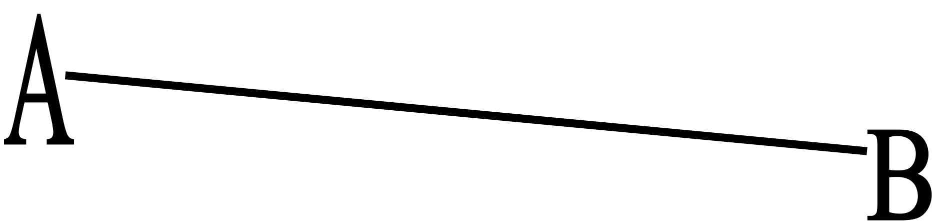
# Расстояния в пространстве

# Расстояние между двумя точками



Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:

а) куба с ребром, равным а;

Решение.

а) (рис. 1)

$PK \perp AD,\ AK = KD$

$\Delta PKH$

$\angle K = 90^\circ,\ PK = a$

$$KH = \frac{1}{2}DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$PH = \rho|P,H| = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

*Ответ:* $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

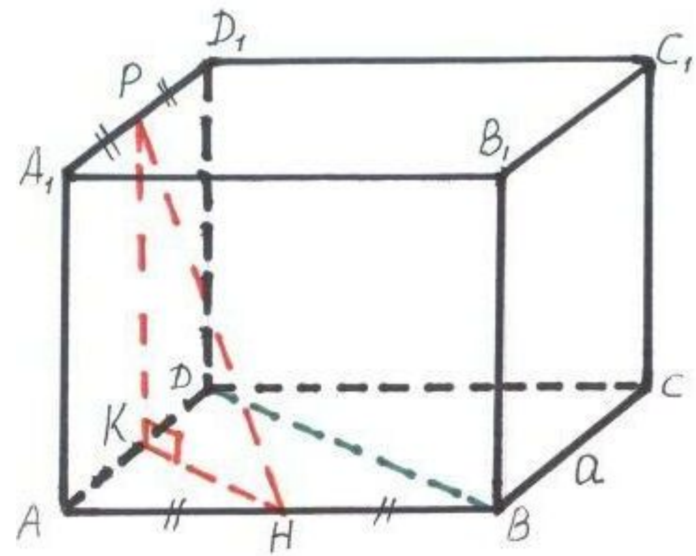


рис.1

Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:
б) тетраэдра, все рёбра которого равны a.

$$\Delta AOS, \quad \angle O = 90^o$$

$$AS = a, \quad AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

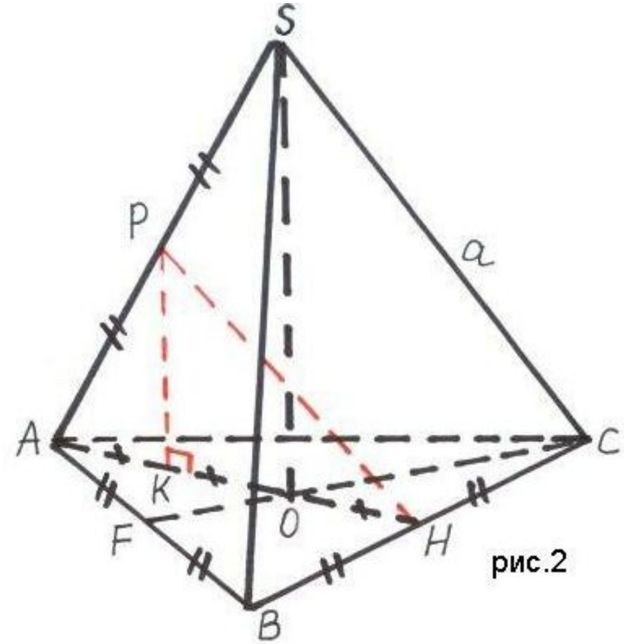


рис.2

$$\Delta PKH, \quad \angle K = 90^o$$

$$PK = \frac{1}{2} SO = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$KH = AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$PH = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

*Ответ:* $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Задача 1. Найдите расстояние между точками Р и Н – серединами скрещивающихся рёбер:

в) правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной а, и правильным треугольником в диагональном сечении.

1) $\Delta SDB$ – правильный,

$$SO=\frac{DB\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$KP\perp(ABC),\quad K\in DB,\quad DK=KO,$$

$$PK=\frac{1}{2}SO=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

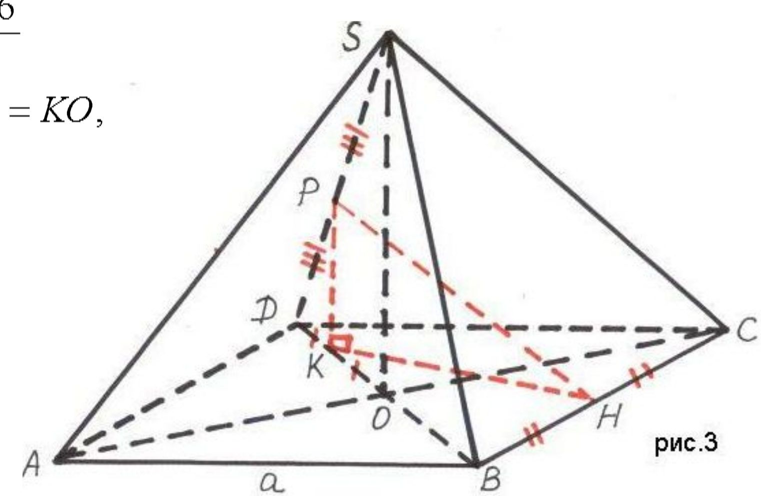



рис.3

2) $ABCD,\ KF\perp CB,\quad CF=FH$

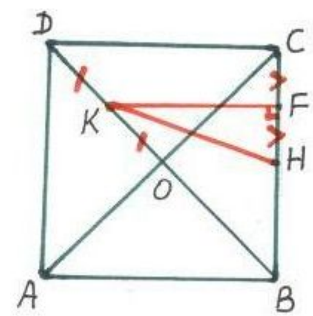
$\Delta KFH,\quad \angle F=90^{o},\quad KF=\dfrac{3}{4}a$

$FH=\dfrac{1}{4}a,$

$$KH=\sqrt{\frac{9}{16}a^2+\frac{1}{16}a^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$$

3) $\Delta PKH,\quad \angle K=90^{o},\quad PK=\dfrac{a\sqrt{6}}{4},$

$$KH=\frac{a\sqrt{10}}{4},\quad PH=\sqrt{\frac{6a^2}{16}+\frac{10a^2}{16}}=a$$




*Ответ: а*

Задача №2. На рёбрах $A_1B_1$ и $B_1C_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками M и L отмечены середины, на ребре AB взята точка K такая, что AK : AB = 3 : 4. Считая $AB = AA_1 = 1$, AD = 2, найдите расстояние от точки P – точки пересечения диагонали $B_1D$ с плоскостью KLM до точки: a) D; b) $D_1$; c) B.

(Рис.4) Построение сечения:

1) ML,
2) MK,
3) KN||ML, N= KN∩BC
4) NL,
5) LMKN – сечение

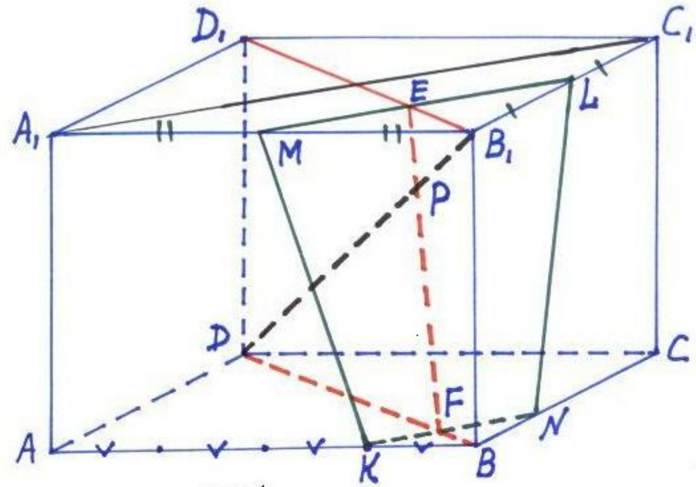


рис.4

Нахождение точки P, где

$P = B_1D \cap (KLM)$

$B_1D \subset (DBB_1)$

$(DBB_1) \cap (KLM) = EF$, $E = B_1D_1 \cap ML$,

$F = KN \cap DB$,

$B_1D \cap (KLM) = B_1D \cap EF = P$

# Нахождение расстояний

$D_1E : EB_1 = 3 : 1, \quad DF : FB = 7 : 1, \quad DB = \sqrt{5}$

a)DP-?

