Электромагнитные колебания

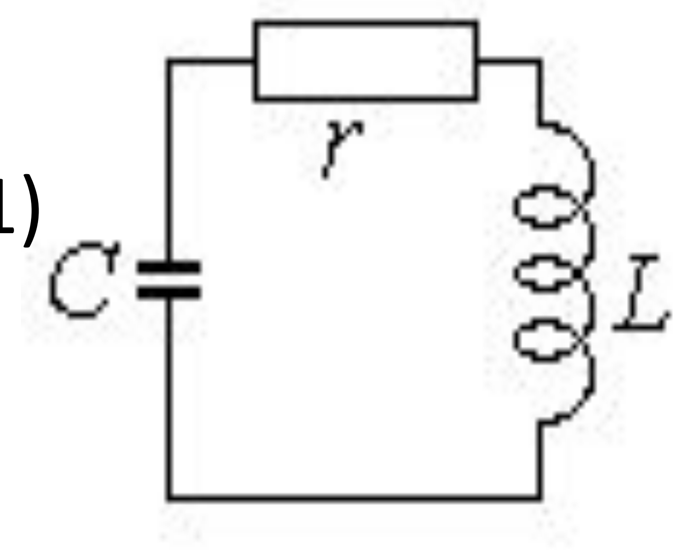
Лк_28

Для простоты был рассмотрен колебательный контур, содержащий только конденсатор и индуктор. Такой контур не может существовать в действительности. Всегда имеются потери электроэнергии на сопротивлении провода катушки, электропроводности диэлектрика конденсатора и рассеяние поля в пространстве. Все эти потери можно представить в виде сопротивления, включенного в контур.

Уравнение для напряжений на элементах такого контура будет иметь следующий вид:

$$u_c+u_r+u_L=0. \qquad (28.1)$$

Величина u_r определится законом Ома, и мы получим следующее уравнение



$$\frac{q}{C} + r\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \qquad (28.2)$$

Вновь по аналогии с механическими колебаниями при наличии трения мы будем искать решение этого уравнения в виде

$$q=Q_m e^{-\beta t} cos(\omega t+\theta) \qquad (28.3)$$

Подставим это выражение в (28.2) и после группировки синусов и косинусов получим:

$$Q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \vartheta) * \left(\frac{1}{C} - r\beta + L\beta^2 - \omega^2\right) + \omega Q_m \sin(\omega t + \vartheta) * (2\beta L - r) = 0$$

Для выполнения этого равенства в любой момент времени необходимо, чтобы коэффициенты при cos и sin были равны нулю. Это условие определяет два неизвестных параметра - β и ω:

$$\beta = \frac{r}{2L}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \qquad (28.5)$$

График изменения во времени заряда - q показан на рисунке 28.2. Это график затухающих колебаний. Уменьшение амплитуды колебаний со временем определяется множи-

телем $e^{-\beta t}$ в формуле

для заряда (28.3). Величин

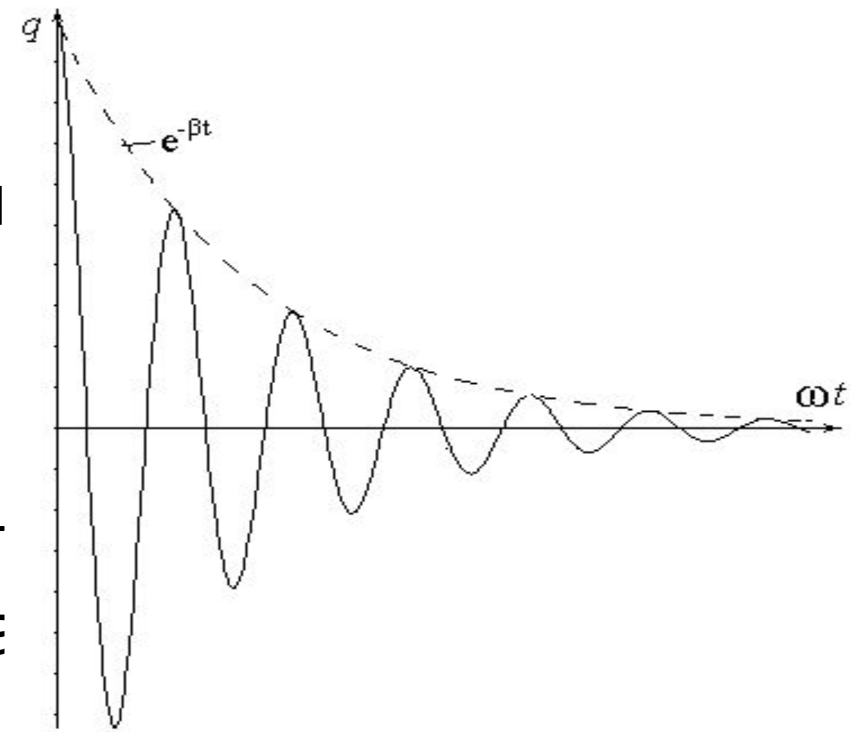
β носит название посто-

янной затухания. Более

популярной величиной яв-

ляется добротность колеба

тельного контура - Q,



которая выражает отношение энергии, имеющейся в контуре - W, к энергии, теряемой им за один период - ΔW.

Энергия в контуре $W = \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C}$

Энергия, теряемая за один период

$$\Delta W = \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C} - \frac{q_m^2 e^{-2\beta (t+T)}}{2C}$$

Добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\omega L}{r} \qquad (28.6)$$

При отсутствии потерь энергии в контуре r=0 добротность Q=∞. Колебания не затухают. Чем больше потери, тем меньше Q, тем быстрее затухание колебаний.

