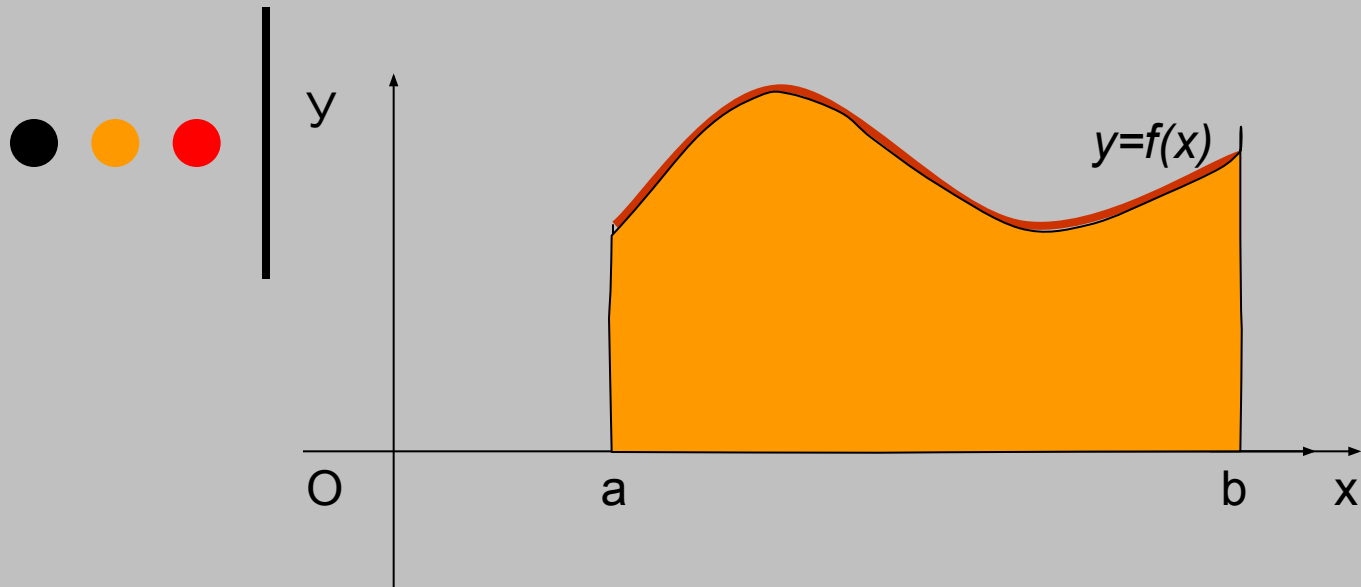


Вычисление объемов тел вращения

Применение интеграла



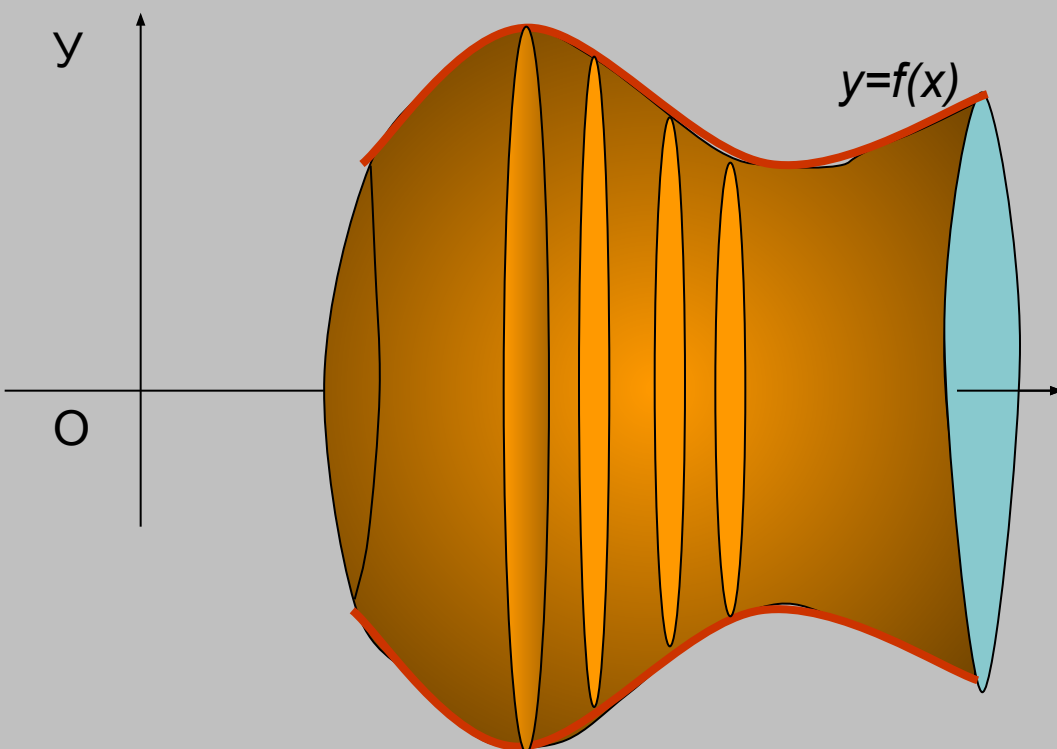
Постановка задачи

Пусть функция $y = f(x)$ определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда график кривой $y=f(x)$ на $[a; b]$, ось Ox , прямые $x = a$, $x = b$ образуют криволинейную трапецию.

Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox и найдем его объем.

● ● ●

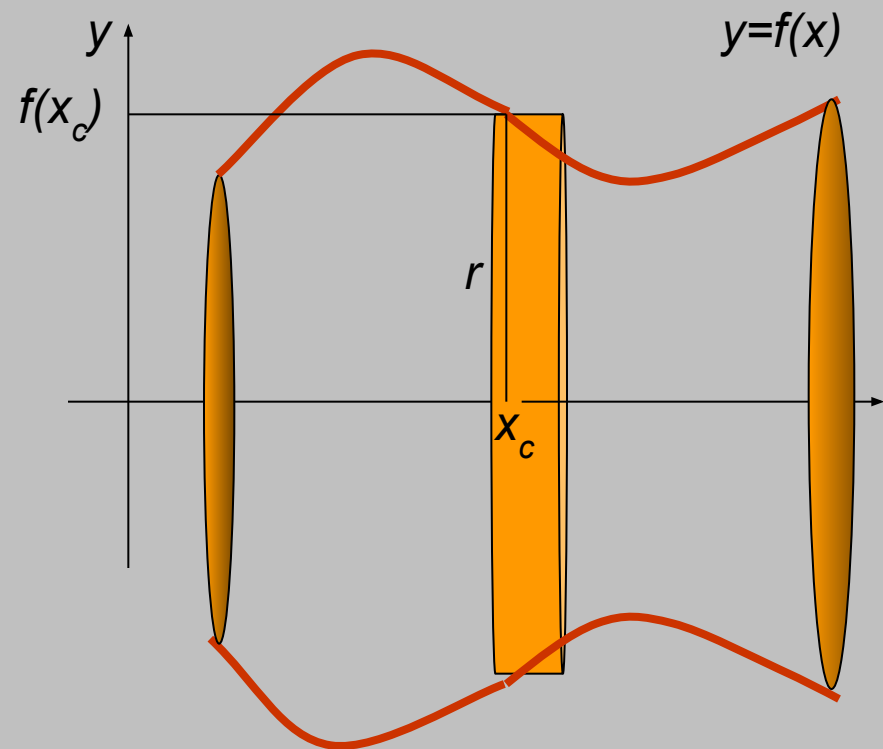
Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей произвольным образом, через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную к оси Ox и найдём площади полученных поперечных сечений.



x

Очевидно, что любое поперечное сечение тела вращения – круг. Радиус круга равен значению функции в x_c
Площадь этого круга – $S(x) = \pi \cdot f^2(x_c)$

● ● ●
Построим на каждом промежутке
цилиндрическое тело, образующая которого
параллельна оси ОХ,
а основанием является сечение - круг.



