи на движение

Расстояние между городами A и B равно 375 км. Город C находится между городами A и B. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

1 способ

Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v , а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от A до C за t ч . Тогда имеем $75t = v(t+\frac{3}{2})$, откуда $v = \frac{150t}{2t+3}$.

Поскольку весь путь от A до B автомобиль

преодолел за время $2t+\frac{3}{2}$, получаем:

$$v(2t+\frac{3}{2}) = 375;$$

$$\frac{150t}{2t+3}\cdot(2t+\frac{3}{2}) = 375;$$

$$300t^2+225t = 750t+1125;$$

$$4t^2-7t-15=0$$

откуда t=3 ч.

Значит, расстояние от A до C равно 225 (км).

Ответ: 225 км.

2 способ

	V (км/ч)	t (ч)	S (км)
Автомобиль (до встречи)	y	$\frac{x}{y}$	x
Мотоцикл (до встречи)	75	$\frac{x}{75}$	x
Автомобиль (после встречи)	y	$\frac{375-x}{y}$	$375-x$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{3}{2}=\frac{x}{75} \\ \frac{375-x}{y}=\frac{x}{75} \end{cases}$$

Откуда получаем x=225

Ответ: 225 км.

Задачи про поезда

Задача про поезд, который едет мимо столба	Задача про поезд, который едет мимо лесополосы
Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 50 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 72 секунды. Найдите длину поезда в метрах.	**Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 70 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой 1000 метров, за 1 минуту 48 секунд. Найдите длину поезда в метрах.**
Решение: 1 Сначала переведём км/ч в м/с, потому что необходимо найти количество метров и даны секунды: $50\text{ км/ч} = \frac{50 \cdot 1000}{3600}\text{ м/с} = \frac{125}{9}\text{ м/с}$ 2 За 72 секунды поезд пройдёт мимо столба расстояние, равное своей длине, поэтому: $S = V \cdot t$ $S = \frac{125}{9} \cdot 72 = 1000\text{ м}$ Ответ: 1000	**Решение:** 1 Сначала переведём км/ч в м/с: $70\text{ км/ч} = \frac{70 \cdot 1000}{3600}\text{ м/с} = \frac{175}{9}\text{ м/с}$ 2 За 1 минуту 48 секунд, т.е. за 108 секунд поезд пройдёт расстояние, равное сумме длин лесополосы и самого поезда: $S = V \cdot t$ $S = \frac{175}{9} \cdot 108 = 2100\text{ м}$ 3 Чтобы найти длину поезда, необходимо вычесть из пройденного расстояния длину лесополосы: $2100 - 1000 = 1100\text{ м}$ Ответ: 1100

Задачи про поезда

Задача про поезда, которые едут в одном направлении	Задача про поезда, которые едут навстречу друг другу
По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 800 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 2 минутам. Ответ дайте в метрах	По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют пассажирский и скорый поезда, скорости которых равны соответственно 50 км/ч и 70 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно33 секундам. Ответ дайте в метрах
Решение: 1 Найдём скорость отдаления: $80 - 50 = 30$ км/ч 2 Переведём км/ч в м/мин: $30 \text{ км/ч} = \frac{30 \cdot 1000}{60} \text{ м/мин} = 500 \text{ м/мин}$ 3 За каждую минуту пассажирский поезд уходит в отрыв на 500 метров, т.е. за 2 минуты он уйдёт на 1000 метров, при этом он преодолеет путь, равный сумме длин поездов, поэтому: $1000 - 800 = 200$ м Ответ: 200	**Решение:** 1 Найдём скорость сближения: $70 + 50 = 120$ км/ч 2 Переведём км/ч в м/сек: $120 \text{ км/ч} = \frac{120 \cdot 1000}{3600} \text{ м/сек} = \frac{100}{3} \text{ м/сек}$ 3 За 33 секунды скорый поезд пройдёт расстояние, равное сумме длин двух поездов: $S = V \cdot t$ $S = \frac{100}{3} \cdot 33 = 1100$ м Длина скорого поезда равна: $1100 - 800 = 300$ м Ответ: 300

Задача 22 (огэ-2014)

Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?