Пяитиминутка

Колебательный контур составлен из катушки индуктивности L=1 мГн и конденсатора C=10000пФ. Добротность контура Q=100. Определить сопротивление потерь контура, и частоту собственных колебаний.

Вынужденные колебания возникают при воздействии на систему периодической внешней силы. Пусть система представляет собой колебательный контр, а периодическая внешняя сила - собой ЭДС, изменяющуюся во времени по периодическому закону, например, по закону косинуса:

$$e=E_m cos(\omega t) \quad (28.7)$$

Электрическая схема воздействия этой ЭДС на колебательный контур имеет вид, показанный на рисунке 28.3.

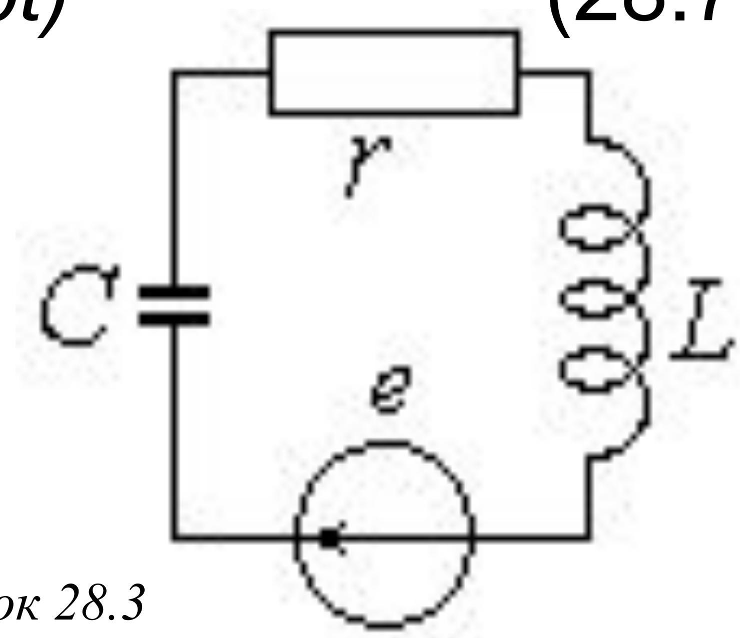


Рисунок 28.3

Составим уравнение для напряжений на элементах этого контура:

$$u_c+u_r+u_L-e=0 \tag{28.8}$$

Выразим напряжения, входящие в это уравнение через заряд конденсатора:

$$u_c=q/C, \quad u_r=ri=rdq/dt, \quad u_L=Ldi/dt=Ld^2q/dt^2 \tag{28.9}$$

После подстановки этих формул в (28.8) получим

$$\frac{q}{C}+r\frac{dq}{dt}+L\frac{d^2q}{dt^2}=E_m\cos(\omega t) \tag{28.10}$$

Это уравнение определяет вынужденные колебания заряда в конденсаторе колебательного контура про воздействии на него синусоидальной ЭДС

Частное решение данного уравнения можно записать в виде

$$q=Q_m cos(\omega t+\psi) \qquad (28.11)$$

Два параметра: Q_m и ψ необходимо найти путем подстановки (28.11) в (28.10). Сделав такую подстановку, мы получим:

$$\frac{Q_m}{C}\cos(\omega t+\psi) - r\omega Q_m sin(\omega t+\psi)$$
$$- Q_m L\omega^2 \cos(\omega t+\psi) = E_m \cos(\omega t)$$

Теперь необходимо расписать $\cos(\omega t+\psi)$ и $\sin(\omega t+\psi)$ по тригонометрическим формулам, затем сгруппировать члены, содержащие $\cos(\omega t)$ и члены, содержащие $\sin(\omega t)$:

$$\mathrm{Q_m}\cos(\omega t)\left[\cos(\psi)\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)-\sin(\psi)r\omega\right]$$
$$-Q_m\sin(\omega t)\left[\sin(\psi)\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)+\cos(\psi)r\omega\right]$$
$$=E_m\cos(\omega t)$$

Это равенство должно соблюдаться в любой момент времени. Коэффициент при sin(ωt) должен быть нулевым, а коэффициенты при cos(ωt) в левой и правой частях должны быть одинаковыми:

$$\sin(\psi)\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)+\cos(\psi)\,r\omega=0$$

$$\mathrm{Q_m}\left[\cos(\psi)\left(\frac{1}{C}-\omega^2 L\right)-\sin(\psi)r\omega\right]=E_m$$

Из этой системы найдем неизвестные величины ψ и $\mathrm{Q_m}$:

$$tg(\psi)=-\frac{r\omega}{\frac{1}{C}-\omega^2 L} \qquad (28.12)$$

$$\mathrm{Q_m}=\frac{E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C}-\omega^2 L\right)^2+(r\omega)^2}} \qquad (28.13)$$

Найдя частное решение уравнения для заряда конденсатора в колебательном контуре, можно записать и общее решение, которое равно сумме частного решения и решения однородного уравнения - с нулем в правой части

$$q_0=Q_{m0}e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t+\vartheta)$$

Однородное решение – это затухающие колебания на частоте ω_0, близкой к частоте свободных колебаний контура при отсутствии сопротивления:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

С течением времени это колебание затухнет и в контуре останется только колебание, соответствующее частотному решению с параметрами, определяемыми формулами (28.12) и (28.13).

