Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

Определение. Уравнением линии на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Теорема. Всякое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0,$

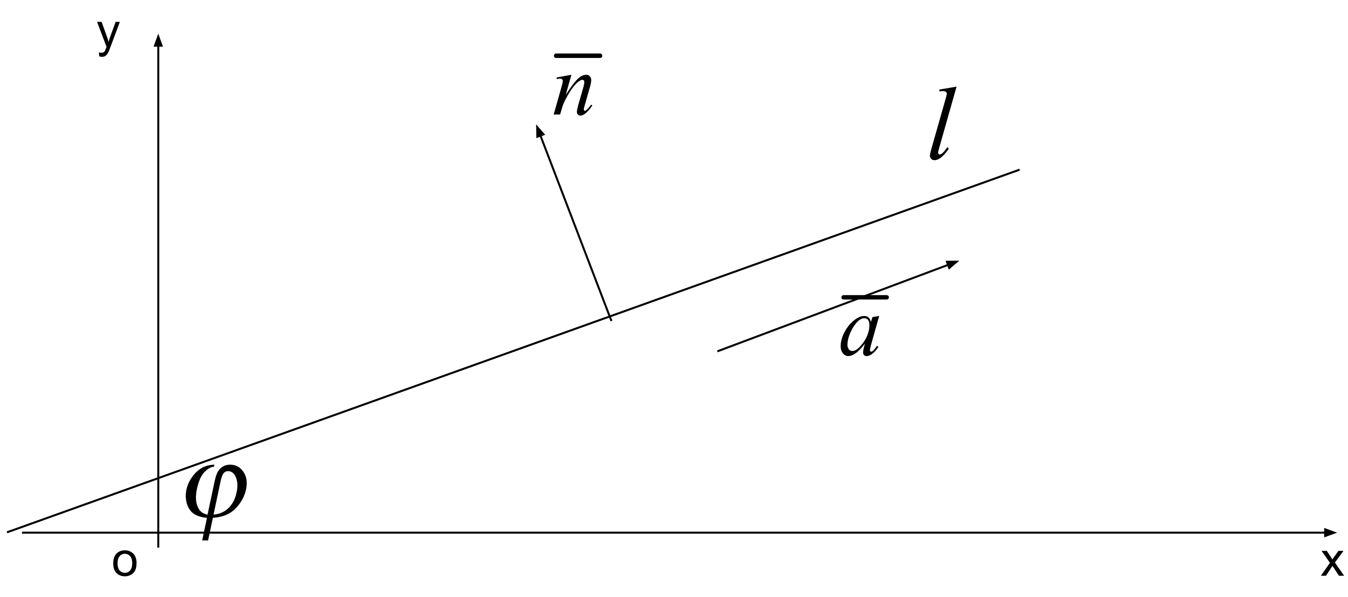
где *A* и *B* не обращаются в нуль одновременно, представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости $Oxy.$

Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору

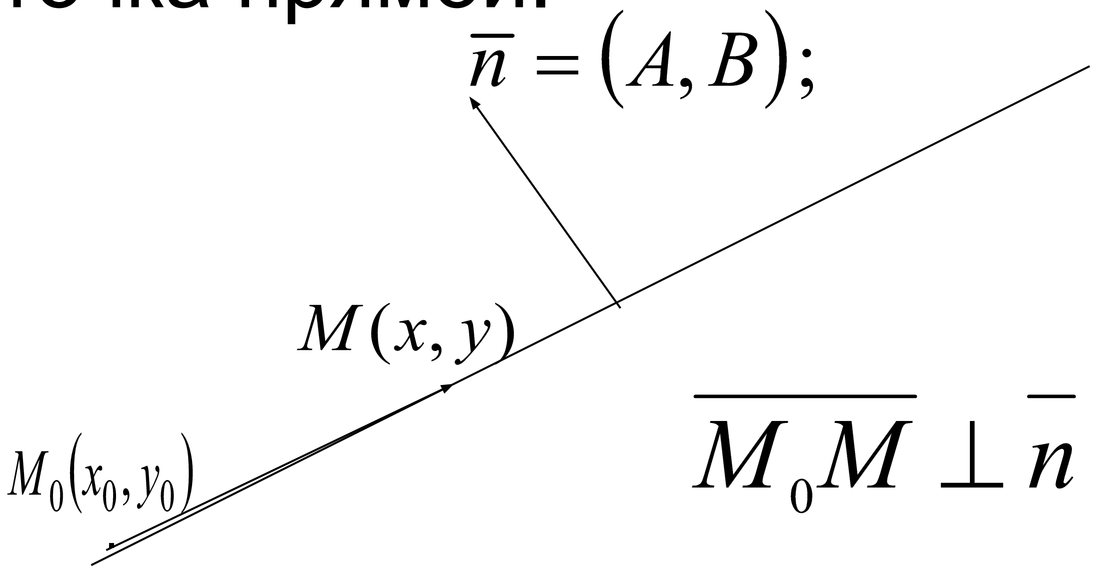
Введем следующие понятия. Вектор, перпендикулярный прямой l, будем называть нормалью прямой и обозначать $\overline{n}$. Итак, $\overline{n} \perp l$.