$\Delta EPB_1$ *подобен* $\Delta DPF$ (по 2м углам), $\Rightarrow$,

$DP : PB_1 = DF : EB_1 = 7 : 2, \quad \Rightarrow$

$$DP = \frac{7}{9} DB_1; \quad DB_1 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}, \Rightarrow,$$

$$DP = \frac{7}{9}\sqrt{6}$$

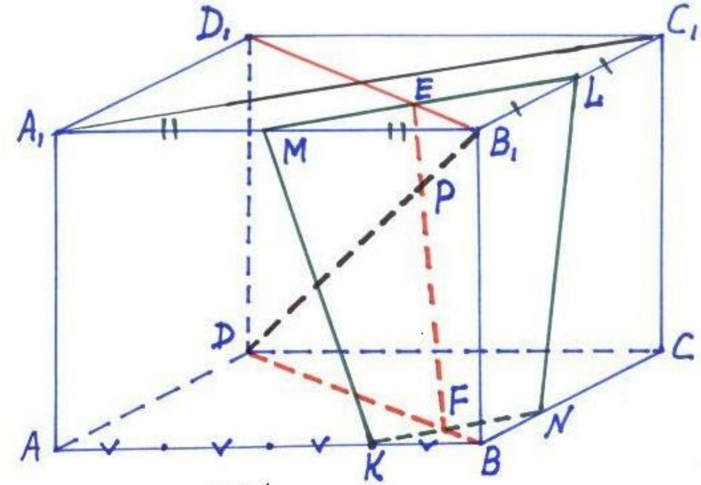


рис.4

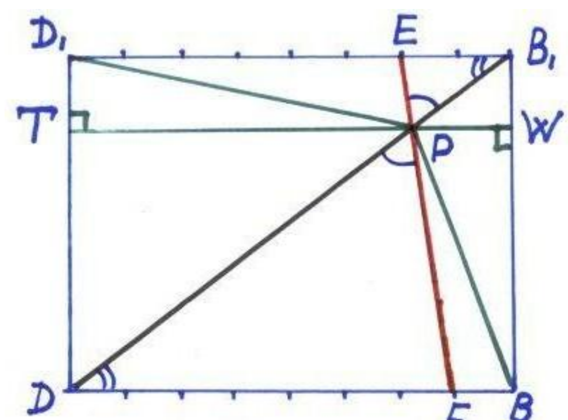


рис.5

б) $D_1P$ - ? в) $BP$ - ?

Проведем через точку P прямую $TW \parallel DB$, $T \in DD_1$, $W \in BB_1$.

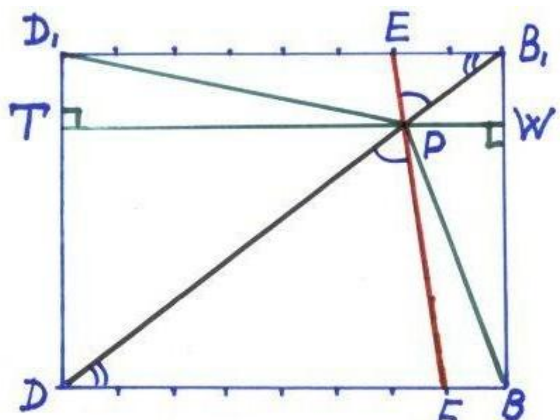



рис.5

$$\frac{TP}{PW}=\frac{DP}{PB_1}=\frac{7}{2},\quad TP=\frac{7}{9}DB=\frac{7}{9}\sqrt{5},$$

$$PW=\frac{2}{9}\sqrt{5}.$$

$$\frac{TD_1}{WB}=\frac{2}{7},\quad TD_1=\frac{2}{9}\cdot 1=\frac{2}{9},$$

$$WB=\frac{7}{9}\cdot 1=\frac{7}{9}.$$

$$\Delta TD_1P:\quad D_1P=\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{49\cdot 5}{81}}=\frac{\sqrt{249}}{9}$$

$$\Delta PWB:\quad PB=\sqrt{\frac{20}{81}+\frac{49}{81}}=\frac{\sqrt{69}}{9}$$

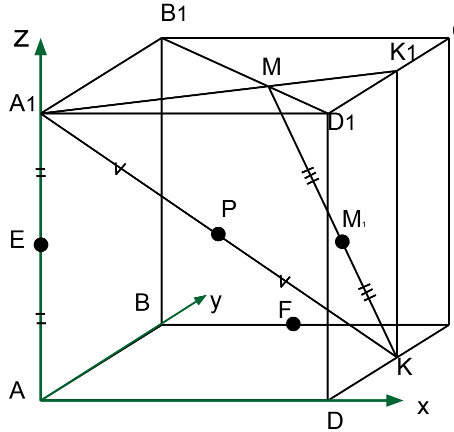
Ответ: $DP=\frac{7}{9}\sqrt{6};\quad D_1P=\frac{\sqrt{249}}{9};\quad PB=\frac{\sqrt{69}}{9}.$

# Координатный метод


$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Задача 3. (МФТИ) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точки $E$, $F$ и $K$ – середины рёбер $AA_1$, $BC$ и $CD$ соответственно, а точка $M$ расположена на диагонали $B_1D_1$ так, что $B_1M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками:

а) $E$ и $K$; б) $E$ и $M$; в) $M_1$ и $K_1$, где $M_1$ – середина отрезка $KM$, $K_1$ – середина ребра $C_1D_1$; г) $F$ и $P$, где $P$ – середина отрезка $A_1K$.




$$E\ (0;0;\frac{1}{2}),\quad K(1;\frac{1}{2};0).\quad F(\frac{1}{2};1;0),$$

$$M(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1),\quad C_1(1;1;1),\quad D_1(1;0;1)\quad A_1(0;0;1)$$

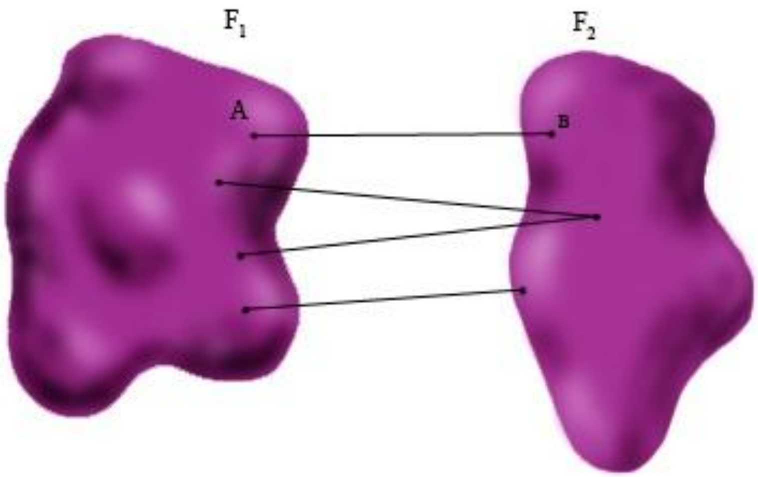
$$M_1\left(\frac{5}{6};\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right)\quad K_1(1;\frac{1}{2};1)\quad P(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{2})$$

$$EK=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2},\qquad EM=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{29}}{6}\qquad M_1K_1=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{12}$$

$$FP=\sqrt{0+\frac{9}{16}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

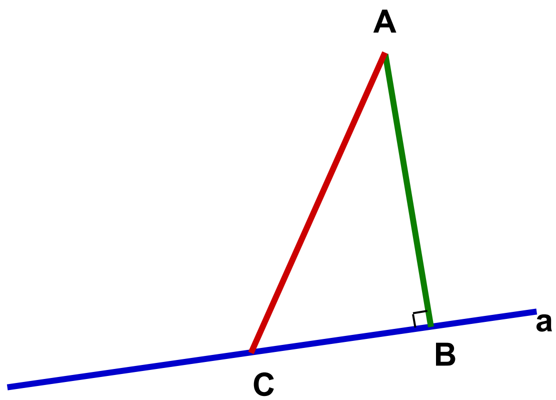
Ответ: $EK=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad EM=\frac{\sqrt{29}}{6},\quad M_1K_1=\frac{\sqrt{41}}{12},\quad FP=\frac{\sqrt{13}}{4}$

# Расстояние между фигурами




Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре $F_1$, а другая - фигуре $F_2$, существует наименьшее, то его называют <u>расстоянием между фигурами</u> $F_1$ и $F_2$.

# Расстояние от точки до прямой




Расстояние от точки до прямой – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

$$AB = \rho \left| A, a \right|$$

Задача №4. (рис.7) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине $C$, боковое ребро призмы равно меньшей стороне основания. В грани $AA_1C_1C$ точкой $O$ отмечен центроид этой грани. Считая $AC = a$, найдите расстояние до прямой $BO$ от точки:

а) $A_1$; b) $B_1$; c) $C_1$.