Зная выражение для колебаний заряда, можем записать формулы для колебаний напряжения на конденсаторе, тока в контуре, напряжения на катушке индуктивности и сопротивлении:

$$\begin{cases} u_c = \dfrac{q}{C} = \dfrac{E_m}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 + (r\omega C)^2}} \cos(\omega t + \psi) \\ i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{-\omega C E_m}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 + (r\omega C)^2}} \sin(\omega t + \psi) \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} = \dfrac{-\omega^2 \mathrm{CL} E_m}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 + (r\omega C)^2}} \cos(\omega t + \psi) \\ u_r = ir = \dfrac{-\omega \mathrm{rC} E_m}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 + (r\omega C)^2}} \sin(\omega t + \psi) \end{cases} \qquad (28.14)$$

Во всех формулах выделена амплитуда колебаний, которая является множителем при cos(ωt+ψ) или sin(ωt+ψ). Все амплитуды зависят от частоты внешней силы - действующей ЭДС - ω

Частотная зависимость обусловлена главным образом членом $1-\omega^2LC$, который имеется в знаменателях всех формул. Можно заменить величину LC ее выражением из формулы частоты собственных колебаний контура. Тогда $1-\omega^2LC=1-(\omega/\omega_0)^2$. Если медленно изменять частоту внешней силы - ω и измерять амплитуды напряжений на элементах контура и тока в нем, то можно заметить, что при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний ($\omega=\omega_0$) все амплитуды достигают максимального значения или очень близки к нему. В контуре наступает резонанс. На рисунке 28.4 показаны графики зависимости амплитуд напряжений на элементах контура от частоты внешней силы. При резонансе, когда $\omega=\omega_0$, выполняются соотношения: $U_{mC}=U_{mL}$, $U_{mr}=E_m$.

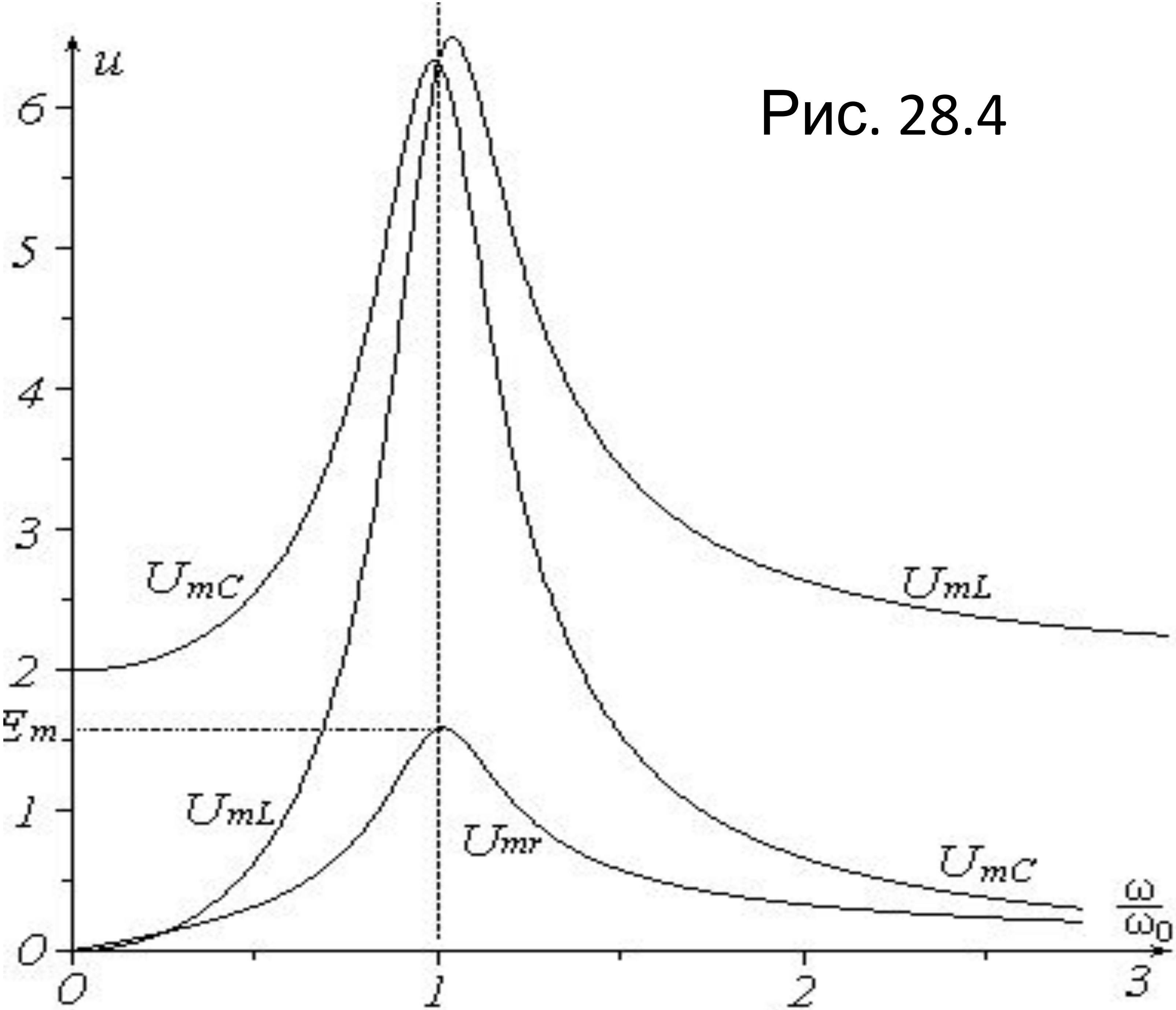
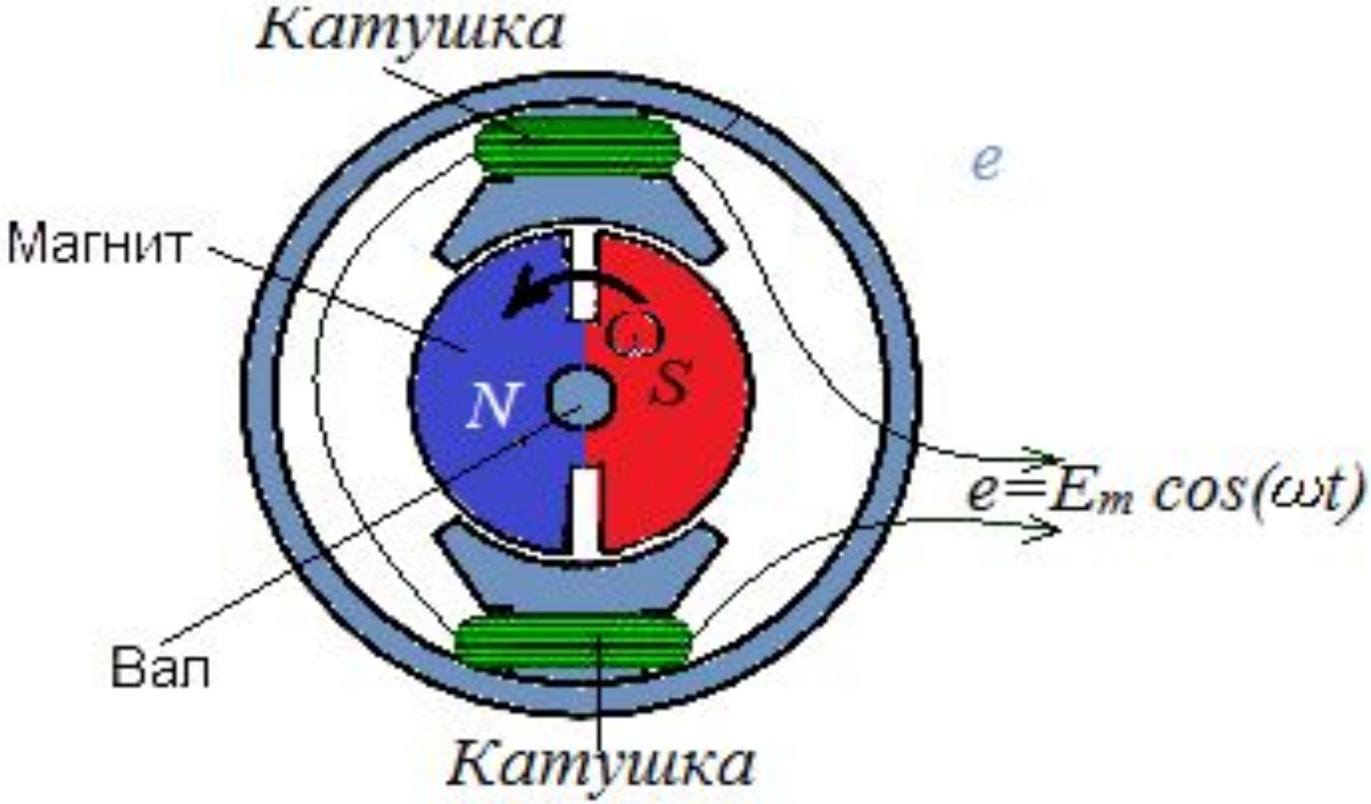

