ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь (маршрут) – конечная последовательность ребер графа, в котором два соседних ребра соединены общей вершиной. В маршруте одно и тоже ребро может встречаться несколько раз. Путь – это совокупность ребер, которые объединены вершинами таким образом, что можно двигаться по ним вдоль графа.

Обозначение маршрута – $v_0, v_1, \ldots v_k$.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь длины *k* – последовательность, содержащая *k* ребер. Длина пути - количество ребер в нем; каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в маршруте.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь называется простым или цепью, если все его ребра различны. Если все вершины в цепи различны, то она является простой цепью.

Циклом называется путь, в котором $v_0=v_k$,.

Простой цикл – цикл, у которого все ребра и все вершины, кроме концов, различны.

В простой цепи число вершин на единицу больше, чем число ребер, а в простом цикле их количество совпадает.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Пример. Определить возможные маршруты и их длину из вершины v_0 в вершину v в графе (рис. 12).

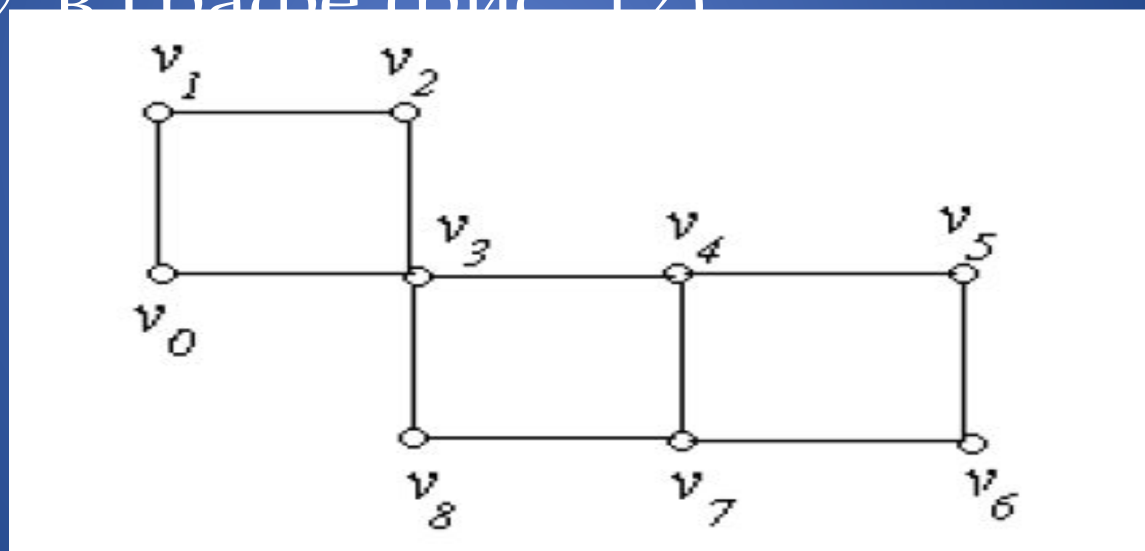

Рисунок 12

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Решение.

Пути:

1) $v_0v_3v_8$ длиной 2;

2) $v_0v_1v_2v_3v_8$ длиной 4;

3) $v_0v_3v_4v_7v_8$ длиной 4;

4) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ длиной 6;

5) $v_0v_3v_4v_5v_4v_7v_8$ длиной 6;

6) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ длиной 6;

7) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ длиной 8;

8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ длиной 10.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Маршрут $v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$ для графа (рис. 12) является простым циклом;

маршрут $v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_4 v_3$ является циклом, но не будет простым, потому что содержит повторяющиеся вершины.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Эйлеров цикл – последовательность вер шин (может быть и с повторениями), через которые проходит искомый маршрут.

Цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности один раз, называется гамильтоновым, а соответствующий

граф – гамилътоновым графом.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Вершины v' и v'' называются связными, если существует маршрут с началом в вершине v' и концом в v''. Граф называется связным, если любые пары его вершин связаны между собой.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Граф, изображенный на рис. 13 (а) – не связный, а граф на рис. 13 (б) – связный.