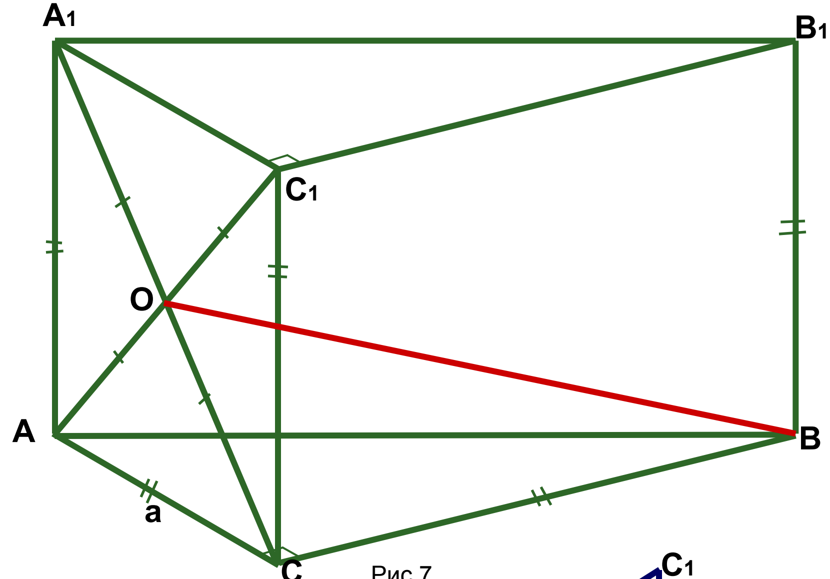


Рис.7

1) $AC = BC = AA_1 = a, \quad \angle ACB=90°,$

$AA_1C_1C, \; C_1CBB_1$ – квадраты

2) (рис.8)

$$\Delta AC_1B, \quad AB = AC_1 = C_1B = a\sqrt{2}$$

тогда $BO$ – медиана и высота,

$$C_1O \perp BO, \quad C_1O = \rho|C_1, BO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

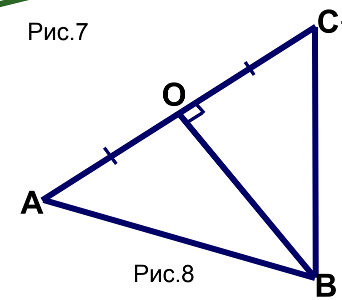


Рис.8

3)(рис.9)

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ AC - np_{(ABC)}A_1C \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C \perp BC, \quad т.е.$$

$\Delta A_1CB$ – прямоугольный.

$A_1N \perp BO,$

$A_1N = \rho|A_1, BO|$

$$S_{\Delta A_1CB} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

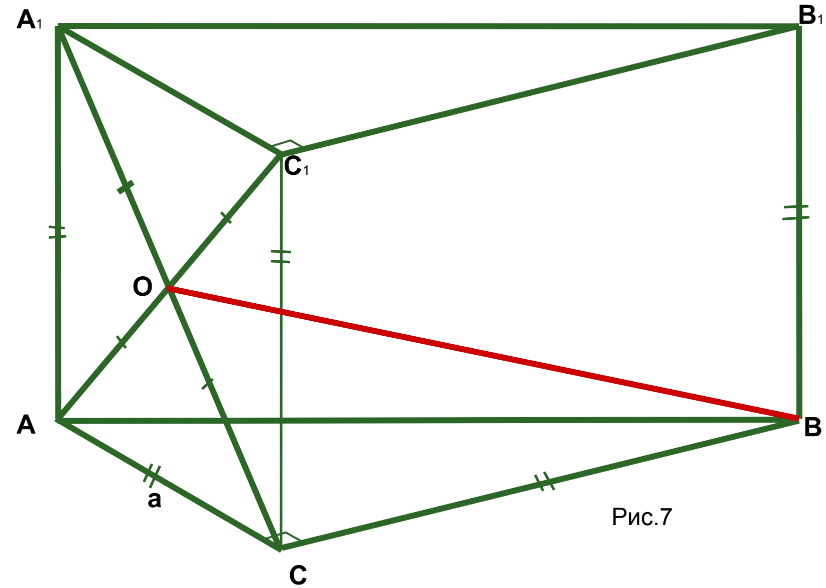


Рис.7

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}, \quad CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BO = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot A_1N \Rightarrow$$

$$A_1N = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

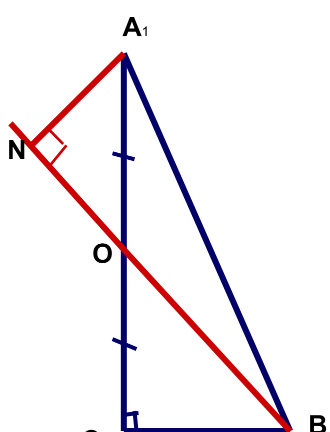


Рис.9

4) (рис.10)

$$S_{MM_1B_1B}=2S_{\Delta OB_1B}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot OB\cdot B_1K,\ где\ B_1K\perp OB,\ B_1K=\rho|B_1,OB|$$

$$B_1K=\frac{S_{MM_1B_1B}}{OB},\quad OB=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{MM_1B_1B}=BB_1\cdot MB=a\cdot MB$$

$$MB=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{MM_1B_1B}=\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

$$B_1K=\frac{\frac{a^2\sqrt{5}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{a\sqrt{30}}{6}$$

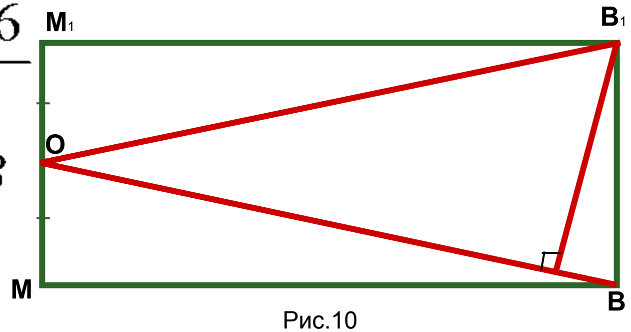


Рис.10

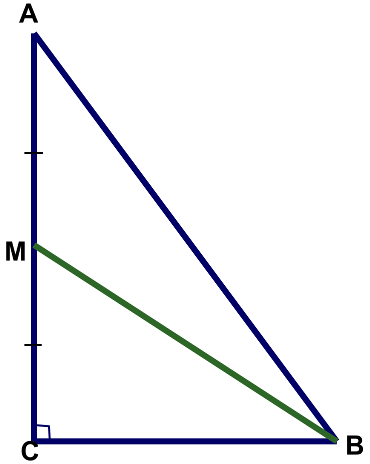


Рис.11

$$Ответы:\quad \rho|A_1,BO|=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\rho|B_1,BO|=\frac{a\sqrt{30}}{6}$$

$$\rho|C_1,BO|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

# Расстояние от точки до плоскости

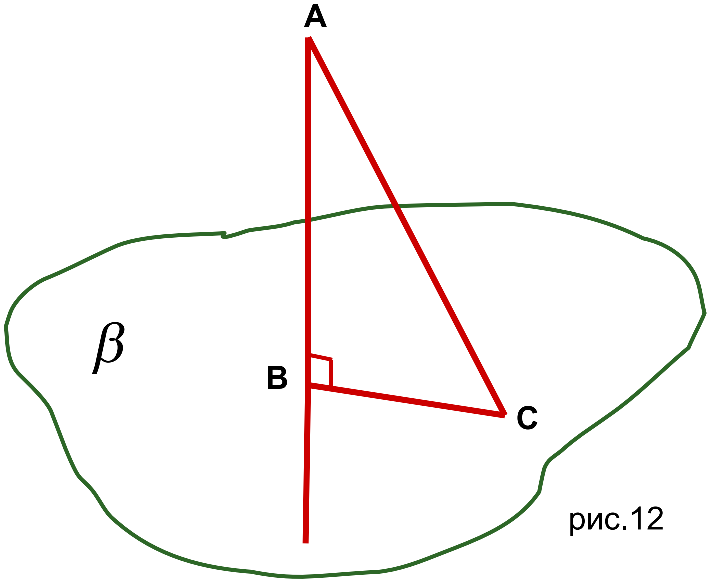



рис.12

<u>Расстояние от точки до плоскости</u> – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

$$\rho\left|A, \beta\right| = AB$$

Пусть надо найти расстояние от точки *A* до плоскости *β* и пусть точка *A* лежит в плоскости α, α∩β= c.