Вектор, параллельный прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой. Обозначим его $\overline{a} = \left(m, p \right)$.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox будем называть угловым коэффициентом этой прямой: $tg\varphi = k$



Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой. Точка $M(x, y)$ -произвольная точка прямой.



$$\overline{M_0M} \perp \overline{n}$$

Тогда скалярное произведение

$$\overline{n} \cdot \overline{M_0 M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Получили уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно данному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

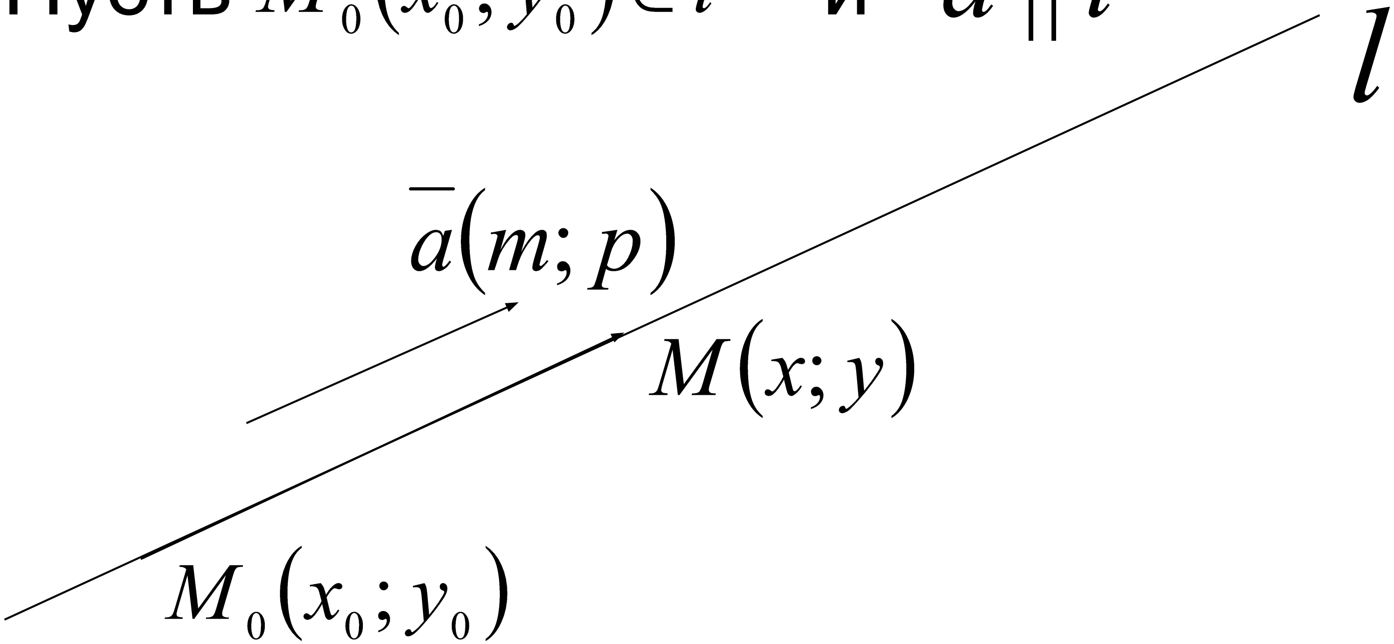
Общее уравнение прямой

Из предыдущего уравнения легко получаем общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Каноническое уравнение прямой

Пусть $M_0(x_0;y_0)\in l$ и $\overline{a}\parallel l$



Тогда из условия коллинеарности векторов $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\overline{a} = (m, p)$; получаем каноническое, т. е. простейшее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

Пример

Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2,-1)$ параллельно и перпендикулярно вектору $\overline{AB}=(3,-1)$.

