Колебания

- **Колебаниями** называются движения или процессы, обладающие определенной повторяемостью во времени.
- **Гармоническими** называются колебания, которые происходят по закону синуса (косинуса).
- Гармонические колебания величины Ψ описываются уравнением типа

$$\Psi(t) = A\cos(\omega t + \phi_0).$$

- Гармонические колебания происходят под действием **упругой** или **квазиупругой** силы. Это силы пропорциональные смещению и направленные к положению равновесия, то есть подчиняющиеся **закону Гука:**

$$F(x) = -kx,$$

где k – коэффициент упругости.

- **По характеру внешних воздействий колебания бывают *свободные* и *вынужденные*.**

- ***Свободными*** называются колебания, возникающие в системе, которая в результате кратковременного воздействия выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе.
- Если колебания такой системы происходят только под действием внутренних сил, которые, как правило, являются упругими или квазиупругими, то такие колебания называются ***собственными***. В реальных условиях свободные колебания являются ***затухающими***, так как они происходят при наличии различного вида сил сопротивления.
- ***Вынужденными*** называются колебания, происходящие под действием внешней периодической вынуждающей силы.

Параметры гармонических колебаний

$$\Psi(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

- Ψ – обобщённый параметр, изменяющийся по гармоническому закону;
- A – амплитуда колебаний, наибольшее отклонение параметра Ψ от равновесного значения;
- $(\omega_0 t + \phi_0)$ – фаза колебаний;
- ϕ_0 – начальная фаза;
- ω_0-собственная циклическая частота колебаний, число колебаний за время 2π секунд;
- ν - линейная частота колебаний, число колебаний в единицу времени; $\omega_0 = 2\pi\nu$, $\omega_o = d\varphi/dt$
- T - период колебаний, время одного полного колебания;

$$T = 1/\nu = 2\pi / \omega_0$$

Кинематика гармонических колебаний

- $\Psi(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$
- **Скорость** колеблющейся частицы

$$\upsilon = \dot{\Psi} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0 + \pi/2)$$

- **Ускорение** колеблющейся частицы

$$a = \ddot{\Psi} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi_0 + \pi)$$

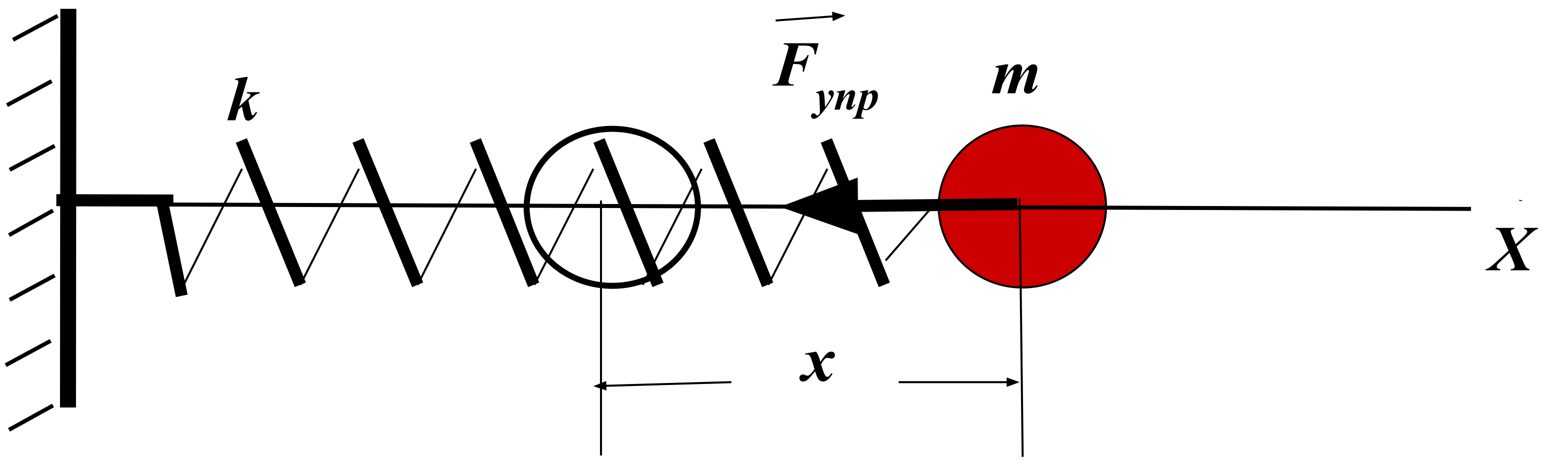
$$\boxed{a = -\omega_0^2 \Psi}$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид: $a + \omega_0^2 \Psi = 0$ или: $\boxed{\ddot{\Psi} + \omega_0^2 \Psi = 0}$