Проведём $AB \perp c$, $BP \perp c$, $\angle(\alpha,\beta) = \angle PBC$, $AN \perp PB$.

$$\left.\begin{aligned} &c \perp AB \\ &c \perp PB \\ &AB \cap PB = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow c \perp (PBA), \quad AN \subset (PBA), \Rightarrow, c \perp AN$$

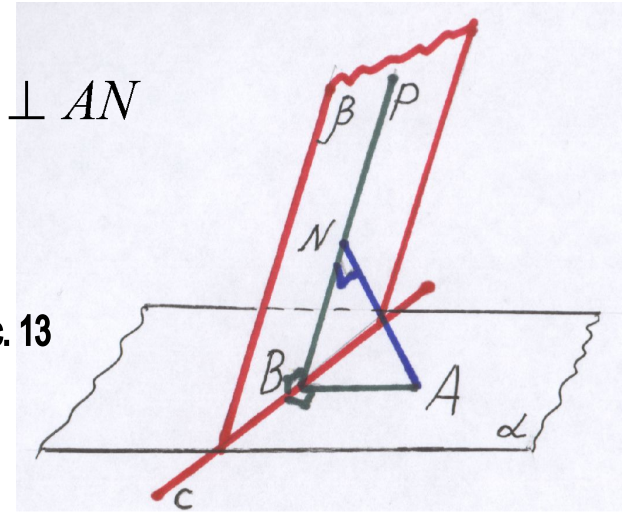
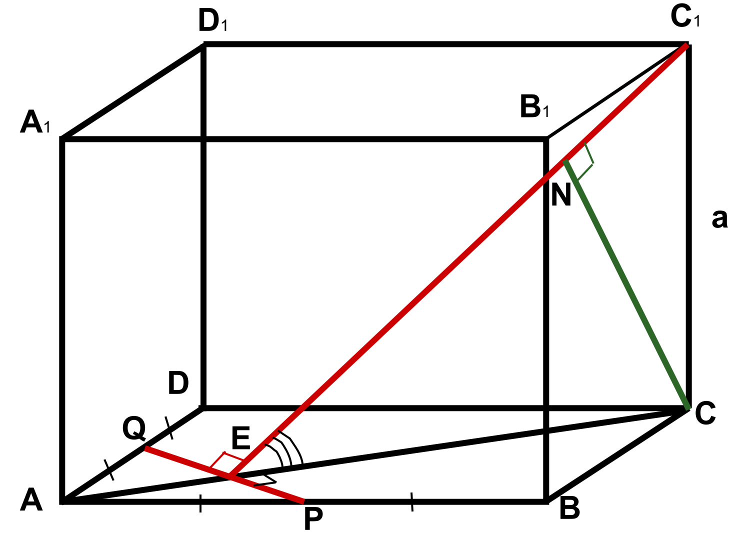



рис. 13

$$\left.\begin{aligned} &AN \perp c \\ &AN \perp PB \\ &c \cap PB = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow AN \perp \beta, \Rightarrow, \rho\left|A, \beta\right| = AN$$

Задача № 5 (рис.14 ) На рёбрах *AB* и *AD* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками *P* и *Q* отмечены середины. Считая ребро куба равным *a*, найдите расстояние до плоскости $C_1PQ$ от точки: а) *C*; б) $A_1$; в) *D*.




а) $C \in (ABC)$, $\left.\begin{array}{l} AC \perp DB \\ QP \parallel DB \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp QP, \quad QP \cap AC = E$

$$\left.\begin{array}{l} EC - np_{(ABC)} EC_1 \\ EC \perp QP \end{array}\right\} \Rightarrow EC_1 \perp QP$$

$$\left.\begin{array}{l} EC_1 \perp QP \\ EC \perp QP \\ EC = (ABC) \cap (C_1PQ) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1EC = \angle((C_1PQ),(ABC))$$

$$CN \perp EC_1 \Rightarrow CN = \rho|C;(C_1PQ)|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CC_1E \\ \angle C = 90^0 \\ CC_1 = a \\ CE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3}{4}a\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow CN = \frac{CE \cdot CC_1}{EC_1} = \frac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot a}{\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2 \cdot 2}{16}}} = \frac{3a^2\sqrt{2} \cdot 4}{4 \cdot a\sqrt{2}\sqrt{17}} = \frac{3a}{\sqrt{17}}$$

б) (рис.15) $A_1 \in (A_1B_1C_1)$, $(A_1B_1C_1) \cap (C_1PQ) = b$, $b \parallel QP$, $C_1E \cap AA_1 = A_2$,

$AA_2 : A_1A_2 = AE : A_1C_1 = 1:4$, $\Rightarrow$, $A_1A_2 = \dfrac{4a}{3}$

$$\left.\begin{matrix} A_1C_1 \perp b \\ A_2C_1 \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle A_1C_1A_2 = \angle((A_1B_1C_1),(C_1PQ))$$

$$\boldsymbol{A_1M \perp A_2C_1 \;\Rightarrow\; A_1M = \rho/A_1,(C_1PQ)/}$$

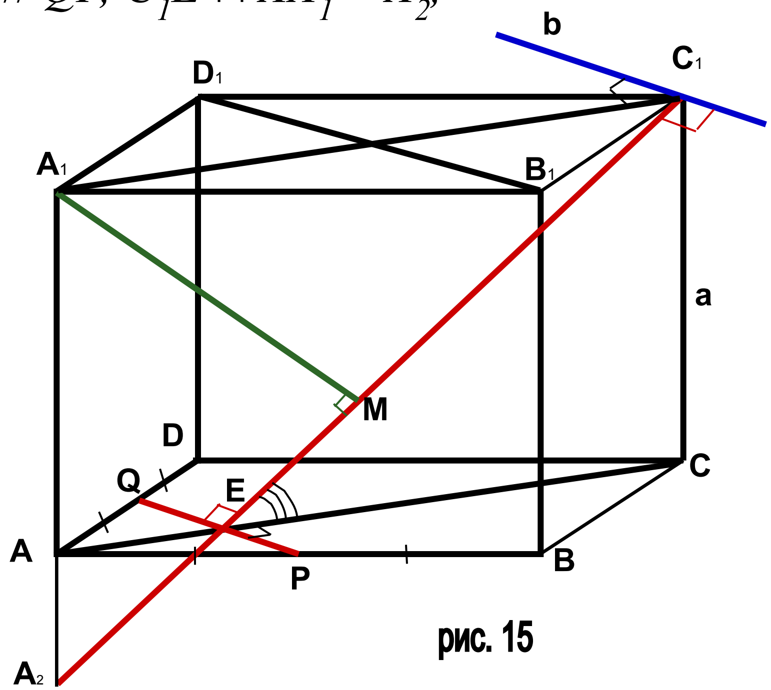


рис. 15

$$\left.\begin{matrix} \Delta C_1A_1A_2 \\ \angle A_1 = 90^0 \\ A_1C_1 = a\sqrt{2} \\ A_1A_2 = \dfrac{4a}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1M = \frac{\dfrac{4a}{3}\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{16a^2}{9} + 2a^2}} = \frac{4a\cdot a\sqrt{2}}{3\cdot\dfrac{a}{3}\sqrt{34}} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$$

в) (рис.16) $D \in (ABC)$, $(ABC) \cap (C_1PQ) = PQ$, $PQ \cap DC = T$, $TD : DC = 1 : 2$,

$TC_1 \cap DD_1 = D_2$, $DD_2 : DD_1 = 1 : 3$, $DD_2 = a/3$.

$$\left.\begin{array}{l} DR \perp PQ \\ RD_2 \perp PQ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_2RD = \angle((ABC),(C_1PQ))$$

$DF \perp RD_2 \Rightarrow$, $DF = \rho | D,(C_1PQ)$

|

$$\left.\begin{array}{l} \Delta D_2DR \\ \angle D = 90^0 \\ DD_2 = \dfrac{a}{3} \\ DR = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow DF = \frac{\dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{8}}} = \frac{\dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{a\sqrt{17}}{3 \cdot 2\sqrt{2}}} = \frac{a}{\sqrt{17}}$$

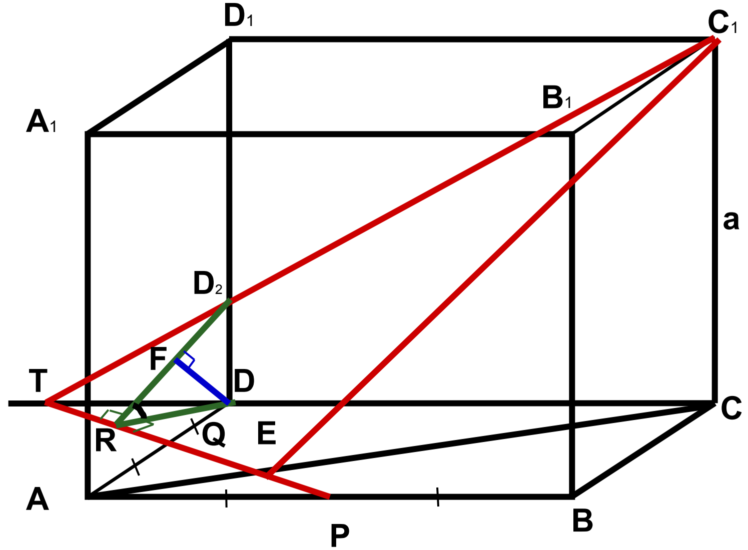


Рис.16

*Ответ:* $\dfrac{3a}{\sqrt{17}}$; $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$; $\dfrac{a}{\sqrt{17}}$

Задача №6. (рис. 17). В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, её боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и AB : AD : MB = = 1 : 2 : 1. Считая AB = *a*, найдите расстояние до плоскости MCD от точки P, где точка P лежит на диагонали BD и отношение BP : BD равно:

а) 1 : 4; б) 1 : 2; в) 3 : 4.