1 способ	**2 способ**
Решение: Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется $\frac{77}{14} \cdot 72 = 396$ кг свежих. Ответ: 396 кг.	1. 100-86=14 (%) сухая часть свежих фруктов 2. 100-23=77(%) сухая часть высушенных фруктов 3. 77% от 72=72*0,77=55.44(кг) сухая часть свежих фруктов 4. 14% это 55,44= 55.44:0,14=396(кг) потребуется свежих фруктов. Ответ: 396 кг.

Задание 22

1. **Расстояние между пристанями А и В равно 80 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч. (ОГЭ-2016)**

Решение:
Обозначим искомую скорость (в км/ч) за v.
Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, а яхта 9 часов.
Таким образом, имеем:

$$\frac{80}{v+2}+\frac{80}{v-2}=9;$$

$$80v-160+80v+160=9v^2-36;$$

$$9v^2-160v-36=0$$

$$v=18$$

Ответ: 18 км/ч

Комментарии к заданиям 22

Следует отметить, что при решении дробно-рационального уравнения, полученного в задаче, необязательно требовать от выпускника проверки условия неравенства нулю знаменателя.
К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

2. **Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде. (ОГЭ-2015)**

Решение: Обозначим х км/ч искомую скорость.
По течению реки лодка двигалась $\frac{36}{x+3}$ ч.
Против течения лодка шла $\frac{36}{x-3}$ ч. Получаем уравнение

$$\frac{36}{x-3}+\frac{36}{x+3}=5$$

Решим его:

$$\frac{72x}{(x-3)(x+3)}=5;$$

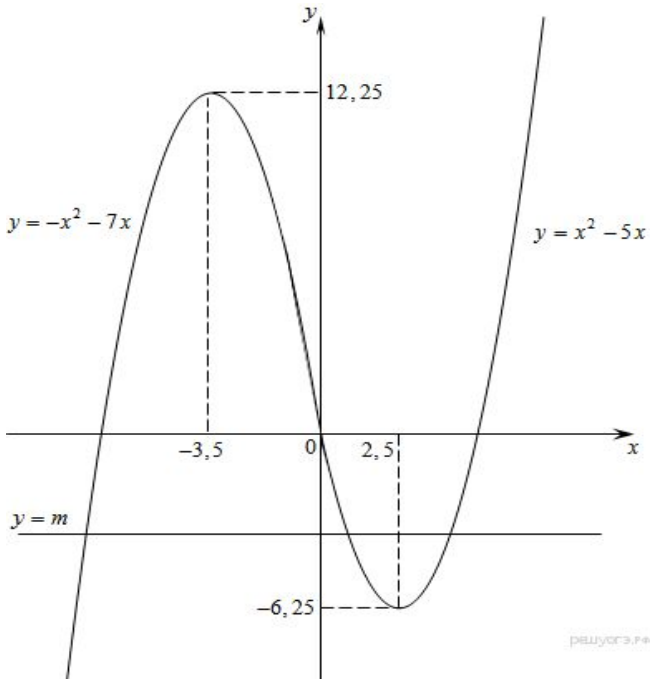
$$\begin{cases} 5x^2-72x-45=0, \\ x^2-9\neq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: 15 и −0,6. Корень -0.6 не удовлетворяет условию задачи.
Следовательно, скорость лодки равна 15 км/ч.
Ответ: 15 км/ч.

Задание 23 (огэ-2014)

Постройте график функции $y = |x|(x+1) - 6x$ **и определите, при каких значениях m прямая y=m имеет с графиком ровно две общие точки.**

Решение:



$$y = \begin{cases} -x^2 - 7x, \text{ при } x < 0, \\ x^2 - 5x, \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $m = -6{,}25$ и $m = 12{,}25$.