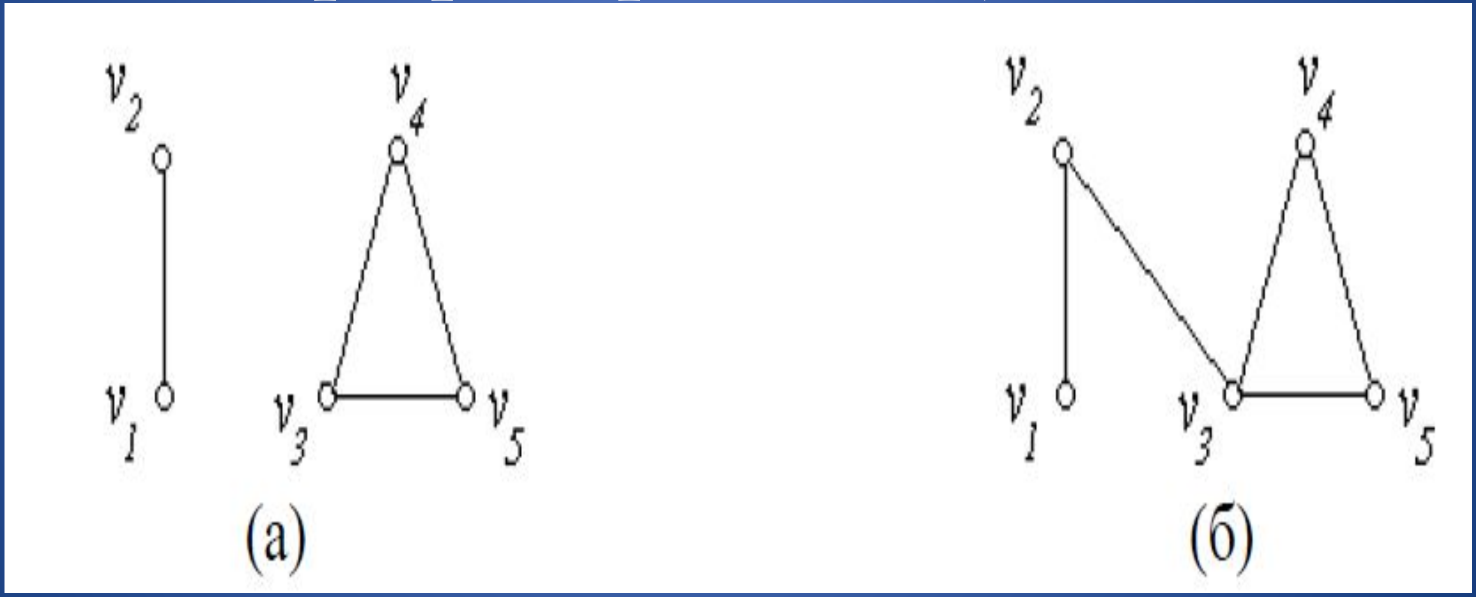

Рисунок 13

ТЕОРИЯ ГРАФОВ КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Для определения наличия маршрута между двумя вершинами используется матрица смежности. Булево произведение матрицы B с самой собой обозначается через B^2. В этой матрице 1 символизирует наличие пути

длины 2. По матрице $B^3 = B * B * B$ можно определить все пути длины 3, т.е., матрица B^k хранит сведения о путях длины *к*.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Пример. Для графа (рис. 14) определим, какие и в каком количестве существуют пути между вершинами.