его решение $\Psi = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$

Пружинный маятник



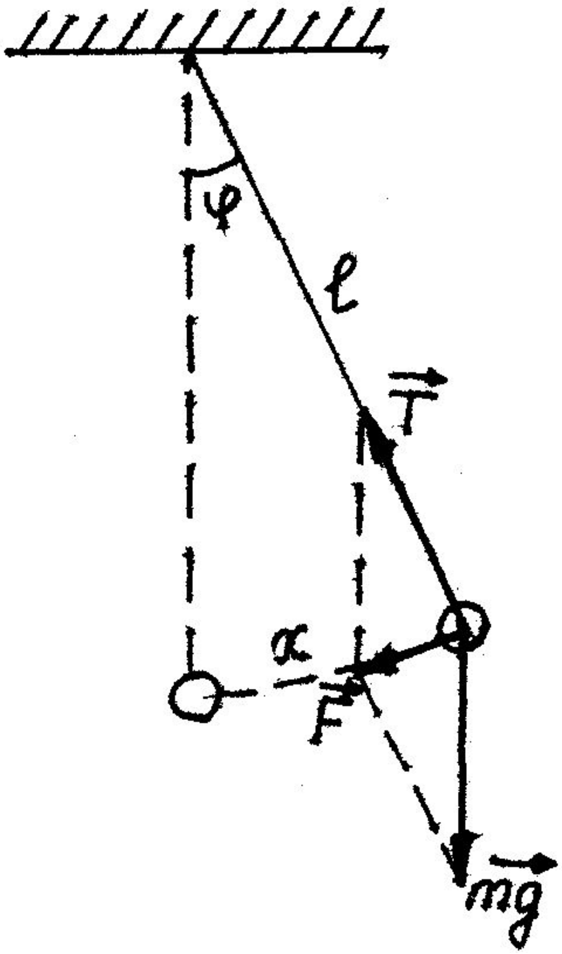
$$ma = -kx\,, \quad m\ddot{x} + kx = 0, \quad \ddot{x} + (k/m)x = 0,$$

где $k/m = \omega_0^{\ 2}$,

$$\ddot{x} + \omega_0^{\ 2}\, x = 0,$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Математический маятник



Математическим маятником называется тяжелая материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити.

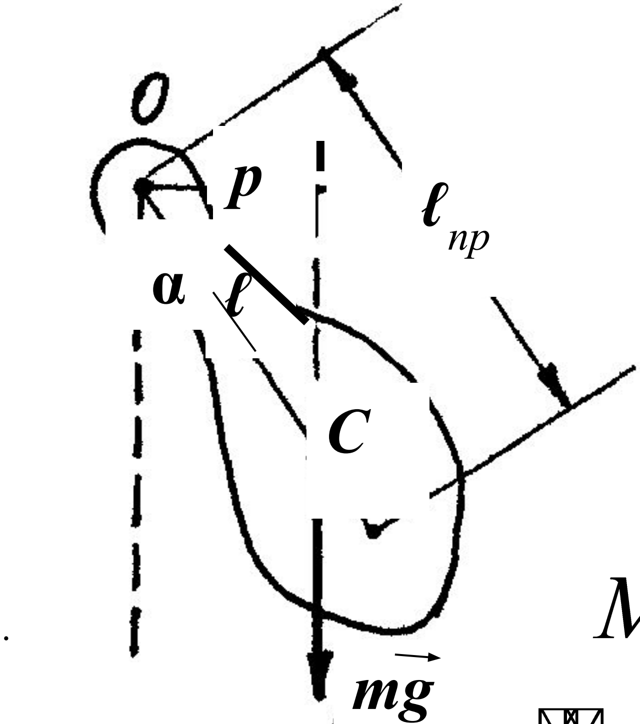
Из определения следует, что математическим маятником может служить любое тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити, на которой оно подвешено.