Первое уравнение $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}$ и

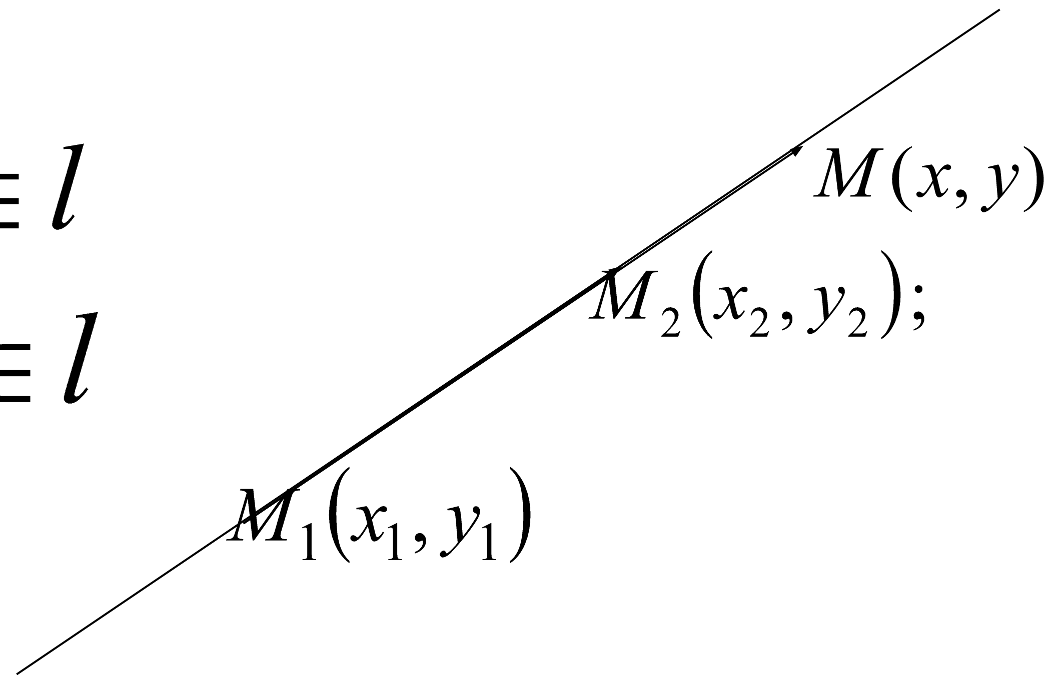
второе $3(x-2)-(y+1)=0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть

$$M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$M_2(x_2; y_2) \in l$$



$$\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$$

Координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Получили уравнение прямой, проходящей через две точки.

Параметрические уравнения прямой

Приравняем обе части соотношения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

к *t*. Получим параметрические уравнения прямой

$$x = mt + x_0$$

$$y = pt + y_0$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Преобразуем уравнение $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