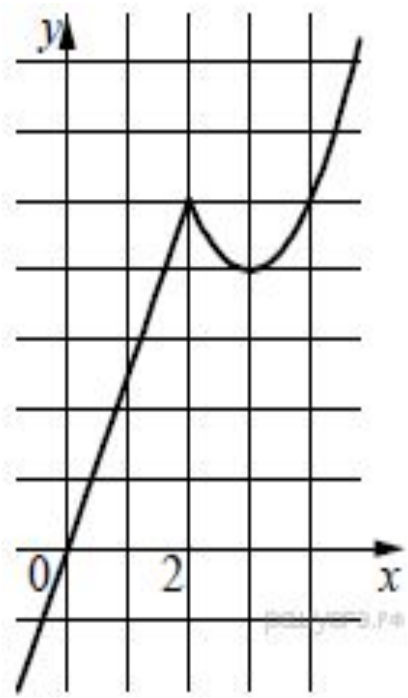
Ответ: −6,25; 12,25.

ОГЭ-2014

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 13, \text{ если } x \geq 2, \\ 2,5x, \text{ если } x < 2, \end{cases}$ **и определите,**

при каких значениях m **прямая** $y = m$ **имеет с графиком ровно две общие точки.**

Решение:



Построим график функции $y = 2{,}5x$ при $x < 2$ и график функции $y = x^2 - 6x + 13$ при $x \geq 2$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = 4$ и при $m = 5$.

Ответ: 4; 5.

ОГЭ-2015

Постройте график функции $y=|x^2+4x-5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение:

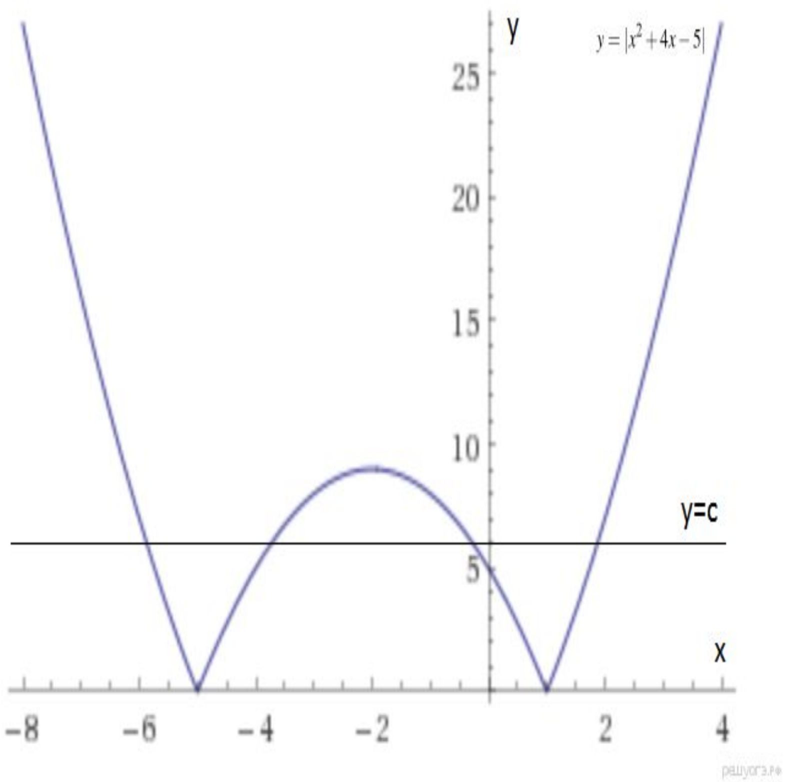


График данной функции — это график параболы $y=x^2+4x-5,$ отрицательная часть которого отражена относительно оси OX.

Этот график изображён на рисунке

Прямая, параллельная оси абсцисс задаётся формулой y=c. где c— постоянная.

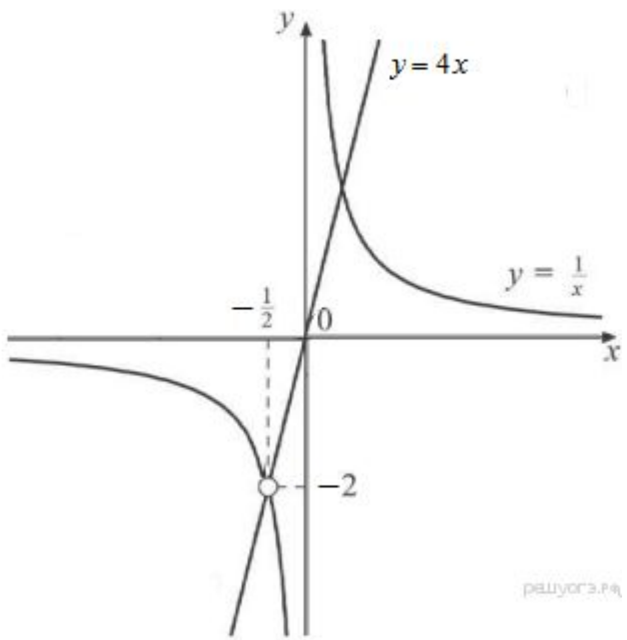
Из графика видно, что прямая y=c может иметь с графиком функции не более четырёх общих точек.