Радиус круга равен
значению функции в x_c
Площадь этого круга –

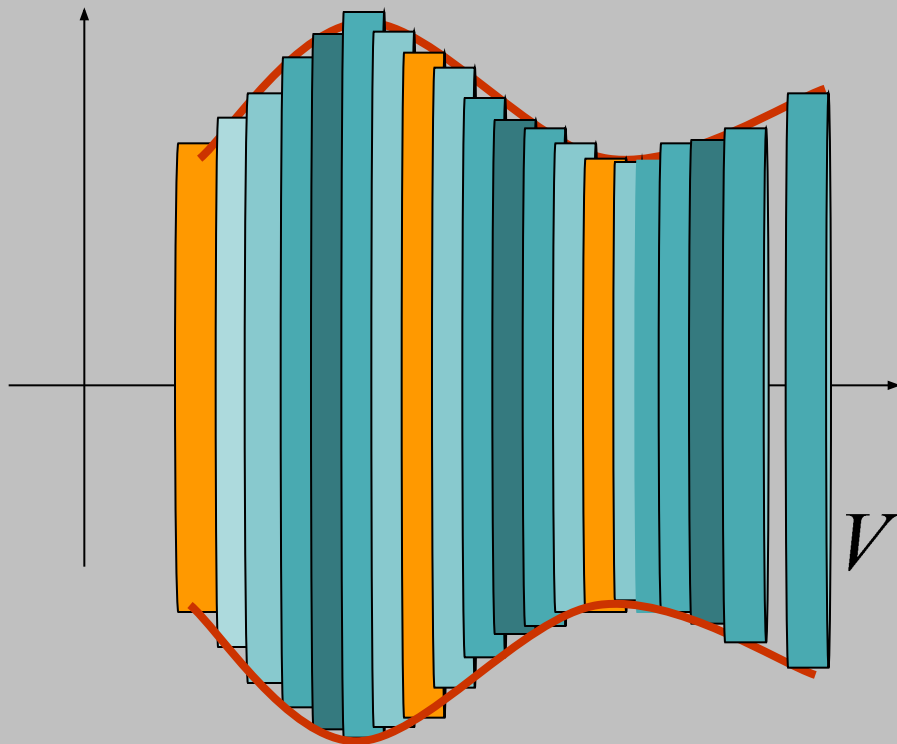
$$S(x) = \pi f^2(x_c)$$

Объём цилиндра –

$$V = S(x) \cdot \Delta x$$

● ● ●
Объем каждого цилиндра с основанием $S(x)$ и высотой Δx равен $S(x) \cdot \Delta x$, а объем всего ступенчатого тела равен сумме объёмов всех цилиндров.

$$V_{CT} = \sum_{k=1}^n S(x_k) \cdot \Delta x_k$$



Предел полученной интегральной суммы, который существует в силу непрерывности функции $S(x)$, при $n \rightarrow \infty$ называется объемом заданного тела и равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{CT} = \int_a^b S(x) dx$$

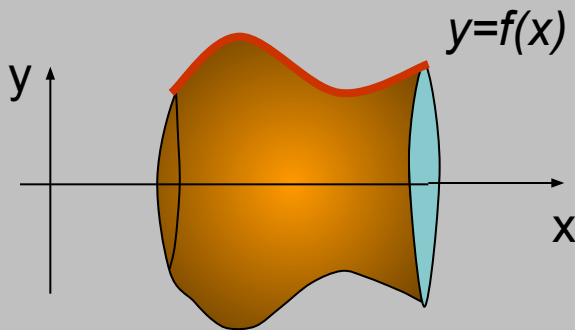
● ● ● | Предел полученной интегральной суммы, при $n \rightarrow \infty$ равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x) \cdot \Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