$F=-mg\sin\varphi=-mgx/l,$ $F=m\ddot{x}$

$m\ddot{x}=-mgx/l,$ $\ddot{x}+\omega_0^2x=0,$ где

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{g/l},}\qquad \boxed{T=2\pi\sqrt{l/g}}$$

Физический маятник



Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно оси, не проходящей через центр тяжести тела.

$$M(\alpha) = -mg\ell \sin\alpha,$$

$$M(\alpha) = J\ddot{\alpha}, \quad J\ddot{\alpha} = -mg\ell \sin\alpha$$

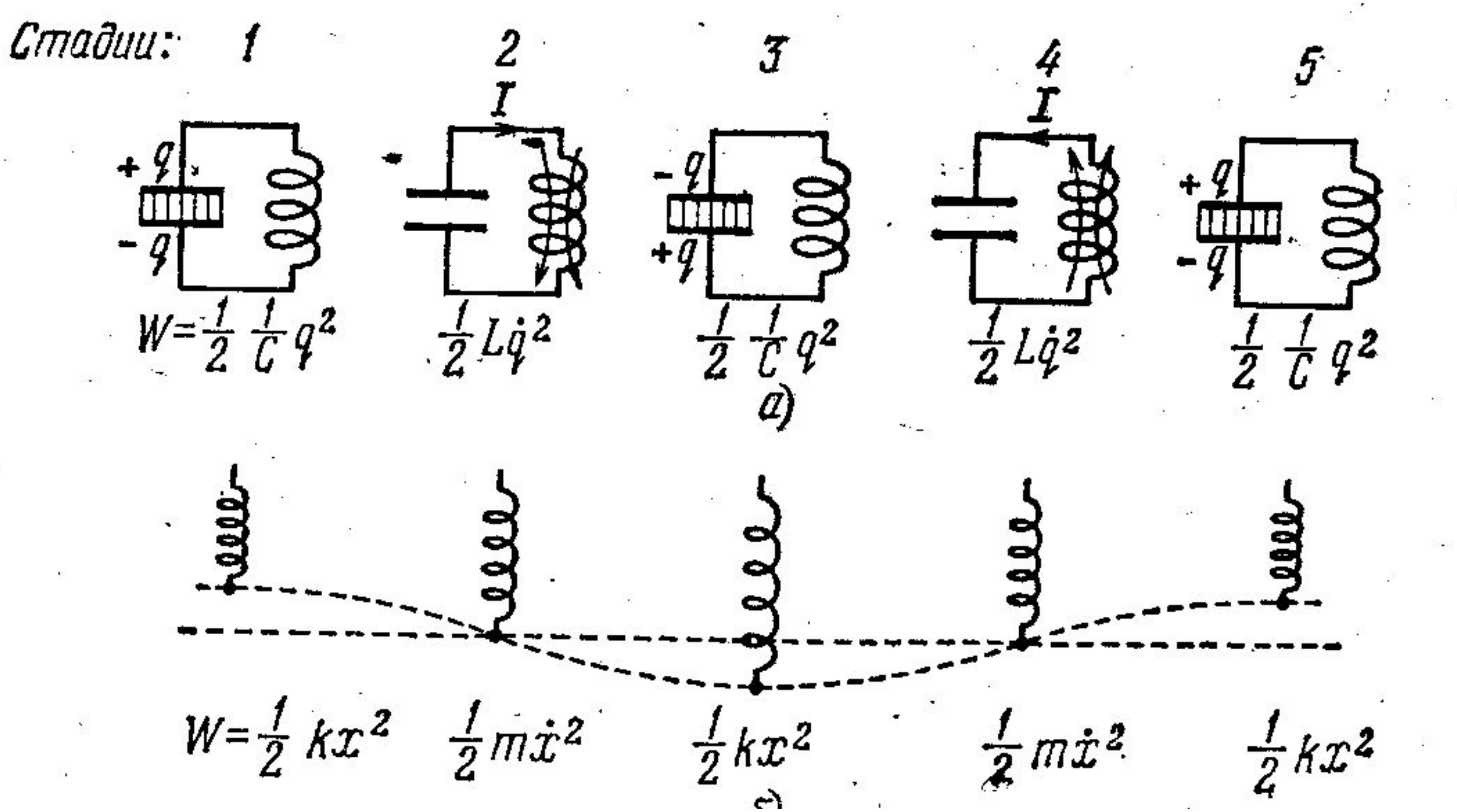
$$\ddot{\alpha} + \frac{mg\ell}{J}\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0;$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}}, \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}} \quad \ell_{пр} = \frac{J}{m\ell}$$