к виду
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

φ

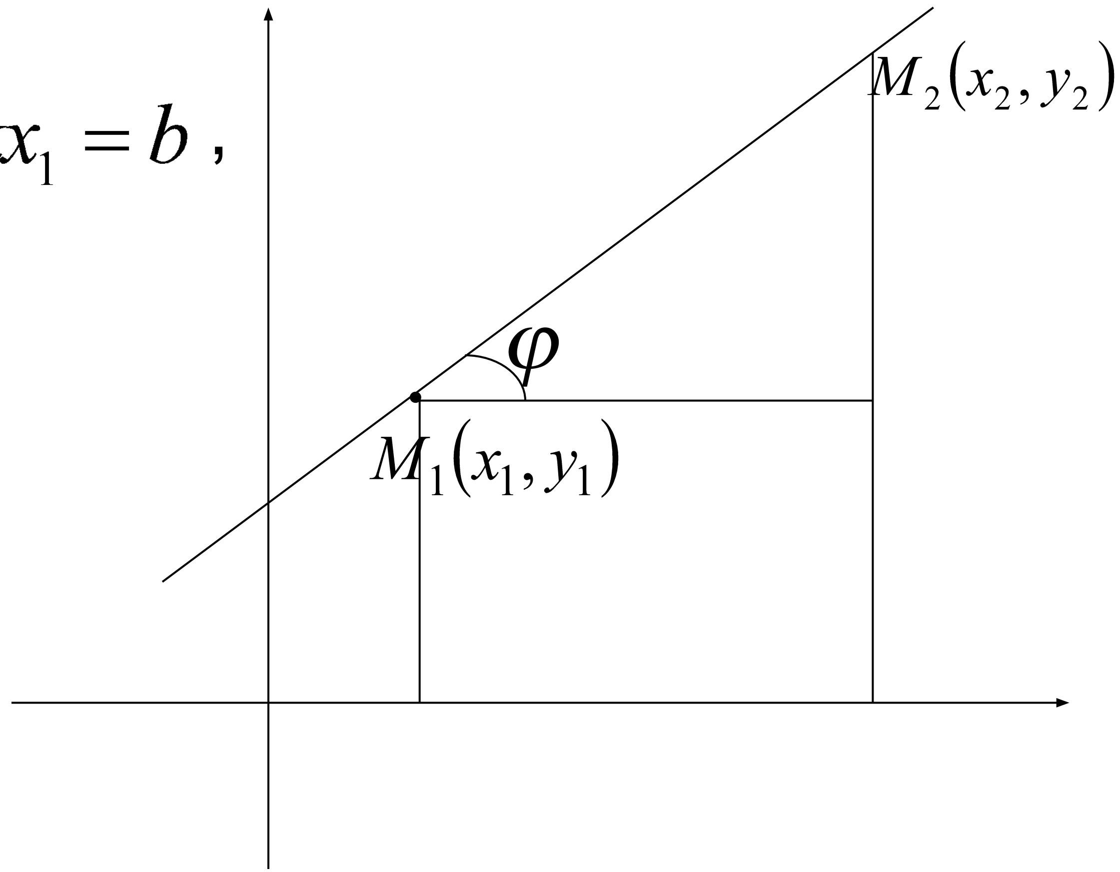
Обозначив

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k, \quad y_1 - kx_1 = b \,,$$

где $k = tg\varphi$,

получим

$$y = kx + b$$



Уравнение прямой ,проходящей через точку

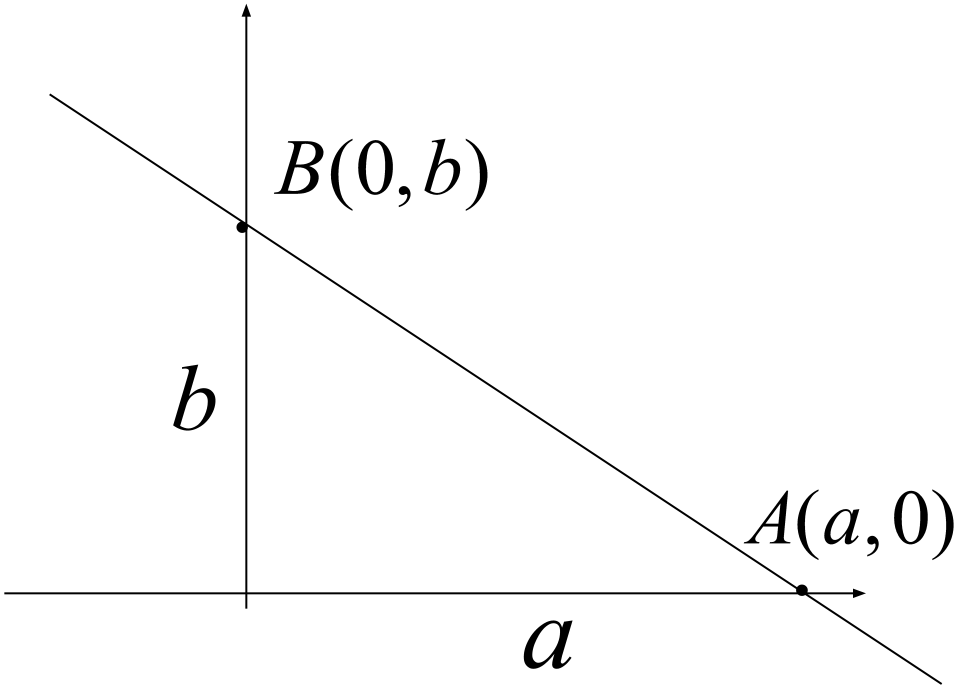
Пусть точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ лежит на прямой $y = k \cdot x + b$. Тогда $y_0 = kx_0 + b.$