Ответ: 4.

ОГЭ-2015

Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях к прямая y=кх имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:



$$\frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}. \qquad x \neq -0,5$$

$$y = \frac{1}{x}.$$

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (-0,5; -2).

Прямая у=кх будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку.

Тогда $k = \dfrac{-2}{-0,5} = 4,$ и уравнение прямой примет вид: $y = 4x.$

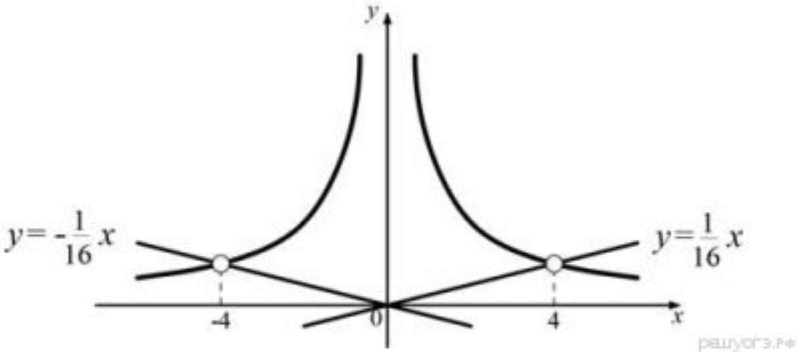
Ответ: 4

ОГЭ-2016

Постройте график функции $y = \dfrac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ **и определите, при каких значениях к прямая у=кх не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.**

Решение: $\dfrac{|x|-4}{x^2-4|x|} = \dfrac{|x|-4}{|x|(|x|-4)} = \dfrac{1}{|x|}$ $\quad |x| \neq 4$

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$$



На рисунке видно, что прямая у=кх не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $(4;\ \frac{1}{4})$ или $(-4;\ \frac{1}{4})$.

Этим случаям соответствуют значения $k = 0,\ k = -\dfrac{1}{16}$ и $k = \dfrac{1}{16}$.

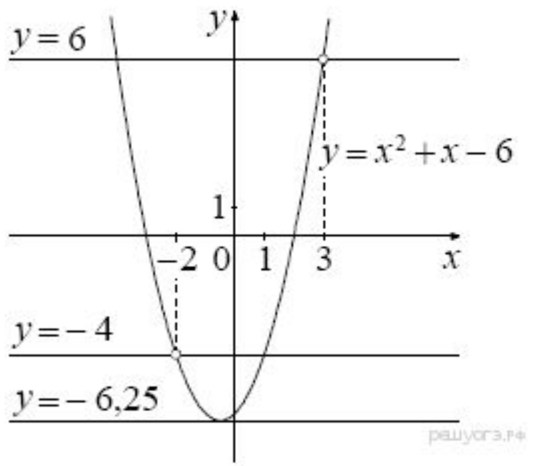
Ответ: $0,\ -\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{16}$.

Комментарий к заданиям 23: основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя: масштаб, содержательная таблица значений или объяснение построения, **выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами**.

Демонстрационный вариант 2017

Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра прямая y=c имеет с графиком ровно одну общую точку

Решение:



$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2-4)(x^2-9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$

$x \neq -2 \quad x \neq 3$

$y = (x-2)(x+3)$

$y = x^2 + x - 6$

График — парабола с выколотыми точками $(-2;-4)$ и $(3;6)$

Прямая y=c имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая.

Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$

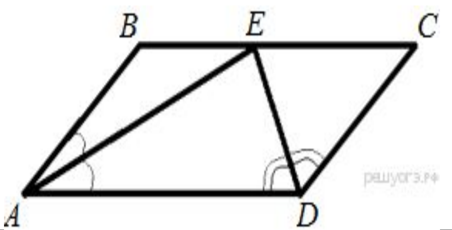
Поэтому c=-6,25, c=-4 или c=6.

Ответ: c=-6,25, c=-4 или c=6.

Задание 24

Биссектрисы углов *A* и *D* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке, лежащей на стороне *BC*. Найдите *BC*, если *AB* = 34. (огэ-2014)

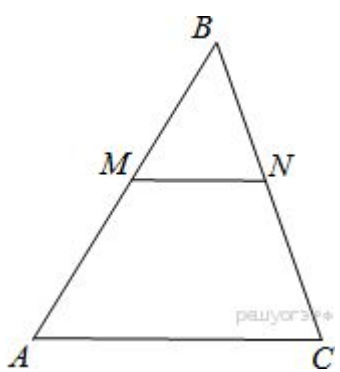
Решение:



По определению параллелограмма $BC \parallel AD$, АЕ- секущая при параллельных прямых, следовательно, углы ВЕА и ЕАД равны как накрест лежащие. Поскольку $\angle BEA = \angle BAE$,
Треугольник АВЕ — равнобедренный, откуда АВ=ВЕ.
Аналогично, треугольник СЕД— равнобедренный и ЕС=СД.
Стороны АВ и СД равны, как противоположные стороны параллелограмма, следовательно, $AB = BE = EC = CD = 34.$
Таким образом, $BC = 2BE = 68.$

Прямая, параллельная стороне *AC* треугольника *ABC*, пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *BN*, если *MN* = 13, *AC* = 65, *NC* = 28. (огэ-2015)

Решение:



Рассмотри треугольники АВС и MBN, углы BMN и ВАС равны как соответственные при параллельных прямых АС и MN и с. АВ.

Угол В — общий, следовательно, эти треугольники подобны по двум углам, откуда $\dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{MN}.$

Найдём BN: $\dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AC}{MN} \Leftrightarrow \dfrac{BN + NC}{BN} = \dfrac{65}{13}$

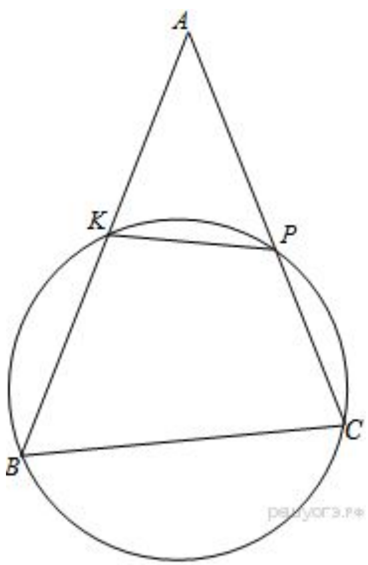
$5BN = BN + 28 \Leftrightarrow BN = 7.$

Ответ: 7

ОГЭ-2015

Окружность пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *K* и *P* соответственно и проходит через вершины *B* и *C*. Найдите длину отрезка *KP*, если *AK* = 18, а сторона *AC* в 1,2 раза больше стороны *BC*.

Решение:



Поскольку четырёхугольник BKPC вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180°, следовательно,

$$\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ.$$

Углы APK и KPC — смежные, следовательно,

Из приведённых равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK.$

Рассмотрим треугольники ABC и APK

угол A — общий, углы APK и ABC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\dfrac{KP}{BC} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AP}{AB}.$

Используя равенство $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{KP}{BC},$ найдём KP:

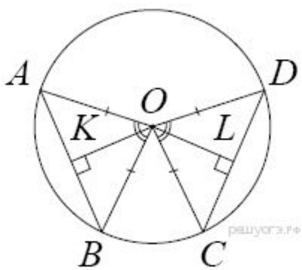
$$\frac{AK}{1,2BC} = \frac{KP}{BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AK}{1,2} \Leftrightarrow KP = 15.$$

Ответ: 15

Задание 25

В окружности с центром *O* проведены две хорды *AB* и *CD* так, что центральные углы *AOB* и *COD* равны. На эти хорды опущены перпендикуляры *OK* и *OL*. Докажите, что *OK* и *OL* равны.