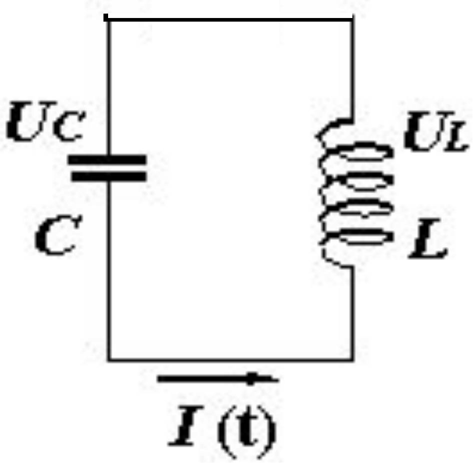
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{пр}}{g}}$$

Колебательный контур

- Колебательный контур – цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R.



Гармонические колебания в колебательном контуре



Если R=0, то потерь энергии в контуре не будет, и колебания будут носить периодический незатухающий характер, т.е. заряд q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I, текущего через катушку индуктивности, будут меняться по гармоническому закону.

$$IR + U_c = \varepsilon_s. \quad \text{При } R=0 \;\; IR = 0. \quad U_c = \frac{q}{C}, \quad \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0; \qquad \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \qquad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Электромеханическая аналогия

- $x \leftrightarrow q$
- $v \leftrightarrow I$
- $k \leftrightarrow (1/C)$
- $m \leftrightarrow L$
- $W_{кин} \leftrightarrow W_{магн}$
- $W_{пот} \leftrightarrow W_{эл}$

Затухающие колебания

1. Пружинный маятник

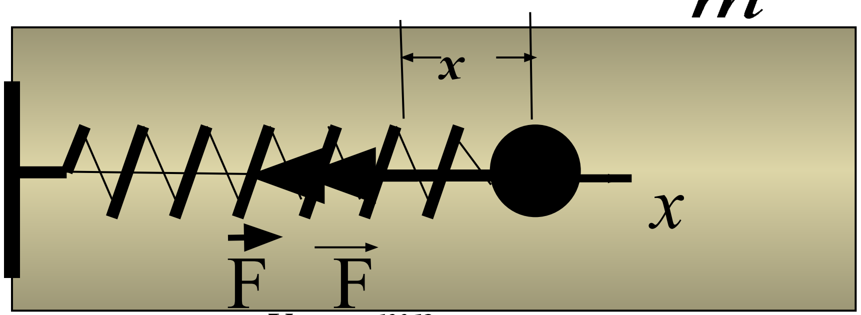
- В вязкой среде $\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon} = -r\dot{\vec{x}}$

r – коэффициент сопротивления.

$$m\vec{a} = \vec{F}_у + \vec{F}_{тр}; \qquad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0;$$

Обозначим:



$$r/m = 2\beta, \qquad k/m = \omega_0^2$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения:

$$x = x_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$A = x_0\, e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний;

$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ - период затухающих колебаний.