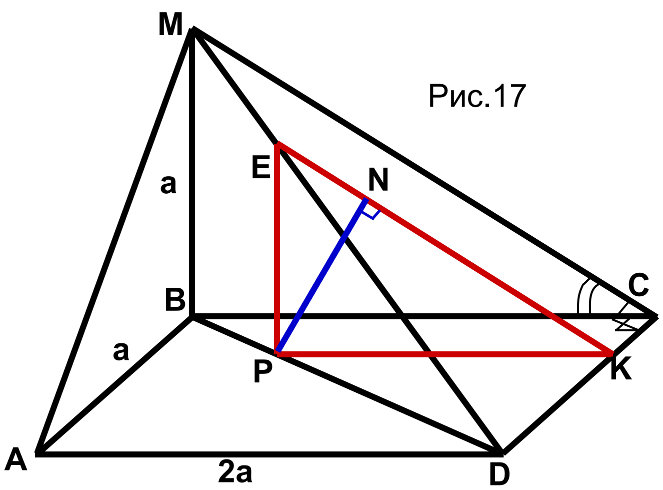



Рис.17

AB = MB = a, AD = 2a.

$$\left.\begin{aligned} &BC \perp DC \\ &MC \perp DC \\ &DC = (ABC) \cap (MDC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle MCB = \angle((ABC),(MDC))$$

PN = ρ|P,(MCD)|.

**а) BP : BD = 1 : 4.**

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{3}{4}a,\quad PK = \frac{3}{4}\cdot 2a = \frac{3a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{3a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho|P,(MCD)| = \frac{\frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{2}a}{\frac{3a\sqrt{5}}{4}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

**б) BP : BD = 1 : 2**

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{2}a,\quad PK = \frac{1}{2}\cdot 2a = a,\quad EK = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$\rho\left|P,(MCD)\right| = \frac{\frac{1}{2}a\cdot a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

**в) BP : BD = 3 : 4**

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{4}a,\quad PK = \frac{1}{4}\cdot 2a = \frac{a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho\left|P,(MCD)\right| = \frac{\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$

Ответ: $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10},\quad \dfrac{a\sqrt{5}}{5},\quad \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$

# Координатный метод

$\beta$ $ax + by + cz + d = 0$,

$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$,

$$\rho|\beta, M_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача №7. (МИФИ). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 12. На рёбрах $AA_1$, $B_1C_1$, $CD$ взяты точки E, $F_1$ и G такие, что $AE : EA_1 = 1 : 3$, $B_1F_1 : F_1C_1 = 1 : 1$, $CG : GD = 1 : 1$. Найти расстояние от точки $B_1$ до плоскости $(EF_1G)$.

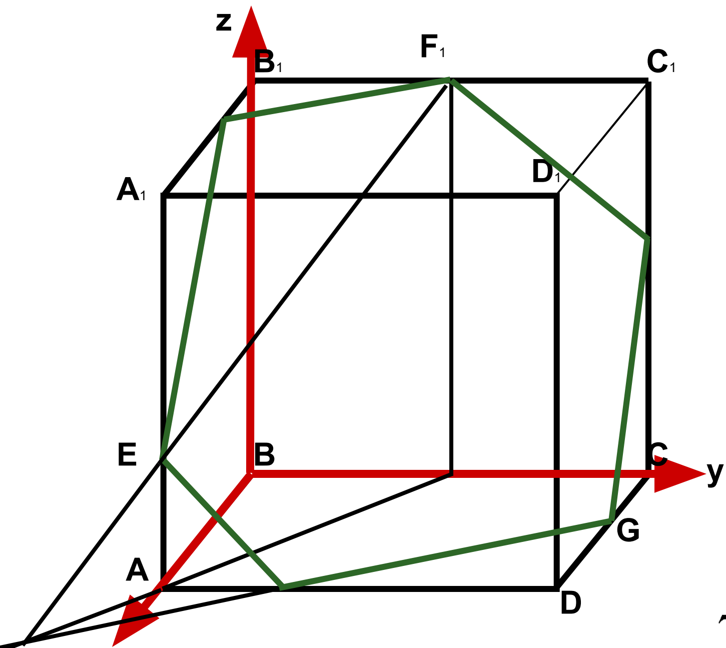


Рис.18

$E(12;0;3)$, $G(6;12;0)$, $F_1(0;6;12)$

$(EF_1G)$: $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} 12a + 3c + d = 0 \\ 6a + 12b + d = 0 \\ 6b + 12c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b = -12c - d \\ 6a = 24c + 2d - d = 24c + d \\ 48c + 2d + 3c + d = 0 \end{cases}$$

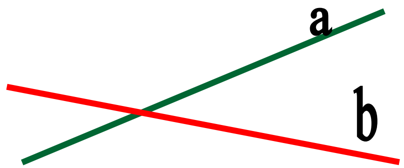
$$c = -\frac{d}{17} \qquad a = -\frac{7d}{102} \qquad b = -\frac{5d}{102}$$

$$-\frac{7d}{102}x - \frac{5d}{102}y - \frac{6d}{102}z + d = 0 \qquad 7x + 5y + 6z - 102 = 0$$

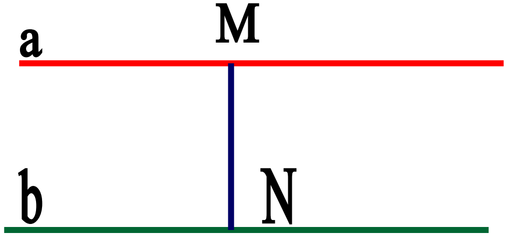
$B_1(0;0;12)$

$$\rho|B_1,(EF_1G)| = \frac{|0+0+6\cdot 12-102|}{\sqrt{49+25+36}} = \frac{30}{\sqrt{110}} = \frac{3\sqrt{110}}{11}$$

# Расстояние между двумя прямыми



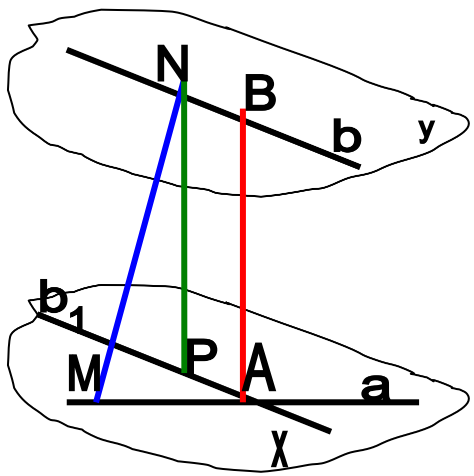

$\rho|a,b| = 0$




$\rho|a,b| = MN$

# Скрещивающиеся прямые

<u>Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми</u> – длина их общего перпендикуляра.




Заметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Задача № 7. (рис.19) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте общий перпендикуляр прямых $A_1D$ и $BC_1$.

Найдите расстояние между прямыми, если ребро куба равно *a.*

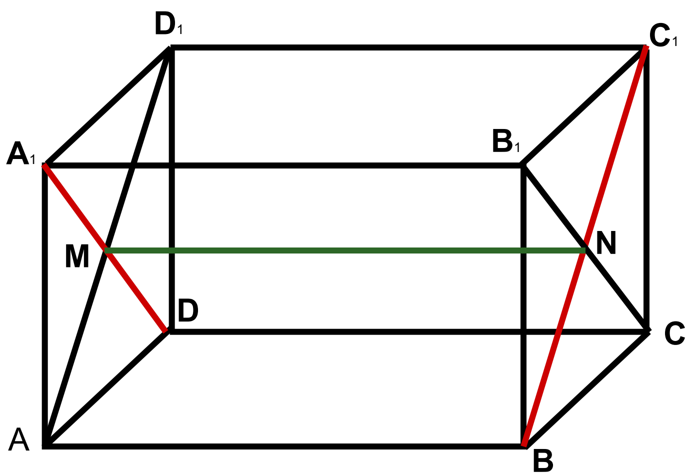



рис. 19

$AD_1 \cap DA_1 = M, \ BC_1 \cap CB_1 = N,$

$MN \perp AD_1, MN \perp BC_1,$

$$MN = \rho|A_1D, BC_1|, \ \ MN = a.$$

Задача № 8. (рис.20) (Новосибирский государственный университет). Найдите расстояние между диагоналями $AD_1$ и $DC_1$ двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $a$.