□ Тогда объем тела вращения вокруг оси ОХ:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

□ Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, вокруг оси ОХ, то его объём можно найти по формуле:



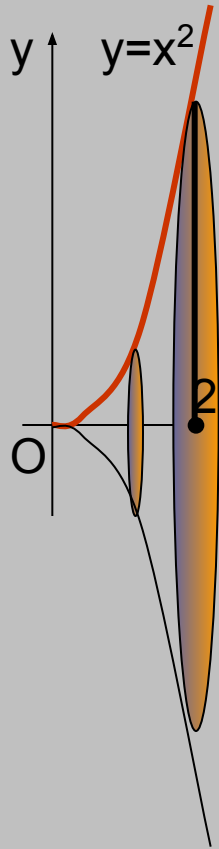
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке $[0;2]$ вокруг оси OX .

Найдите объём тела вращения.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 dx =$$

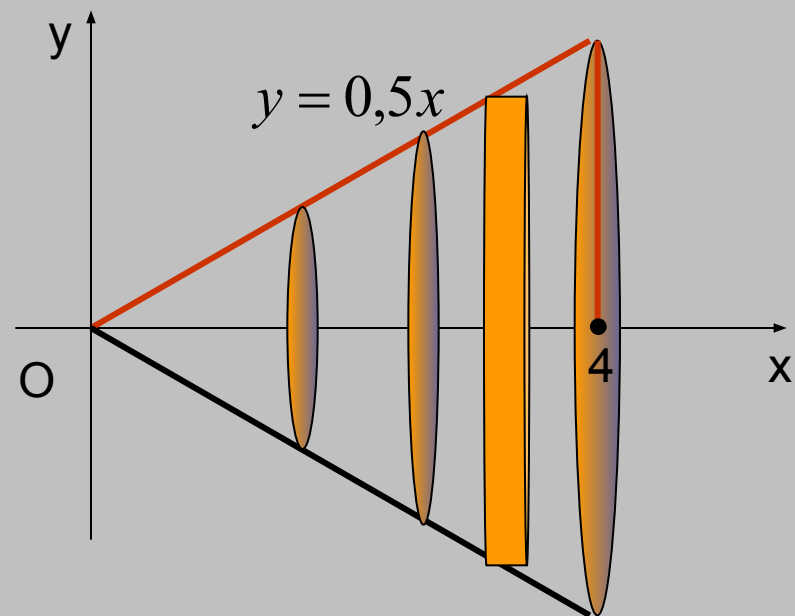
$$= \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ (куб.ед.)}$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением функции $y=0,5x$ на отрезке $[0;4]$ вокруг оси OX .

Найдите объём тела вращения.

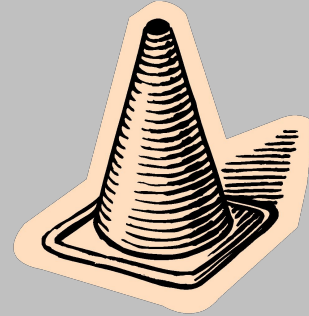
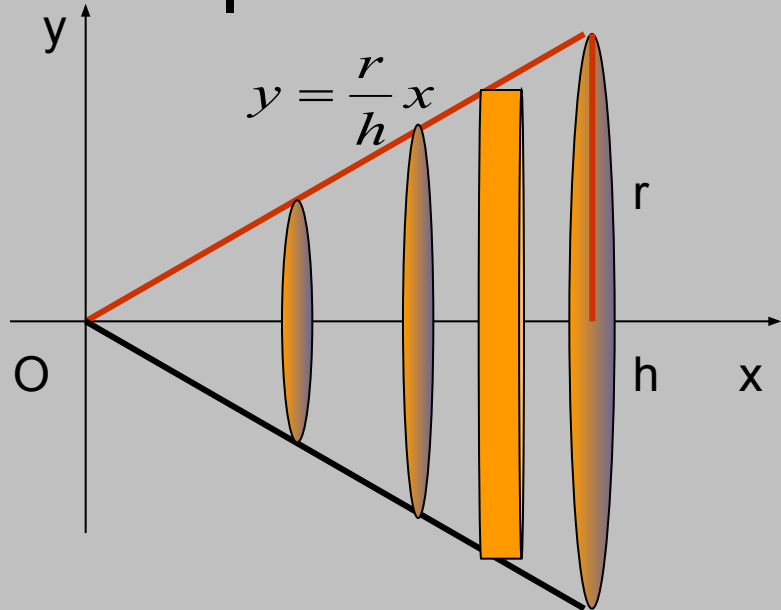
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (0,5x)^2 dx = \\ &= \pi \cdot \frac{0,25x^3}{3} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{16\pi}{3} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