u
6
5
4
3
2
$\mathcal{E}_m$
1
0
0
1
2
3
U_{mC}
U_{mL}
U_{mL}
U_{mr}
U_{mC}
$\frac{\omega}{\omega_0}$

Рис. 28.4

Хотя амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке при резонансе совпадают, мгновенные величины этих напряжений, согласно (28.14) имеют противоположные знаки и при резонансе в сумме дают 0. По этой причине данный вид резонанса называют резонансом напряжений. При резонансе напряжений амплитуда напряжения на конденсаторе или катушке контура может многократно превышать амплитуду внешней ЭДС, действующей в контуре. Определим для примера отношение U_{mL}/E_m при резонансе. Полагая в (28.14) $1-\omega^2 LC=0$, т.е. $\omega=\omega_0$ получим: $\frac{U_{mL}}{E_m}=\frac{\omega_0 L}{r}$ Данное отношение равно добротности колебательного контура, которая может достигать нескольких сотен.

Переменный ток, напряжение, ЭДС. Так называют данные величины, если они изменяются во времени по синусоидальному закону, т.е. совершают синусоидальные колебания. В конце 19 века усилиями великих энтузиастов - электриков: Теслы, Феррариса, Доливо-Добровольского были созданы устройства переменного тока, которые обеспечили невиданный ранее прогресс промышленности, техники и науки. Это генератор переменного тока, асинхронный электродвигатель, трансформатор электроэнергии переменного тока.



Генератор переменной ЭДС представляет собой катушку, которая находится в поле вращающегося постоянного магнита. Для доставки магнитного потока в катушку используется ферромагнитный магнитопровод.

При подобранных форме и размерах магнитопровода магнитный поток через катушку изменяется во времени по синусоидальному закону:

$$\Phi=\Phi_m sin(\omega t).$$

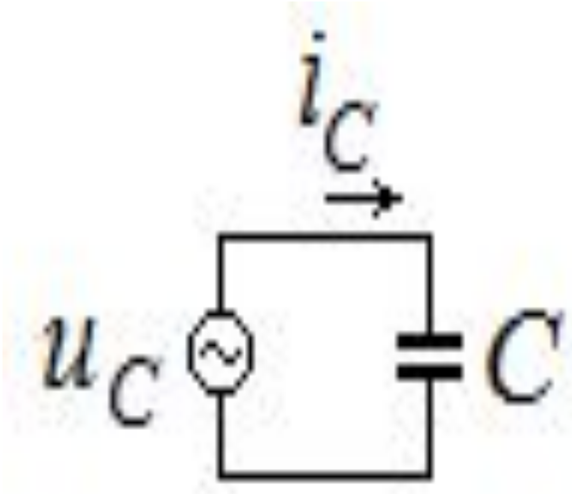
При этом в катушке индуцируется ЭДС

$$e=-N*d\Phi/dt= -N\Phi_m cos(\omega t).$$

Полученная таким образом переменная ЭДС используется для питания различных устройств переменного тока.