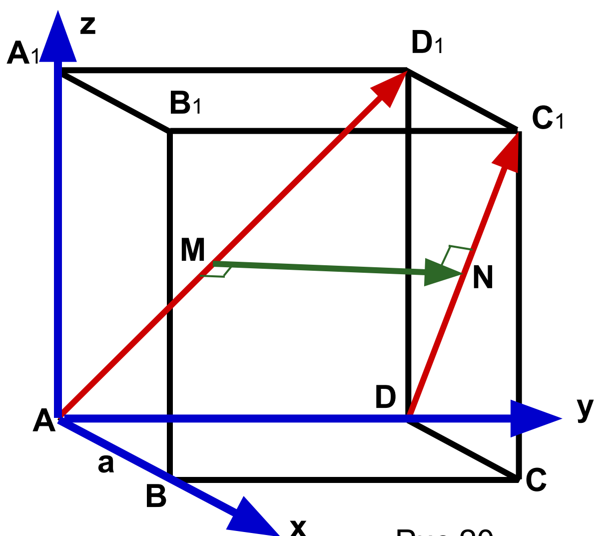


Рис.20

$A(0;0;0)$, $D(0;a;0)$, $D_1(0;a;a)$, $C_1(a;a;a)$.

$MN \perp AD_1$, $MN \perp DC_1$.

$$\overline{AD_1}(0;a;a),\quad \overline{DC_1}(a;0;a),\quad \overline{D_1D}(0;0;-a)$$

$$\overline{MN} = \overline{MD_1} + \overline{D_1D} + \overline{DN} = x\overline{AD_1} + \overline{D_1D} + y\overline{DC_1} = x\overline{(0;a;a)} + \overline{(0;0;-a)} + y\overline{(a;0;a)} =$$
$$= \overline{(ya;xa;xa-a+ya)}$$

$$\overline{MN} \perp \overline{AD_1} \Rightarrow \overline{MN} \cdot \overline{AD_1} = 0 \Rightarrow 0 + xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

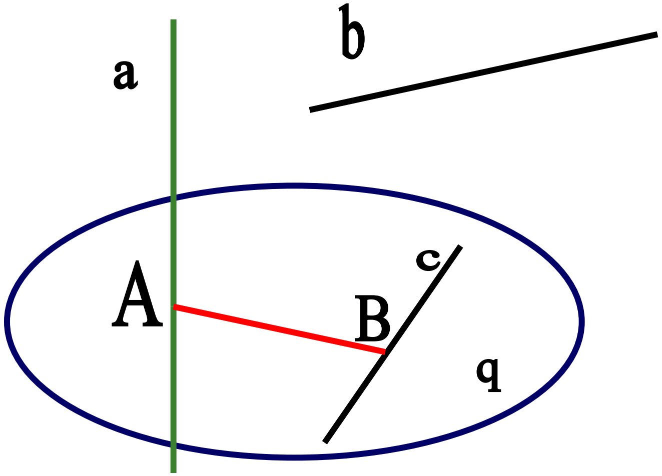
$$\overline{MN} \perp \overline{DC_1} \Rightarrow \overline{NM} \cdot \overline{DC_1} = 0 \Rightarrow ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

$$\begin{cases} xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0, \\ ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xa^2 - ya^2 = 0, \\ 2ya^2 + xa^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3xa^2 - a^2 = o \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

$$\overline{MN}(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}), \Rightarrow, \quad NM = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

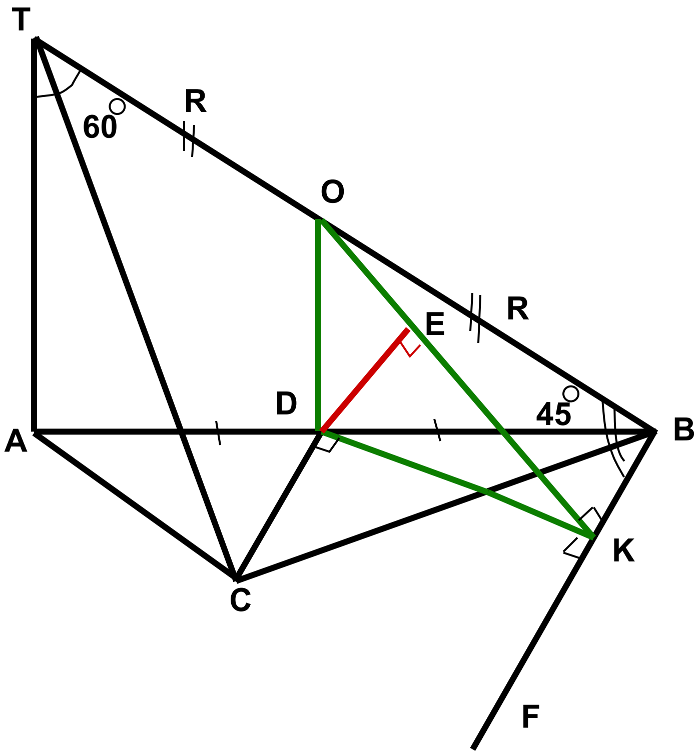
Ответ: $\rho\left|AD_1, DC_1\right| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

# Ещё один подход к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми.




$a \perp q$, c – пр$_q b$, A – пр$_q a$, $AB \perp c$, $AB = \rho|\, a,b\, |$

Задача № 9 (рис.21) МГТУ им. Н.Э. Баумана. В сферу радиуса R вписана пирамида ТАВС, основанием которой служит прямоугольный треугольник АВС, а высота пирамиды совпадает с ребром ТА. Боковое ребро ТВ образует с высотой пирамиды угол 60°. А угол между ТВ и медианой основания CD, проведённой к гипотенузе АВ, равен 45°. Какую **наименьшую** площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро ТВ?




(ОDК), BK ⊥ (ОDК), ⇒, CD ⊥ (ODK)

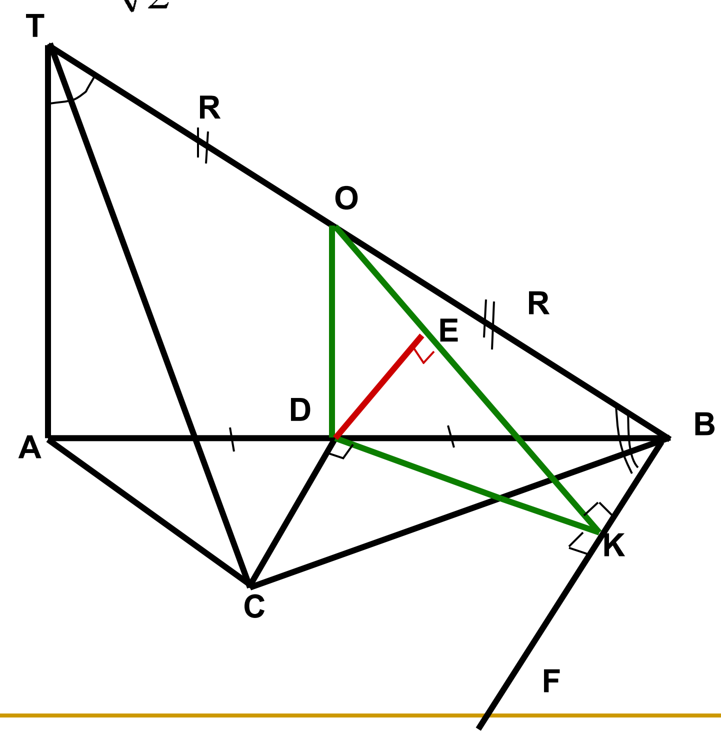
$$\left.\begin{array}{l} D - np_{(ODK)}CD \\ OK - np_{(ODK)}OB \end{array}\right\} \Rightarrow \rho|CD;TB| = \rho|D;OK| = OE$$

$$\Delta ODB \quad \angle D = 90^0, \quad \angle B = 30^0, \quad OD = \frac{R}{2}, \quad DB = R \cdot \cos 30^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = CD$$

$$\Delta OKB \quad OK = KB = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

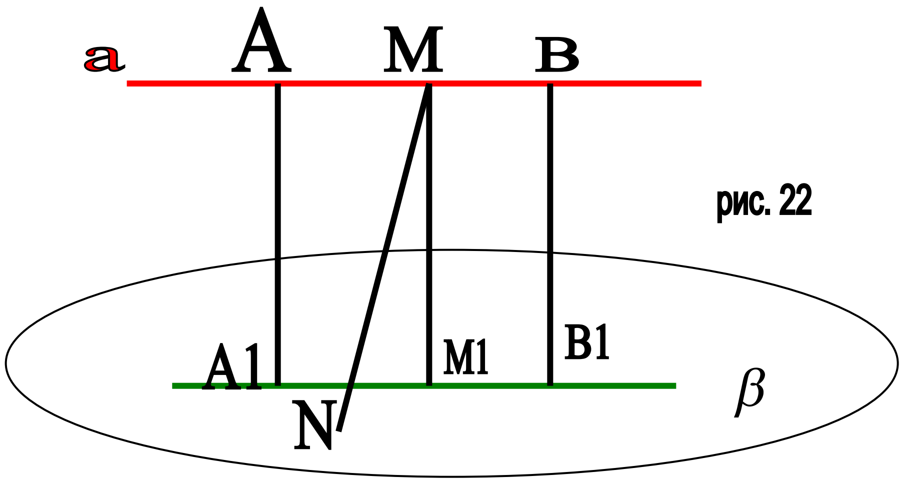
$$\Delta ODK \quad DK = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2} \quad DE = \frac{OD \cdot DK}{OK} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2\sqrt{6}}{16}$$