● ● ●
Рассмотрим конус и найдём его объём

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

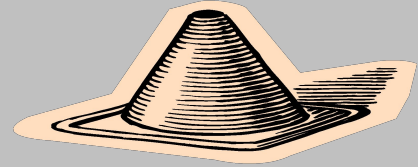
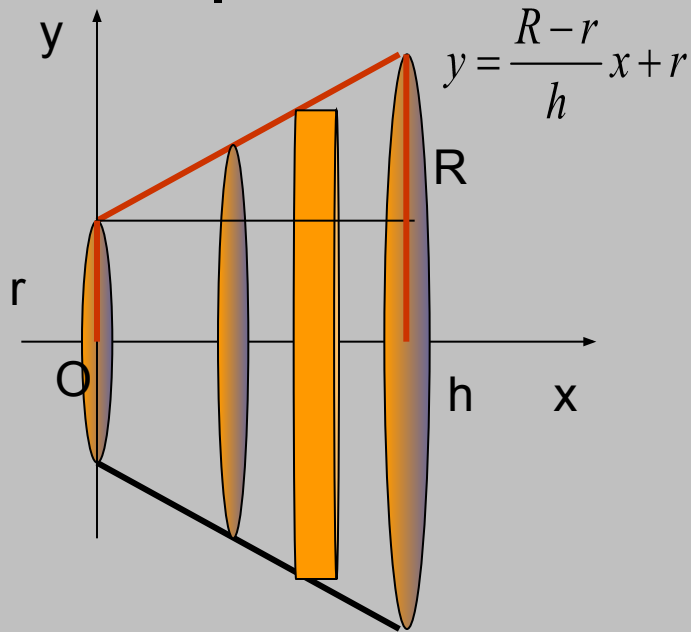


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2 x^3}{h^2 \cdot 3} \Bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Рассмотрим усечённый конус и найдём его объём

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{h}{R-r} \cdot \frac{\left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^3}{3} \Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{\pi h}{3(R-r)} (R^3 - r^3) = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