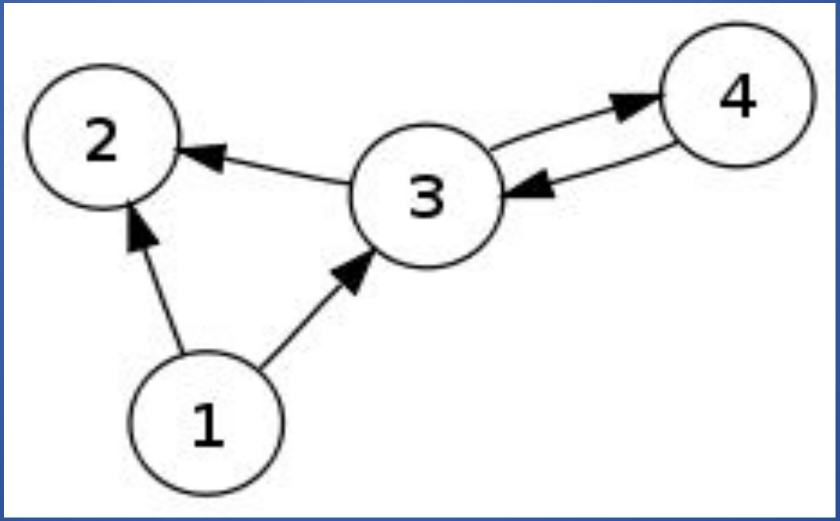

Рисунок 14

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрица смежности

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Матрица B^2

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрица B^3

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Матрица B^4

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

При использовании алгебраических операций получаем матрицу,

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	0	0	0	0
3	0	2	2	2
4	0	2	2	2

которая характеризует не только наличие путей между вершинами, но и количество таких путей.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

- Матрица смежности

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

- Матрица A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Элемент матрицы «говорит» о количестве путей между вершинами, а показатель степени указывает длину пути.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

- Матрица A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В этом случае может говорить о наличии пути между вершинами длиной 2.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Матрица достижимости ориентированного графа – бинарная матрица замыкания по транзитивности. Таким образом, в матрице достижимости хранится информация о существовании путей между вершинами орграфа.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Для нахождения матрицы достижимости начинаем работу с построения матрицы смежности.

Находим булевы степени этой матрицы: B^2, B^3, …, B^n

Находим матрицу достижимости:

$$B^* = B \vee B^2 \vee \ldots \vee B^n$$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Матрица смежности

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Матрица B^2

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

Матрица B^3

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Матрица B^4

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Более удобный путь определения матрицы достижимости дает так называемый алгоритм Уоршелла (алгоритм Флойда – Уоршелла) – алгоритм для нахождения расстояний между всеми вершинами орграфа. Разработан в 1962 году Робертом Флойдом и Стивеном Уоршеллом.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Алгоритм Уоршелла генерирует последовательность матриц $W_0 \ldots W_n$, матрица

W_0 совпадает с матрицей смежности орграфа, а W_n – искомая матрица достижимости.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

1. Берем *k*-ый столбец матрицы W_{k-1}
2. Строку с номером $i(i=1,\ldots,n)$, у которой на *k*-ом месте стоит 0, переписываем в *i*-ую строку марицы W_k .
3. Строку с номером $i(i=1,\ldots,n)$, у которой на *k*-ом месте стоит 1, объединяем с помощью операции или с *k*-ой строкой, а результат записываем в

   i-ую строку марицы W_k .

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- Пример.

Матрица смежности орграфа (рис. 14)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу W_1. Учитывая первый шаг, рассматриваем 1-ый столбец матрицы W_0. Следуя указаниям шага 2, скопируем строки матрицы W_0, в первом столбце которой стоят 0.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- $$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу W_2. Рассматриваем 2-ой столбец матрицы W_1. Скопируем строки матрицы W_1, во втором столбце которой стоят 0.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- $$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Рассчитываем значения в строке 1-ой и 3-ей, выполняя дизъюнкцию *k*-ой строки (второй) со строками, у которых на *k*-ом месте стоит 1.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- Вычисляем матрицу W_3. Рассматриваем 3-ий столбец матрицы W_2. Копируем строки, у которых в 3-ем столбце 0: вторую и третью

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассчитываем значения в строке 1-ой и 4-ой, выполняя дизъюнкцию k-ой строки (третьей) со строками, у которых на k-ом месте стоит 1.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ
АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- Вычисляем матрицу W_4. Рассматриваем 4-ый столбец матрицы W_3. Копируем строки, у которых в 4-ом столбце 0: вторую

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Рассчитываем значения в строке 1-ой, 3-ей и 4-ой, выполняя дизъюнкцию k-ой строки (четвертой) со строками, у которых на k-ом месте стоит 1. Полученная матрица является матрицей достижимости – W^*.