Рассмотрим простейшие цепи переменного тока и метод вычисления токов и напряжений в них

Начнем с конденсатора.



К обкладкам приложено переменное напряжение $u_c=U_m\cos(\omega t)$. Заряд конденсатора

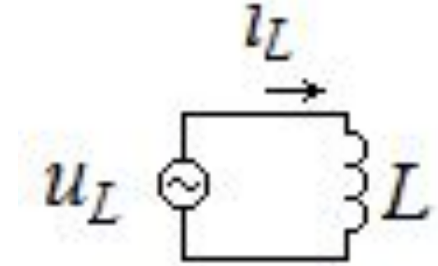
$q=uC$,

а ток, который будет протекать через конденсатор :

$$i_c = \frac{dq}{dt} = -U_m \omega C sin(\omega t) =$$
$$= I_{mC} cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (28.15)$$

В этом выражении обозначено $I_{mc}=U_{mc}*\omega C$ - амплитуда тока. Таким образом, при действии на конденсатор переменного напряжения по нему протекает переменный ток той же частоты. Фаза этого тока превышает фазу напряжения на $\pi/2$, а амплитуда тока связана с амплитудой напряжения формулой, внешне похожей на закон Ома: $I_{mc}=U_{mc}*\omega C$. По этой причине величину ωC называют проводимостью конденсатора по переменному току, а обратную величину $X_c=1/\omega C$ - сопротивлением конденсатора переменному току.

Катушка индуктивности в цепи переменного тока. В этом случае переменное напряжение $u_L = U_m\cos(\omega t)$, приложенное к катушке, компенсируется ЭДС самоиндукции катушки. Это позволяет определить ток в катушке:



$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \quad =>$$

$$iL = \frac{1}{L}\int u_L dt \frac{1}{L}\int \mathrm{U}_{\mathrm{m}L}\cos(\omega \mathrm{t})dt = \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{mL}}}{\omega L}\sin(\omega t) \quad (28.16)$$

Амплитуда тока в катушке вновь связана с амплитудой напряжения на ней формулой внешне похожей на закон Ома $I_{mL}=U_{mL}/\omega L$. Величину $X_L= \omega L$ называют сопротивлением катушки индуктивности переменному току. Поскольку $\sin(\omega t)= \cos(\omega t-\pi/2)$, фаза тока в катушке будет на $\pi/2$ меньше, чем фаза напряжения на ней

Векторные диаграммы колебательных процессов. Независимо от природы линейных колебаний поведение колеблющейся величины во времени описывается функцией синуса или косинуса:

$$x(t)=X_m cos(\omega t+\varphi) \qquad (28.17)$$

В ходе рассмотрения колебаний приходится суммировать колеблющиеся величины, которые изменяются с одинаковыми частотами - ω, но имеют различные амплитуды - X_m и начальные фазы - φ. Операцию суммирования колебаний можно сделать очень простой и наглядной, если использовать для изображения колебаний векторы.

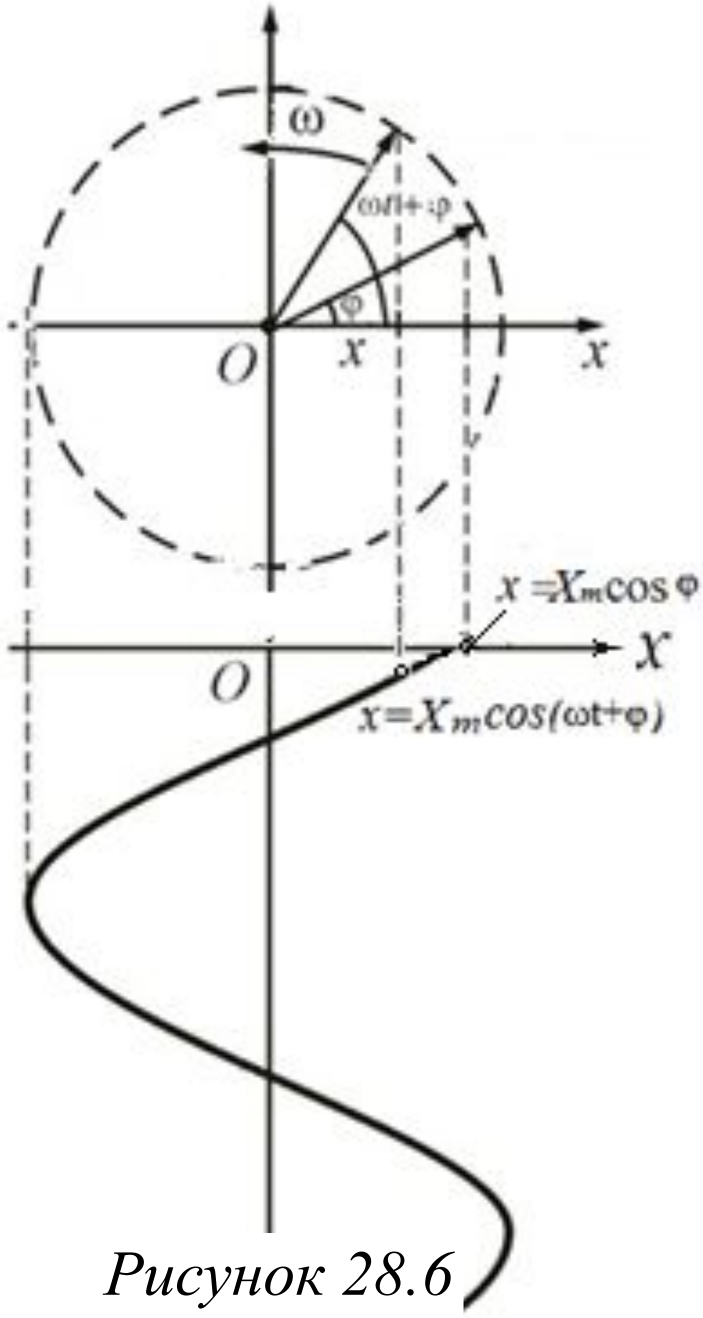
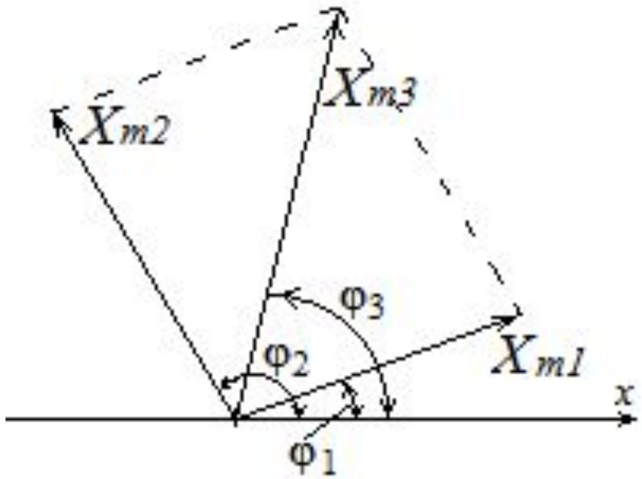