Вычтем из первого второе соотношение . Получим

$$y - y_0 = k \cdot \left(x - x_0\right)$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



Взаимное расположение прямых

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$l_1: \ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \ \overline{n_1}(A_1; B_1)$$

$$l_2: \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \ \overline{n_2}(A_2; B_2)$$

Тогда угол между этими прямыми равен углу между их нормалями , т. е.

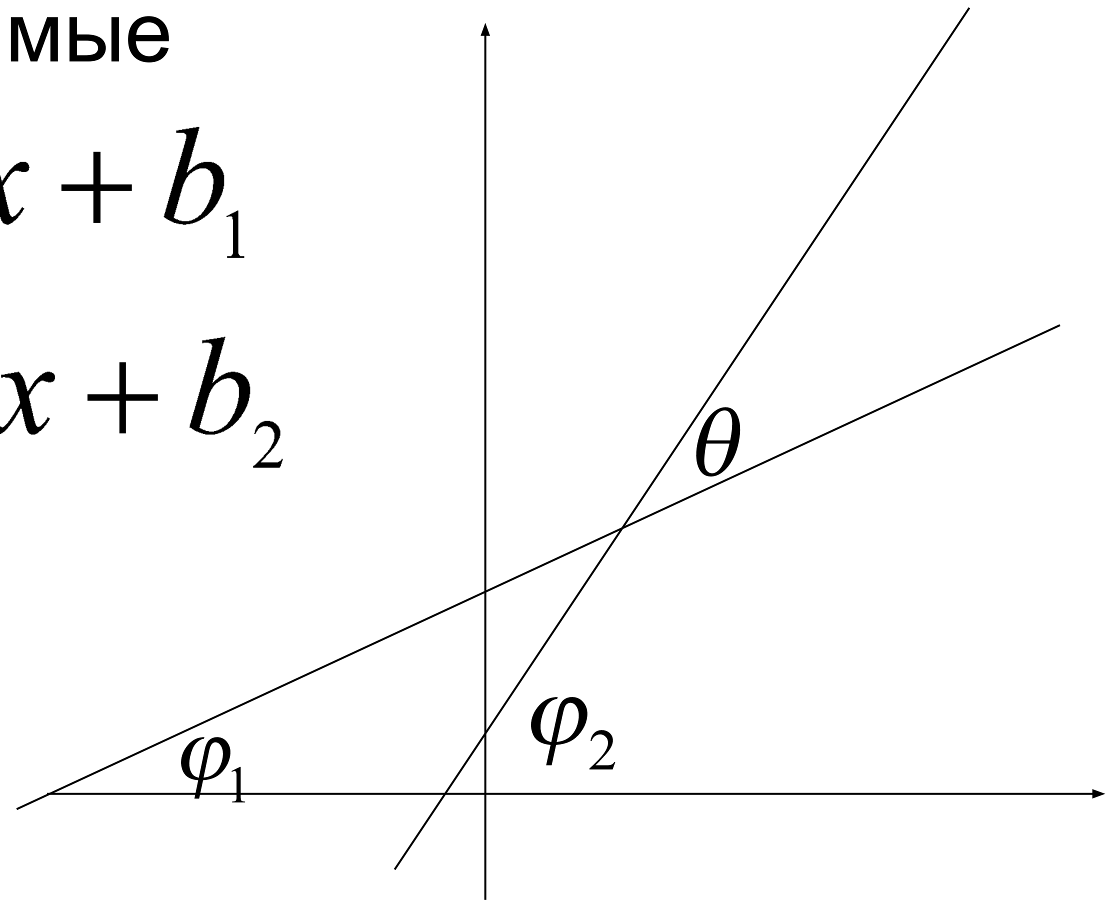
$$\cos\alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пусть даны прямые

$$l_1 : \; y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : \; y = k_2 x + b_2$$

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1$$



Тогда

$$tg\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Условия параллельности

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий (в зависимости от вида уравнений прямых).

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условие перпендикулярности

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находят по формуле .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример

Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(5,-1)$ и $A_2(2,5)$.