Решение:

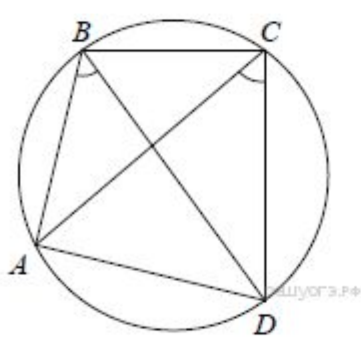


Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию).

Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.

В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *ABD* и *ACD* равны. Докажите, что углы *DAC* и *DBC* также равны. (огэ-2014)

Решение:



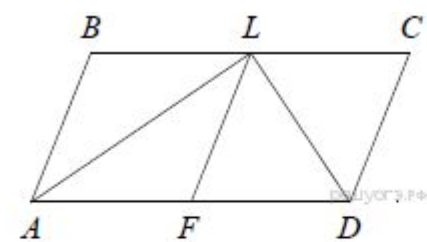
Поскольку $ABCD$ выпуклый и $\angle ABD = \angle ACD$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

А тогда $\angle DAC = \angle DBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD.

Задание 25

Сторона *BC* параллелограмма *ABCD* вдвое больше стороны *CD*. Точка *L* — середина стороны *BC*. Докажите, что *DL* — биссектриса угла *CDA*. (огэ-2015)

Решение:



Проведём LF параллельно CD .

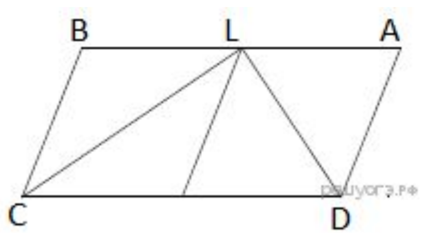
Тогда $BL = LC = CD$.

Следовательно, параллелограмм $CDFL$ является ромбом.

Диагональ DL ромба $CDFL$ является биссектрисой угла CDA.

Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L- середина AB. (огэ-2015)

Решение:



$\angle LCD = \angle CLB$
как накрест лежащие при параллельных AB и СД и секущей CL,
$\angle LCD = \angle LCB$

так как CL - биссектриса. Отсюда $\angle LCB = \angle CLB$.
Таким образом, треугольник CLB-равнобедренный,

следовательно, BL=BC. Доказываем аналогичным

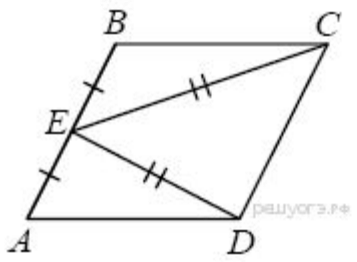
образом, что LA=AD и, следовательно, BL=LA ,

так как BC=AD (из свойства параллелограмма).

Задание 25

В параллелограмме *ABCD* точка *E* — середина стороны *AB*. Известно, что *EC*=*ED*. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник (демо-2017)

Решение:



Треугольники *BEC* и *AED* равны по трём сторонам.

Значит, углы *CBE* и *DAE* равны.

Так как их сумма равна 180°, то углы равны 90°.

Такой параллелограмм — прямоугольник.

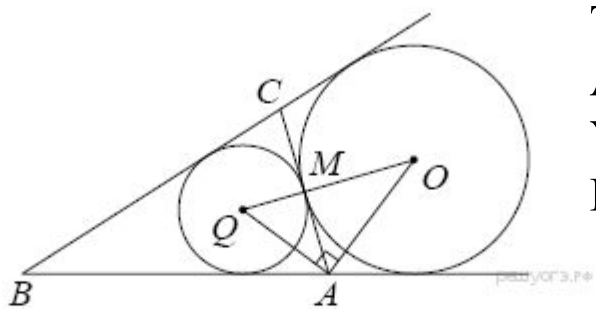
Комментарии к заданиям 24-26

Использование данных, которых нет в условии задачи является существенной ошибкой, при ее наличии решение не засчитывается.
Если при правильном ответе решение содержит более одной ошибки и описки, то решение не засчитывается.
Небольшое уточнение с «ошибка или описка» до «ошибки или описки» подчеркивает тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка (описка) стала причиной того, что неверен ответ.
Неверная запись ответа, неверное владение символикой, неточность в обосновании, логическая ошибка в применении свойств, признаков и т.д. ведут к снижению баллов.