Рисунок 28.6

Колеблющуюся величину x(t) можно представить в виде проекции на горизонтальную ось вектора с модулем (длиной) X_m, который вращается с угловой скоростью ω, как показано на рисунке 28.6. Если какое-либо колебание является суммой двух колебаний:

$$x_3(t)=X_{m1}cos(\omega t+\varphi_1) + +X_{m2}cos(\omega t+\varphi_2)$$

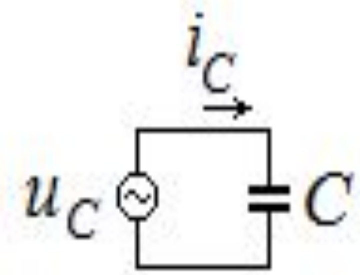


то на диаграмме достаточно изобразить только векторы складываемых колебаний в момент времени t=0 и для получения вектора суммарного колебания в этот момент сложить векторы слагаемых. В результате графически определятся амплитуда суммарно-го колебания -X_{m3} и его начальная фаза - φ_3. Этих пара-метров достаточно для полного определения суммарного колебания:

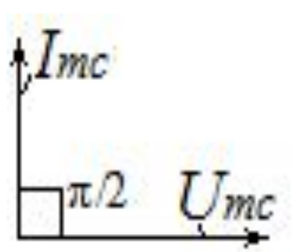
$$x_3(t)=X_{m3}cos(\omega t+\varphi_3)$$

Построение вектора колебания: ***Рисуем направлен-ный отрезок длиной, равной амплитуде, под углом к горизонтальной оси, равным начальной фазе.***

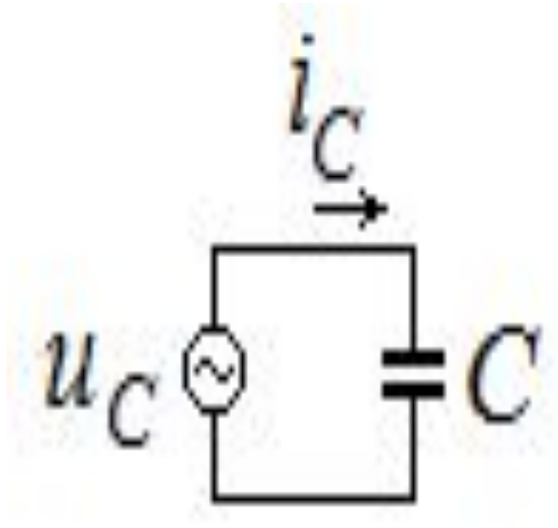
Рассмотрим на примерах использование метода векторных диаграмм для анализа электрических цепей переменного тока.



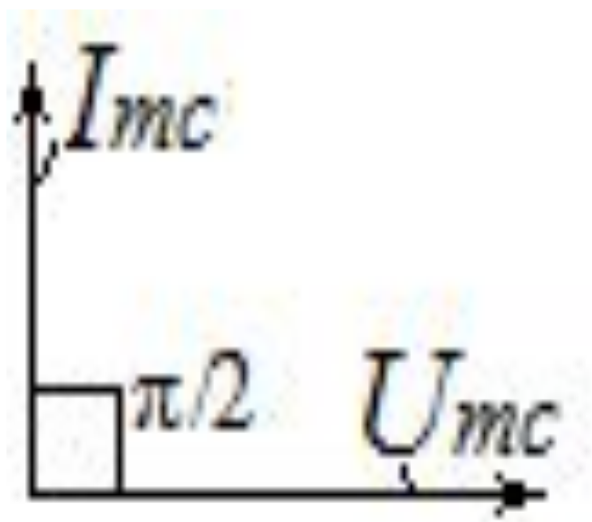
Изучая прохождение переменного тока через конденсатор под действием переменного напряжения u_c, мы выяснили, что амплитуда тока выражается формулой $I_{mc}=U_{mc}*\omega C$, а фаза тока превышает фазу напряжения на $\pi/2$.