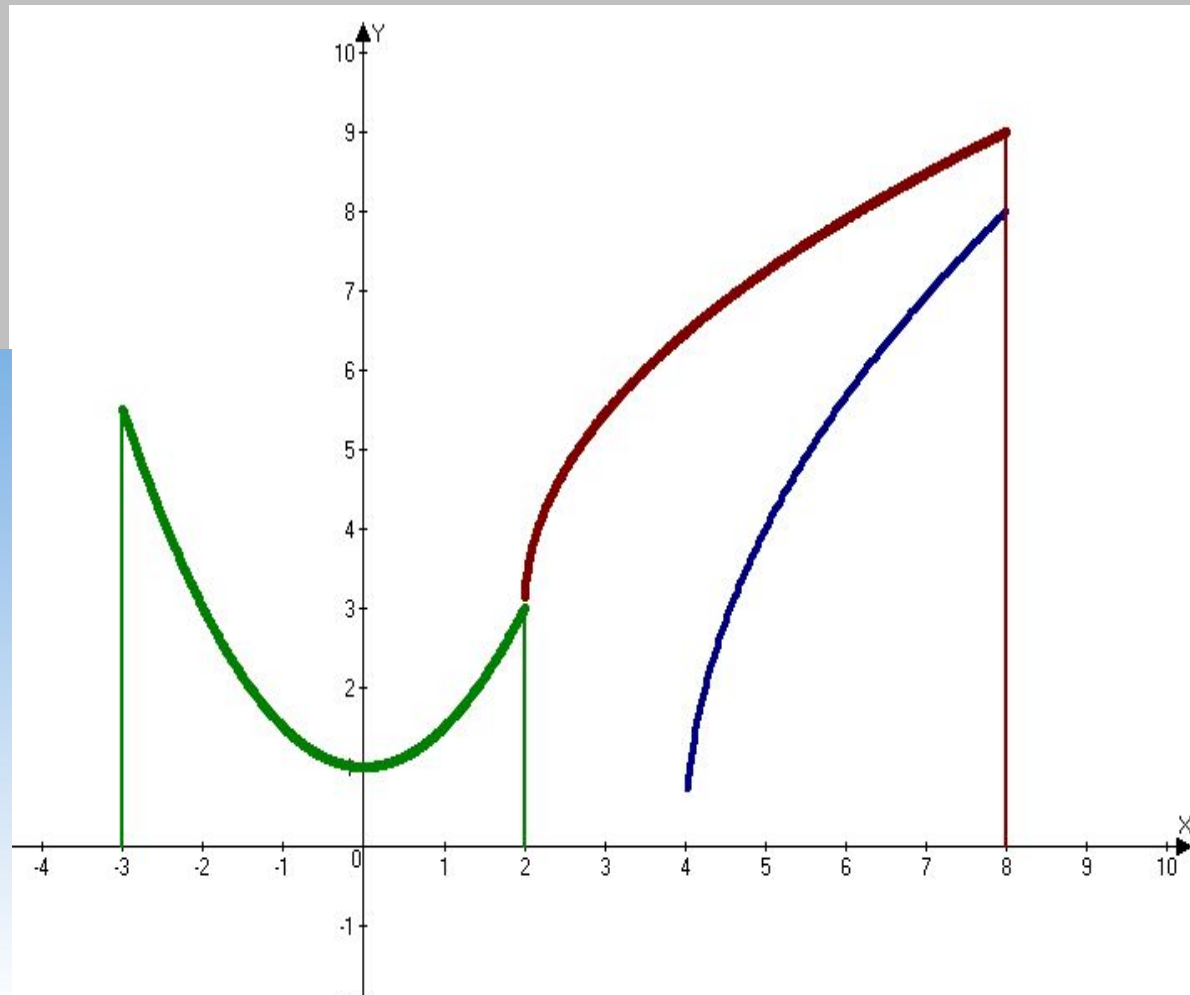
*** Найдите объём тела, если его поверхность получена вращением фигуры образованной графиками функций:

● ● ●

$$y = 0,5x^2 + 1, \text{ на } [-3; 2]$$

$$y = \sqrt{6x - 12} + 3, \text{ на } [2; 8]$$

$$y = 4\sqrt{x - 4}, \text{ на } [4; 8]$$



Вычисление определённых интегралов

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = V_{\text{основания}} + V_{\text{чаши}} - V_{\text{выемки}}$$

$$V_{\text{основания}} = \pi \int_{-3}^2 (0,5x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-3}^2 (0,25x^4 + x^2 + 1) dx = \pi \cdot 30 \frac{5}{12} \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{чаши}} = \pi \int_2^8 (\sqrt{6x-12} + 3)^2 dx = \pi \int_2^8 (6x-12 + 6\sqrt{6x-12} + 9) dx = \pi \cdot 306 \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{выемки}} = \pi \int_4^8 (4\sqrt{4x-4})^2 dx = \pi \int_4^8 16(4x-4) dx = \pi \cdot 128 \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{кубка}} = 208 \frac{5}{12} \pi \approx 654.4 \text{ куб.ед.}$$