- Амплитуда затухающих колебаний:

$$A = x_0 e^{-\beta t}$$

- Логарифмический декремент затухания:

$$\theta = ln(A_n / A_{n+1}) \qquad \boxed{\theta = \beta T}$$

- Время релаксации τ –время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

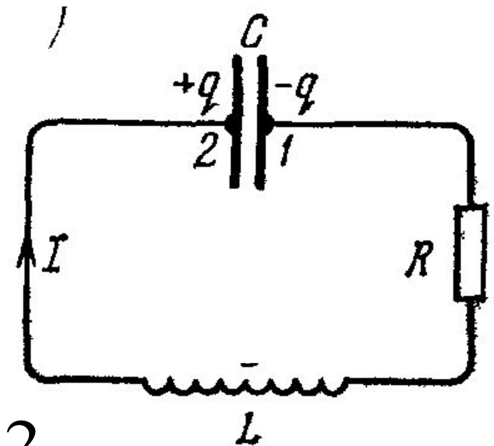
$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e, \quad \frac{x_0 e^{-\beta t}}{x_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e, \quad \boxed{\beta\,\tau = 1}$$

$$\beta = 1/\tau = 1/(N_e T), \quad \boxed{\theta = \beta T = 1/N_e}, \quad \boxed{\theta = 1/N_e}$$

2. Колебательный контур

- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при R≠0) имеет вид:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0;$$



- Его можно переписать в виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

- Вводя обозначения $\frac{R}{L} = 2\beta$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$,
- получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

- Решение уравнения имеет вид: $q = q_0 e^{-\beta \cdot t} cos(\omega t + \varphi_0)$

где $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Вынужденные электромагнитные колебания. Закон Ома для переменного тока.

- ***Переменный ток*** можно рассматривать как установившиеся вынужденные электромагнитные колебания в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности, конденсатор и источник вынуждающей ЭДС.
- Мы будем рассматривать квазистационарные токи, для которых мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы.
- Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа.

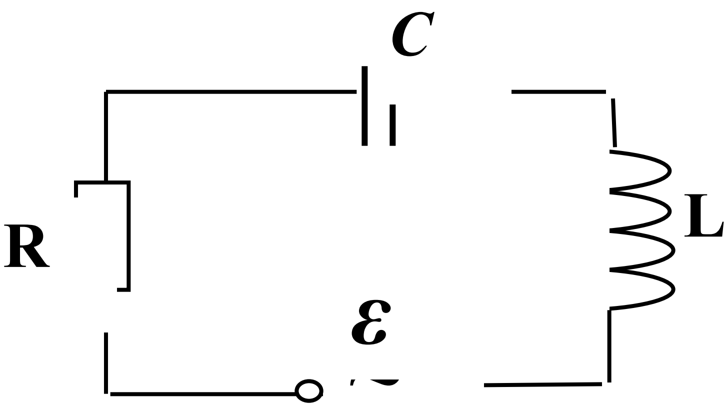


Рисунок 1

$$U_R + U_c = \varepsilon_i + \varepsilon$$

$$IR + q/C = -L(dI/dt) + \varepsilon_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = -\frac{\varepsilon_0\omega}{L}\sin\omega t$$

$$\ddot{I} + 2\beta\dot{I} + \omega_0^2 I = e_0 \sin\omega t$$

Решение уравнения: $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi_o)$

где

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}}} \quad (1)$$

- ***<u>закон Ома для переменного тока</u>***

Разность фаз между напряжением и силой тока:

$$tg\varphi_0 = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

называется **полным сопротивлением** цепи

$\boldsymbol{R_L = \omega L}$ - **индуктивное сопротивление**;

$\boldsymbol{R_C = 1/(\omega C)}$ - **ёмкостное сопротивление**;

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

- **реактивное сопротивление.**

Реактивное сопротивление не вызывает тепловых потерь в цепи переменного тока. Оно создаёт сдвиг фаз между током и вынуждающей э.д.с.

R - **активное сопротивление**; за счёт него возникают тепловые потери в контуре.