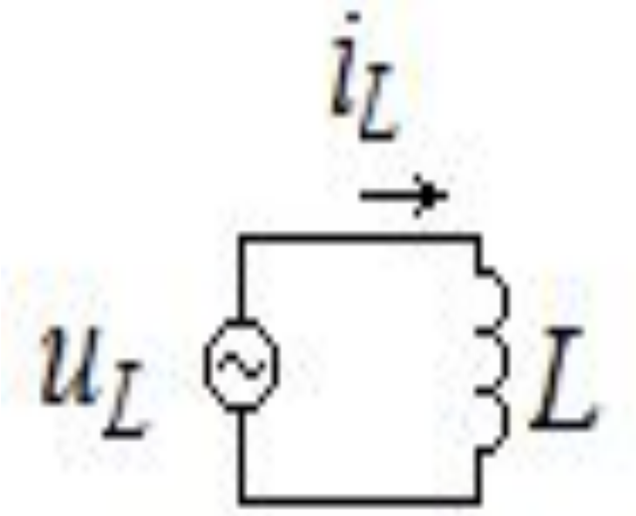
Изобразим колебания напряжения и тока на векторной диаграмме, где вектор тока повернут относительно вектора напряжения в положительную сторону на $\pi/2$

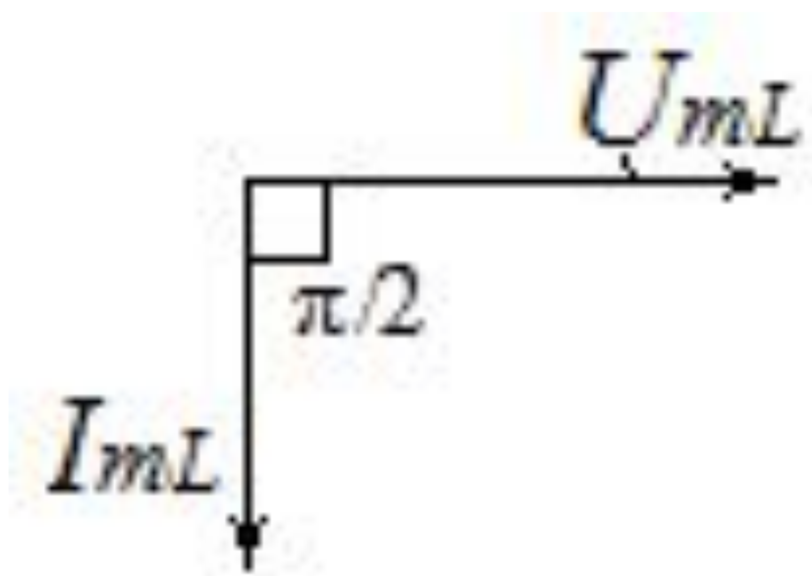


При построении диаграмм первый вектор строится произвольно, остальные векторы относительно его достраиваются однозначно. Построим вектор u_C горизонтально. Вектор i_C должен быть повернут относительно вектора u_C на $\pi/2$ в положительном направлении. На диаграмме векторы обозначены как амплитуды величин, которые они изображают.

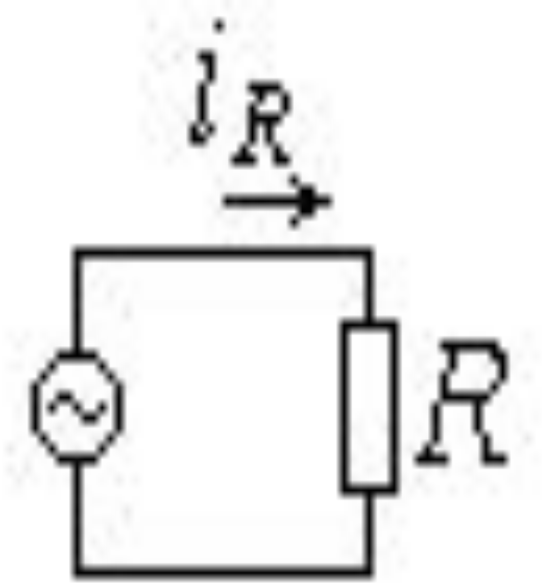


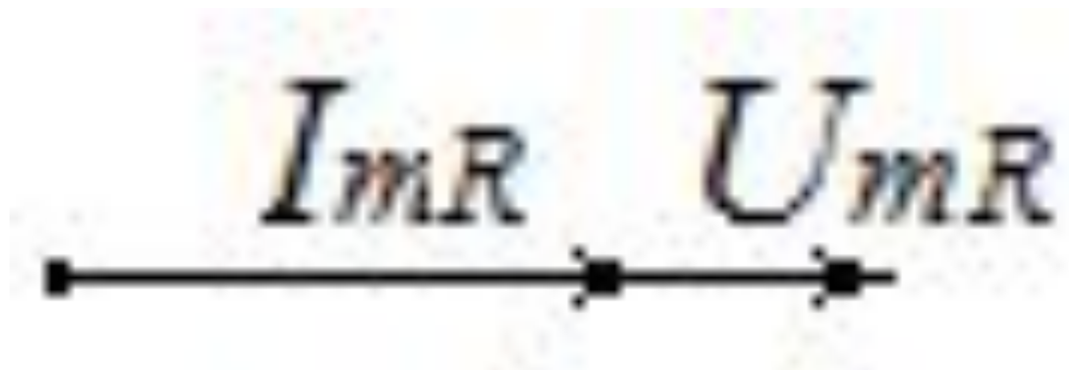
Аналогично можно построить векторную диаграмму напряжения и тока в катушке индуктивности, где связь амплитуд определена формулой $I_{mL}=U_{mL}/\omega L$, а фаза тока меньше, чем фаза напряжения на π/2. Горизонтально построим вектор колебаний напряжения, а затем под углом –π/2 к нему построим вектор колебаний тока.