Задание 26 (демо-2017)

1. **Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.**

Решение:



Пусть O— центр данной окружности, а Q— центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
Точка касания M окружностей делит AC пополам.
AO и AQ— биссектрисы смежных углов, значит,
Угол OAQ прямой.
Из прямоугольного треугольника OAQ получаем:

$$AM^2 = MQ \cdot MO.$$

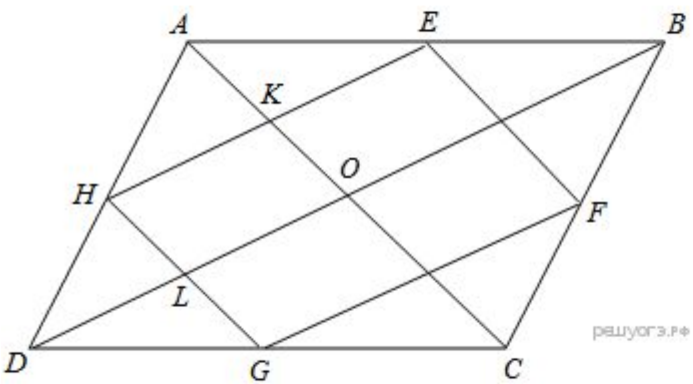
Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

Ответ: 4.5.

2. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 28(огэ-2014)

Решени
е:



Введём обозначения как показано на рисунке.
Поскольку HG II AC и HE II BD получаем, что HKOL — параллелограмм, следовательно, углы KHL и KOL равны.

Рассмотрим треугольники ABC и EBF угол EBF — общий, углы BEF и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, углы BFE и BCA — аналогично, следовательно, треугольники ABCи BEF подобны по двум углам. Откуда $\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$

Аналогично подобны треугольники ABD и AEH откуда $\frac{HE}{BD}=\frac{AE}{AB}$. Пусть сторона ромба равна a , длина короткой диагонали равна d. Сложим два полученных уравнения:

$$\frac{EF}{AC}+\frac{HE}{BD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}\Leftrightarrow\frac{a}{d}+\frac{a}{28d}=\frac{AE+EB}{AB}\Leftrightarrow. \quad \Leftrightarrow\frac{28a+a}{28d}=\frac{AB}{AB}\Leftrightarrow 28d=29a\Leftrightarrow a=\frac{28d}{29}.$$

Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними:
$S_{HEFG}=a^2\sin\angle KHL.$ Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle KOL=d\cdot 28d\cdot\sin\angle KOL.$$

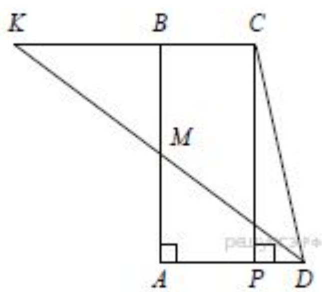
Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}}=\frac{a^2\sin\angle KHL}{\frac{1}{2}\cdot d\cdot 28d\cdot\sin\angle KOL}=\frac{a^2}{14d^2}=\frac{d^2\frac{28^2}{29^2}}{14d^2}=\frac{56}{841}.$$

Ответ: $\frac{56}{841}$.

3. Боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны соответственно 28 и 35, а основание *BC* равно 7. Биссектриса угла *ADC* проходит через середину стороны *AB*. Найдите площадь трапеции (огэ-2015)

Решение:



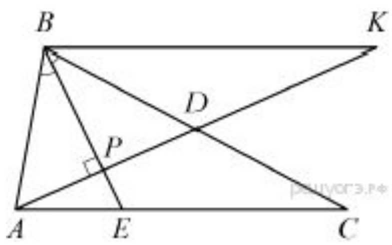
Пусть M — середина AB. Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку $\angle CKD=\angle ADK=\angle CDK$, треугольник KCD равнобедренный, $KC=CD=35$. Тогда $KB=KC-BC=35-7=28$. Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $AD=BK=28$. Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P. Треугольник CPD прямоугольный, так как $CD^2=35^2=28^2+21+^2=PC^2++PD^2$. Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)CP=490.$$

Ответ: 490

4. В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника *ABC* (огэ-2015)

Решение:



Пусть Р— точка пересечения отрезков ВЕ и АД .
Треугольник АВД — равнобедренный,
так как его биссектриса ВР является высотой. Поэтому

$AP = PD = 48 \quad BC = 2BD = 2AB$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{CE}{AE} = 2 \Leftrightarrow AC = 3AE.$$

Проведём через вершину В прямую, параллельную АС . Пусть К— точка пересечения этой прямой с продолжением медианы АД . Тогда $BK = AC = 3AE.$

Из подобия треугольников АРЕ и КРВ следует, что $\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$

Поэтому РЕ=24 и РВ=72. Следовательно

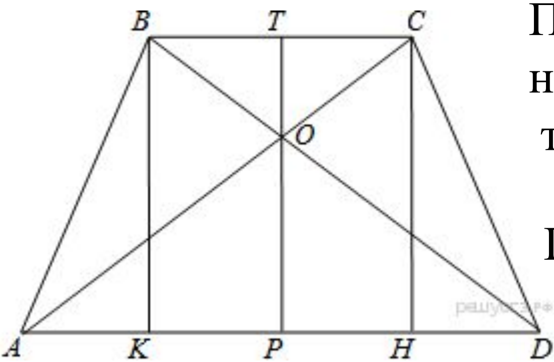
$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 24\sqrt{13} \qquad BC = 2AB = 48\sqrt{13};$

$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 24\sqrt{5} \qquad AC = 3AE = 72\sqrt{5}.$

Ответ: $24\sqrt{13} \quad 48\sqrt{13} \quad 72\sqrt{5}.$

5. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 160, а площадь равна 1280, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания (огэ-2016)

Решение:



Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны:

$$AB+CD=BC+AD \Leftrightarrow 2AB=BC+AD.$$

Периметр трапеции — сумма длин всех сторон:

$$P=AB+BC+CD+AD \Leftrightarrow P=2AB+BC+AD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P=4AB \Leftrightarrow AB=\frac{P}{4} \Leftrightarrow AB=40.$$

Следовательно, $BC+AD=2AB=80.$ Площадь трапеции можно найти как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot TP \Leftrightarrow TP=\frac{2S}{BC+AD} \Leftrightarrow TP=32.$$

Высоты ВК, ТР и СН равны. Из прямоугольного треугольника СНД найдём НД:

$$HD=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{1600-1024}=24.$$

Рассмотрим треугольники АВК и СНД они прямоугольные, АВ равно СД, ВК равно СН следовательно, треугольники равны, откуда АК=НД=24.Прямые ВК и СН перпендикулярны прямой АД, поэтому они параллельны, ВК равно СН , следовательно, четырёхугольник ВСНК — параллелограмм, по признаку параллелограмма, откуда ВС=КН.

Рассмотрим выражение для отрезка АД:

$$AD=AK+KH+HD \Leftrightarrow AD=2HD+BC \Leftrightarrow AD-BC=2HD.$$

Получаем систему уравнений на отрезки АД и ВС:

$$\begin{cases} AD + BC = 80, \\ AD - BC = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 64, \\ BC = 16. \end{cases}$$

Рассмотрим треугольники АОД и СОВ, углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при параллельных прямых, углы ВОС и АОД равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны по двум углам.

Откуда:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{OT}{OP} \Leftrightarrow OP = 4OT.$$

$$TP = OT + OP = OT + 4OT = 5OT = 32.$$

$$OT = 6{,}4.$$

Ответ: 6,4.

1. http://fipi.ru/
2. https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1
3. ОГЭ -2016 .Методические рекомендации по проверке заданий с развернутым ответом.
4. Реальные задания ОГЭ 2014-2016г
5. http://www.youtube.com/channel/UCLDpIKDTFBSwIYtAG0Wpibg