Ответ: $S_{\min} = \dfrac{R^2\sqrt{6}}{16}$

# Расстояние от прямой до плоскости




<u>За расстояние от прямой до параллельной ей плоскости</u> берут расстояние от любой (наиболее удобной для решения задачи) точки прямой до плоскости,

Задача № 10. (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Основанием пирамиды ТАВС служит равносторонний треугольник со стороной, равной 8, а её высота проходит через середину стороны основания АВ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро ТА, если известно, что **прямая,** проходящая через середину высоты пирамиды и середину стороны основания ВС, **параллельна секущей плоскости и находится от неё на расстоянии, равном 1.**

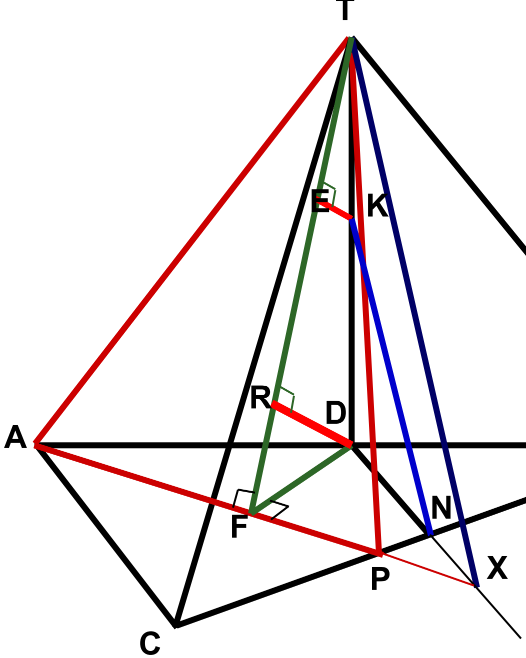



рис. 23

TX || КN, X=TX ∩ DN.   AX ∩ CB=P,

ΔAPT – искомое сечение.

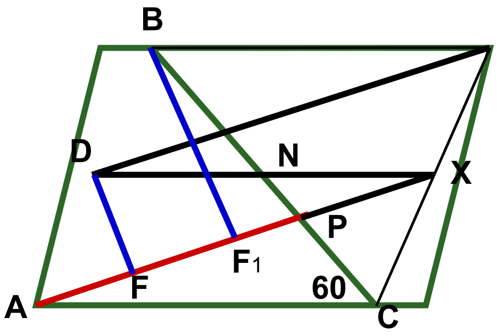
∠TFD=∠((ATP),(ABC)),

КЕ ⊥ TF, ⇒, КЕ = ρ|К,(АТР)| = ρ|КN,(TAP)|=1.

DR ⊥ TF, DR = 2.

$$S_{TAP} = \frac{1}{2} AP \cdot TF$$

рис. 24




BP : PC = 2 : 1, $S_{ABC}=\dfrac{64\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$

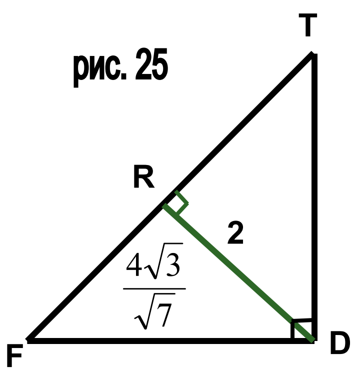
$$S_{ABP}=\frac{2}{3}S_{ABC}=\frac{32}{\sqrt{3}}$$

$\Delta$APC, AC = 8, PC=8/3, $\angle$C=60°, по теореме косинусов

$$AP=\sqrt{64+\frac{64}{9}-2\cdot 8\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{8\sqrt{7}}{3}$$

$$S_{ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot BF_1=\frac{32}{\sqrt{3}}\qquad BF_1=\frac{2\cdot 32\cdot 3}{\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\qquad DF=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

рис. 25

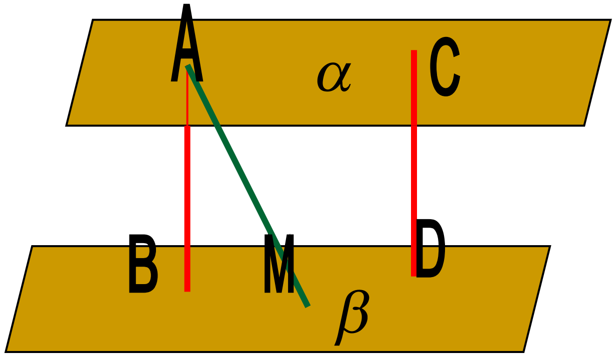



$\Delta$FDT: $FR=\sqrt{\dfrac{16\cdot 3}{7}-4}=\sqrt{\dfrac{48-28}{7}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$$TF=\frac{FD^2}{FR}=\frac{\frac{16\cdot 3}{7}}{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}=\frac{24}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}\qquad S_{TAP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{8\sqrt{7}}{3}=\frac{32}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $S_{TAP}=\dfrac{32}{\sqrt{5}}$

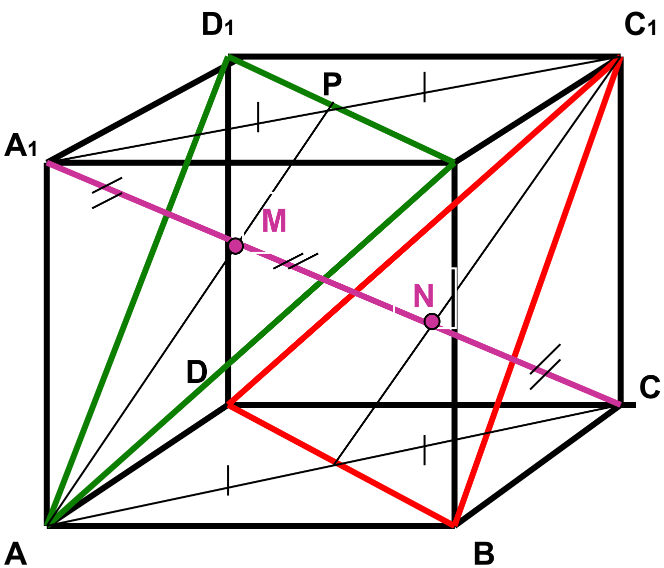
# Расстояние между параллельными плоскостями




Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости

Задача № 11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между плоскостями $AB_1D_1$ и $BDC_1$, если $AB = a$. (рис.27)

рис. 27




$(AB_1D_1) \parallel (BDC_1)$.

**$A_1C \perp D_1B_1$ и $A_1C \perp AD_1$, $D_1B_1 \cap AD_1 = D_1$, ⇒, $A_1C \perp (AB_1D_1)$, ⇒, $A_1C \perp (BDC_1)$**

Докажем, что $\mathbf{A_1C \perp D_1B_1}$
(остальное доказывается аналогично)

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 - np_{(A_1D_1B_1)}A_1C \\ A_1C_1 \perp D_1B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C \perp D_1B_1$$

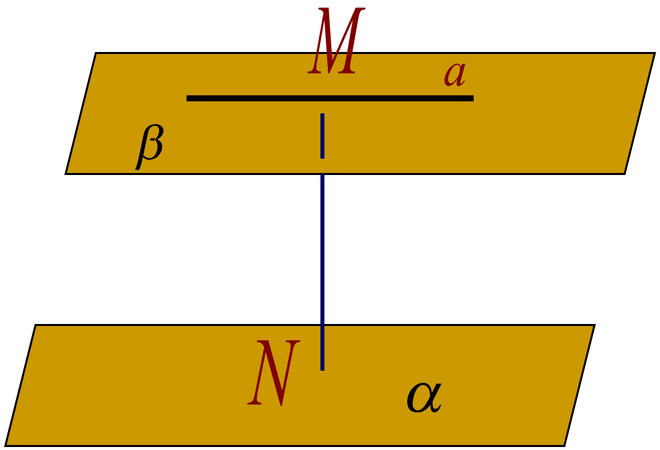
$A_1C \cap (AB_1D_1) = M$, $A_1C \cap (BDC_1) = N$, $MN = \rho|(AB_1D_1),(BDC_1)|$,

По теореме Фалеса $A_1M = MN = NC$

$$MN = \frac{1}{3}A_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\rho|(AB_1D_1),(BDC_1)| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Если через прямую, параллельную плоскости, провести плоскость, параллельную данной плоскости, то можно находить расстояние между прямой и плоскостью как расстояние между параллельными плоскостями.