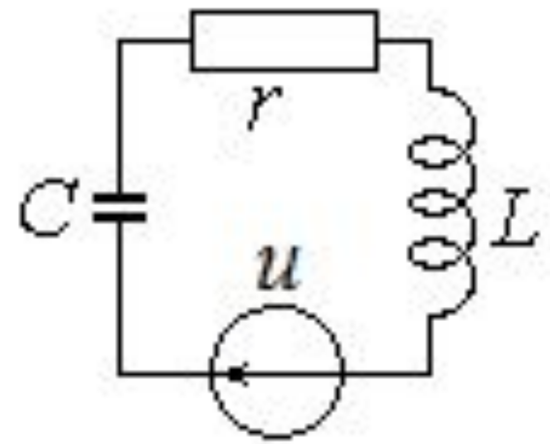


Если рассмотреть цепочку в виде источника переменного напряжения и подключенного к нему резистора, то связь напряжения и тока в ней определяется законом Ома $i_R=u_R/R$. Разность фаз между напряжением и током равна нулю, следовательно, векторы напряжения и тока на диаграмме совпадут по направлению.





Основная цель введения векторных диаграмм состоит в наглядном суммировании колебаний.

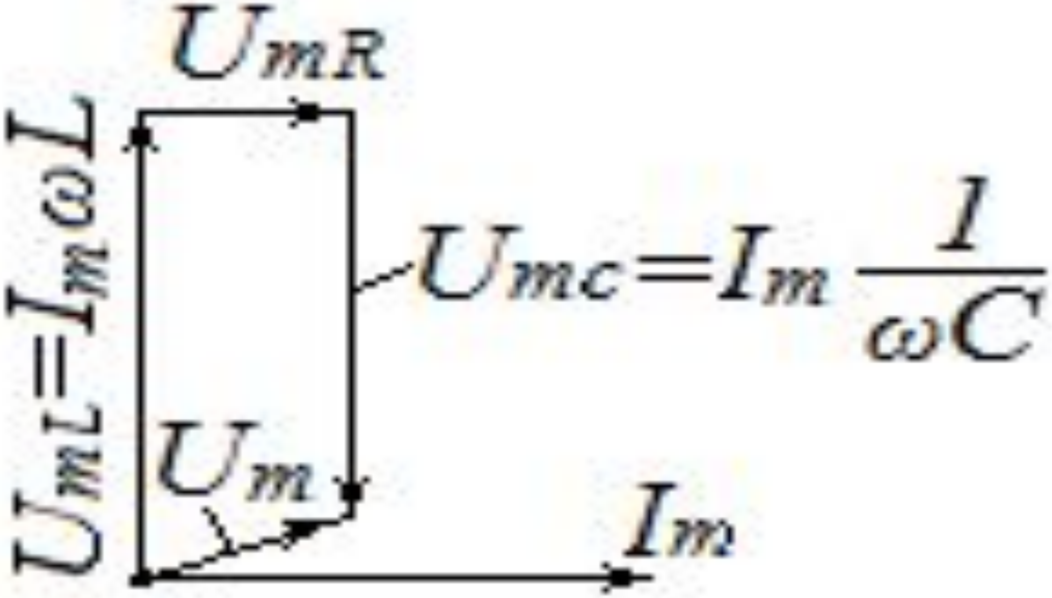


Рассмотрим такое суммирование на примере анализа цепи переменного тока, представляющей собой последовательный колебательный контур.

Согласно второму правилу Кирхгофа сумма напряжений на элементах контура должна быть нулевой.

$$u_c + u_r + u_L - e = 0$$

Все величины этой суммы представляют собой синусоидальные колебания одинаковой частоты и просуммировать их можно суммированием соответствующих векторов. Будем проводить суммирование путем подрисовывания начала вектора очередного слагаемого к концу вектора предыдущего. Поскольку ток через все элементы контура один и тот же первым построим вектор колебаний тока. Направим его горизонтально. Для всех элементов нам известны совместные положения векторов тока и напряжения. Построим векторы напряжений одновременно суммируя их. Сума векторов напряжений на L, R, C даст нам вектор напряжения источника - u



Для катушки индуктивности вектор колебаний напряжения повернут на +π/2 по отношению к вектору тока, для конденсатора - на -π/2, а для резистора векторы колебаний тока и напряжения совпадают по направлению. Сума векторов напряжений на L, R, C даст нам вектор напряжения источника - u.

После построения диаграммы можем воспользоваться теоремой Пифагора для вычисления амплитуды тока: $U_{mR}{}^2+(U_{mL}-U_{mC})^2=U_m{}^2$

Подставим выражения амплитуд напряжений через амплитуду тока и получим формулу для амплитуды тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Ранее мы получили этот же результат (28.14) путем долгого решения дифференциального уравнения для напряжений в цепи контура.

Из векторной диаграммы легко определить и разность начальных фаз напряжения u тока в контуре. Разумеется будет получен тот же результат, который дается формулами (28.14).

Пятиминутка. Цепь из последовательно соединенных резистора 100 Ом и конденсатора 40 мкф подключена к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Используя метод векторных диаграмм, определить действующее значение тока в цепи.