Падение напряжения на отдельных участках цепи, представленной на рис.1,:

$$U_C = q/\,C = \frac{1}{C}\cdot\int Idt = U_{0C}\,cos(\omega t - \varphi - \pi/2);$$

$$U_L = L\,(dI/dt) = U_{0L}\,cos(\omega t - \varphi + \pi/2);$$

$$U_R = U_{0R}\,cos(\omega t - \varphi).$$

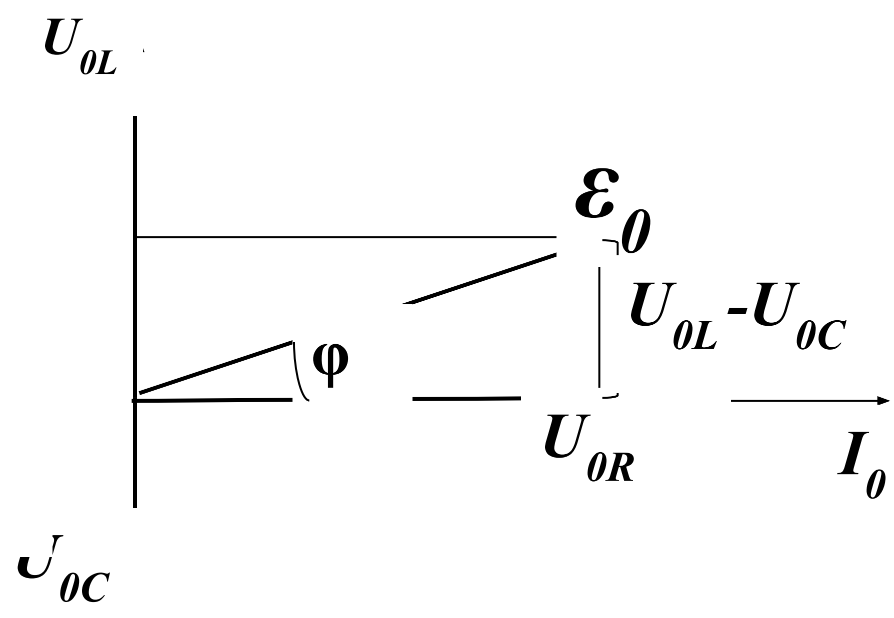


Рисунок 2

Резонанс

Из выражения (1) следует, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы ω. При $\omega \to \omega_0$, амплитуда колебаний увеличивается. Частоту изменения вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, называют ***резонансной***. Расчёты показывают, что

$$\omega_{рез} = \omega_0$$

Подставив это значение частоты в выражение (1), получим формулу амплитуды при резонансе:

$$I_{рез} = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

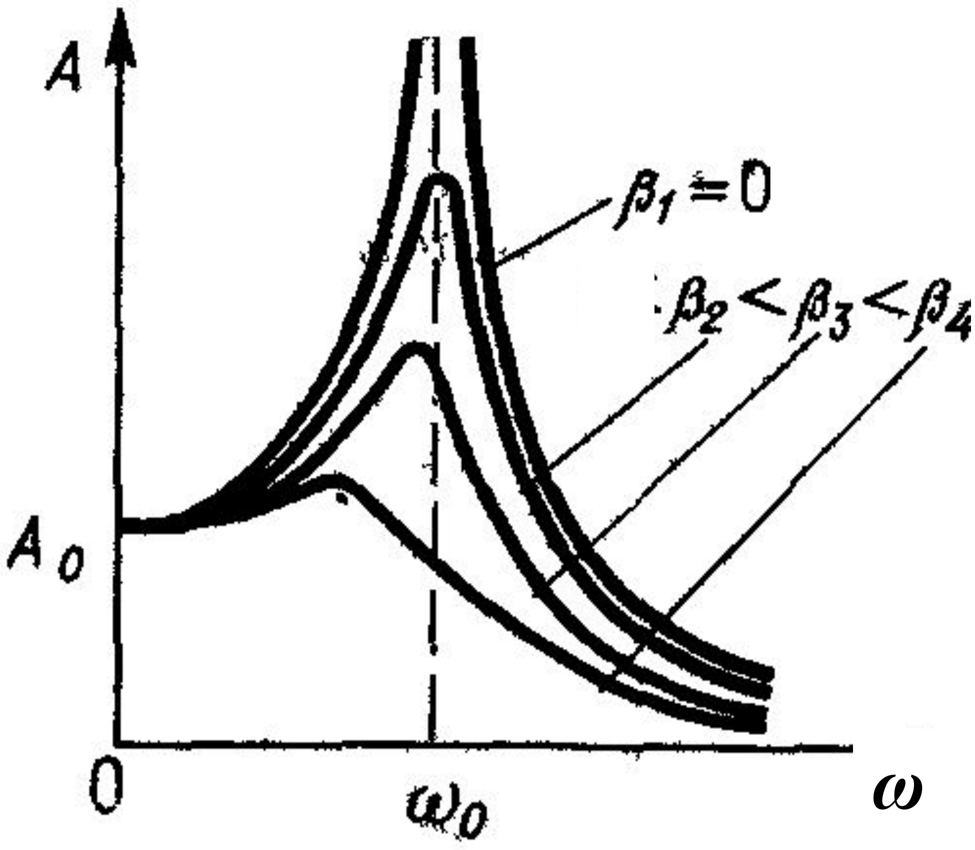


Рисунок 3

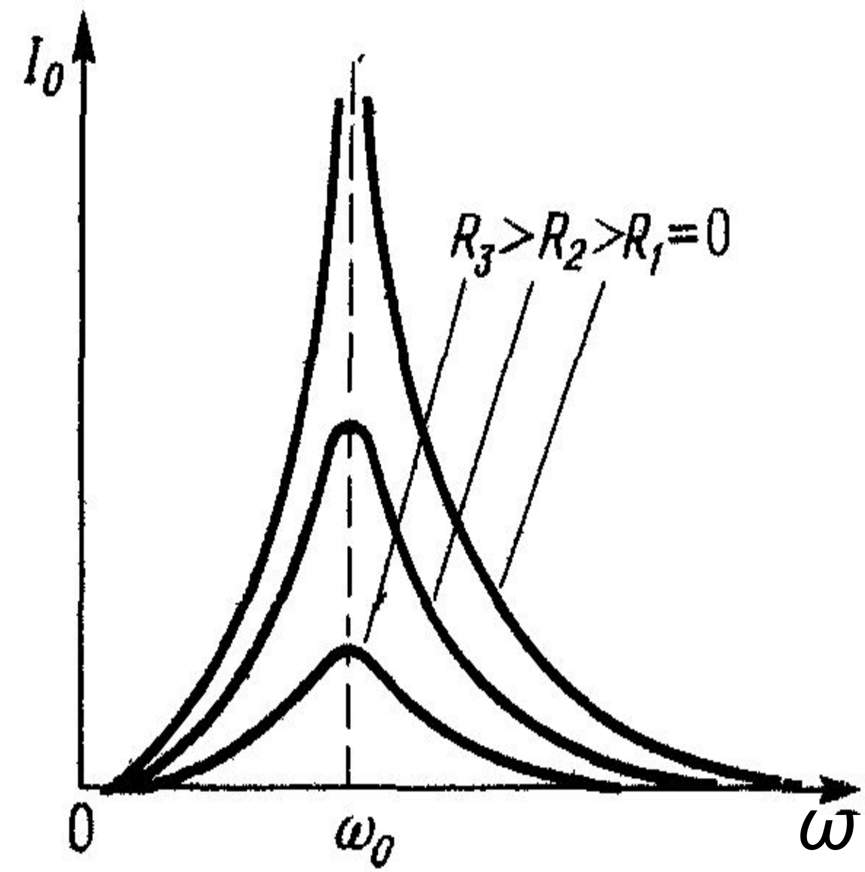


Рисунок 4

Мощность в цепи переменного тока

- $P(t) = \varepsilon(t)\, I(t)$, где

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 cos\omega t$, $I(t) = I_0 \, cos(\omega t - \phi)$.

- $P(t) = I_0 \, \varepsilon_0 \, cos(\omega t\text{-}\phi\,) cos\omega t = I_0 \, \varepsilon_0 \, (cos^2\omega t \,\cdot$
$\cdot cos\phi + sin\omega t \; cos\omega t \; sin\phi)$

- $<P> = \quad \frac{1}{2} I_0 \, \varepsilon_0 \, cos\phi$.

Из векторной диаграммы (рис. 2) следует, что

$\varepsilon_0 \, cos\phi = RI_0$. Поэтому

$$< P >= \frac{1}{2} R I_0^{\,2}$$