$a \parallel \alpha$ , построим плоскость $\beta \parallel \alpha$, $a \subset \beta$.

$\rho|a,\alpha| = \rho|\alpha,\beta|$

$$(CPA_1) \,||\, (MNC_1),\ A_1C \subset (CPA_1),\ \Rightarrow,$$

$$\rho|A_1C, (MNC_1)| = \rho|(CPA_1),(MNC_1)| = \rho|K,(CPA_1)|$$

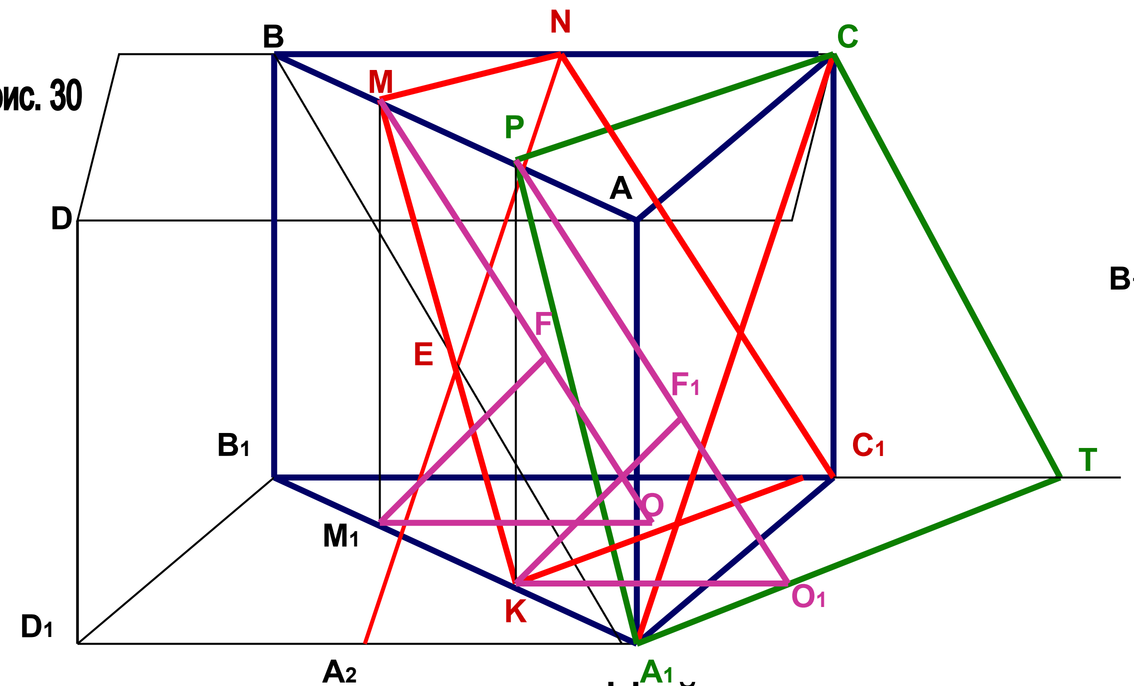



рис. 30

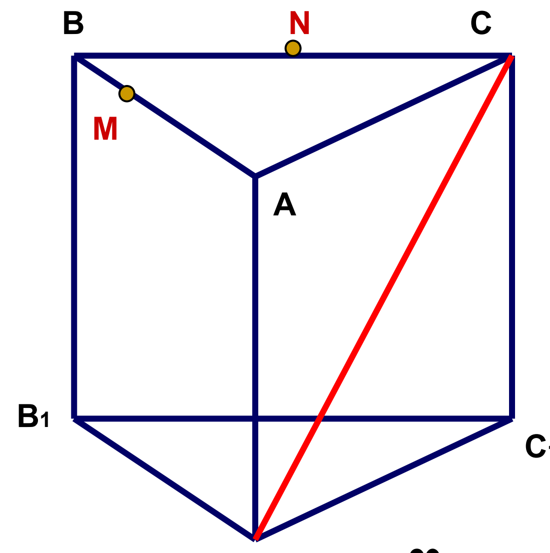
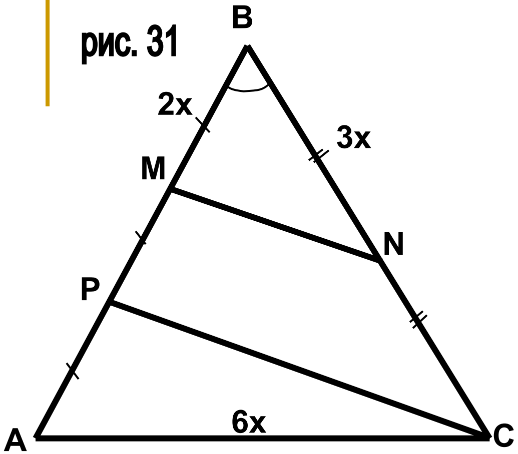



рис. 29

<u>Задача № 12.</u> (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 год). Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали $A_1C$ боковой грани $AA_1C_1C$, проходит через середину стороны BC основания ABC и точку M, лежащую на стороне AB, если AM = 2MB, расстояние между $A_1C$ и секущей плоскостью равно 2, а высота призмы равна 2




2) Пусть AB = 6x, тогда MB = 2x, BN = 3x.

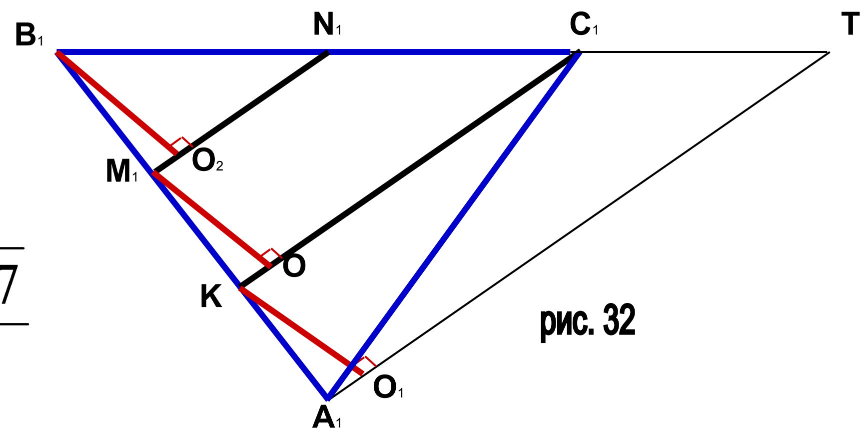
ΔMBN: (рис.30)

$MN^2 = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 60°$

$MN^2 = 13x^2 - 6x^2 = 7x^2$, $MN = x\sqrt{7}$

$PC = 2x\sqrt{7}$

3) $\Delta M_1 B_1 N_1$: (рис.32)




$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60^0 = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot M_1N_1 \cdot B_1O_2 = \frac{B_1O_2 \cdot x\sqrt{7}}{2}$$

$$B_1O_2 = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = KO_1$$

4) $\Delta PKO_1$ (рис.33):

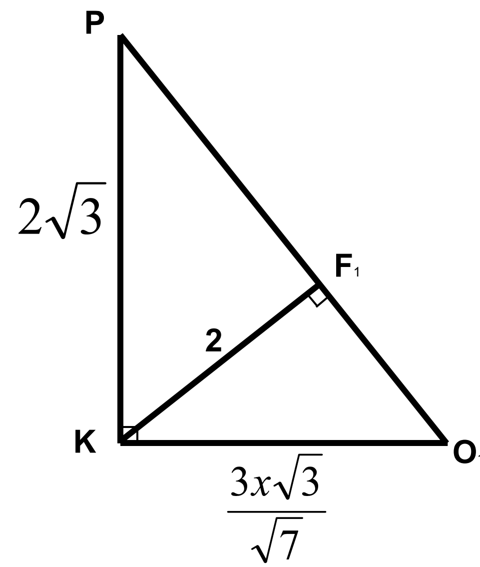



рис. 33

$$KF_1=\frac{KP\cdot KO_1}{PO_1},\Rightarrow, PO_1=\frac{KP\cdot KO_1}{KF_1}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{2}=\frac{9x}{\sqrt{7}}=MO$$

$$PF_1=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2},\quad PF_1\cdot F_1O_1=KF_1^2,\quad F_1O_1=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$PO_1=2\sqrt{2}+2=3\sqrt{2}=\frac{9x}{\sqrt{7}},\quad x=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{3}$$

5) $S_{сеч}=\frac{MN+KC_1}{2}\cdot MO=\frac{x\sqrt{7}+2x\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{9x}{\sqrt{7}}=\frac{27x^2}{2}=\frac{27\cdot 2\cdot 7}{2\cdot 9}=21$

Ответ: $S_{сеч}=21$