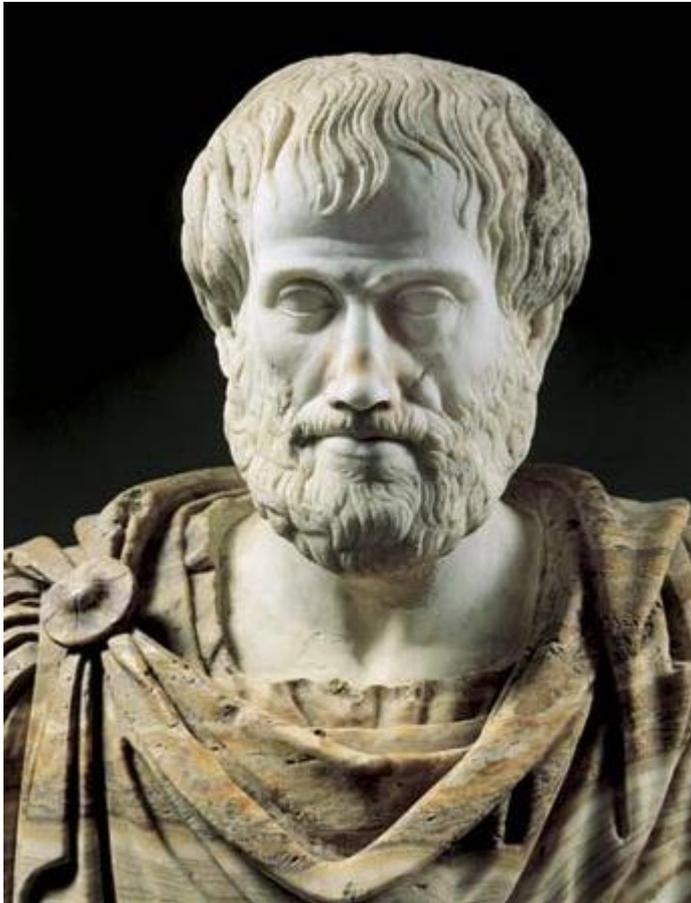


Лекция 7

Логические основы компьютеров



1. Алгебра логики и обработка двоичной информации



Аристотель
384 до н. э., — 322 до н. э.

Формальная логика — наука о ...

Основателем считается древнегреческий философ Аристотель (описал некоторые логические операции, сформулировал законы мышления)



Основной принцип формальной ЛОГИКИ

Правильность рассуждения определяется ...



Высказывание

Высказывание — это ...

С помощью высказываний устанавливаются свойства объектов и взаимосвязи между ними.



Задание: Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

1. Как пройти в библиотеку?
2. Картины Пикассо слишком абстрактны
3. Решение задачи — информационный процесс
4. Число 2 является нечетным
5. Некоторые медведи живут на севере
6. Сложите числа 2 и 5



Математическая логика

У истоков современной логики стоит **Готфрид Лейбниц**, выдвинувший идею представить логическое доказательство как вычисление, подобное вычислению в математике



Готфрид Вильгельм
Лейбниц
1646- 1716 г.г.

Алгебра человеческого
мышления

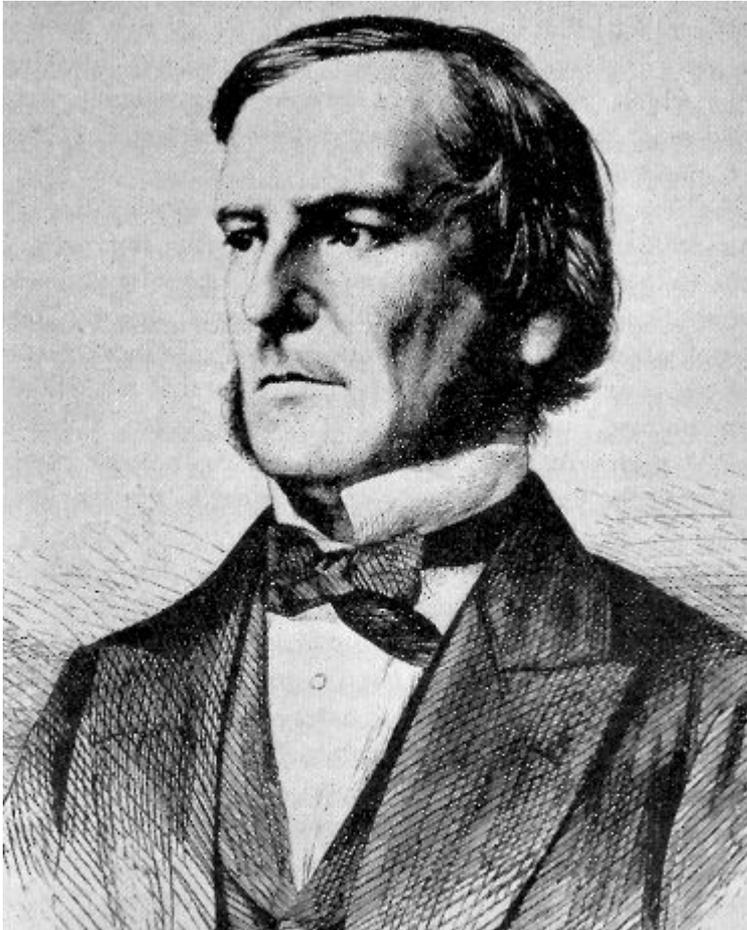


Алгебра логики

Джордж Буль

«Математический анализ
логики» 19 век:

- перенес на логику законы и правила алгебраических действий
- ввел логические операции
- предложил способ записи рассуждений в символической форме.



Джордж Буль
1815 — 1864г.г.



Алгебра логики — раздел математической логики,
изучающий...



Алгебра логики отвлекается от смысла высказываний и изучает строение сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов



Полосатые
крокодилы
летают



Связь между логикой и компьютером

Алгебра логики определяет правила выполнения операций с логическими величинами, которые могут быть равны только ложь (0) или истина (1), то есть с двоичными данными

В компьютере все виды информации кодируются с помощью 0 и 1 и нужно уметь описывать правила обработки таких данных.

Идея:

Обработку информации можно свести к выполнению логических операций над данными, представленными с помощью 0 и 1.



2. Основные понятия алгебры логики

Логическая переменная — это ...

- обозначается латинской буквой
- может принимать два значения: ИСТИНА или ЛОЖЬ (1 или 0)



$A = \{\text{Петя читает}\} = \text{Истина}$

$B = \{\text{Петя пьет чай}\} = \text{Истина}$

Логические константы 0 и 1



Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

А и В

Сейчас идет дождь и открыта форточка.

А или не В

Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если А, то В

Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

А тогда и только тогда, когда В

Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.



Логическая операция — ...

Описывается с помощью **таблицы истинности**, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях простых высказываний



Инверсия («неверно, что», логическое отрицание)



Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

Неверно, что у меня дома есть компьютер

Неверно, что я не знаю испанского языка

Неверно, что все юноши 11-х классов — отличники

также $\neg A$
not A (Паскаль)
! A (Си)

Правила построения отрицания

A={Все студенты в группе отличники}

1) Не верно, что A

{Не верно, что все студенты в группе отличники}

2) не (к сказуемому в A) «все» заменяется на «некоторые», и наоборот

{Некоторые студенты в группе отличники}



Конъюнкция («и», логическое умножение)



Высказывание «**A** и **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.

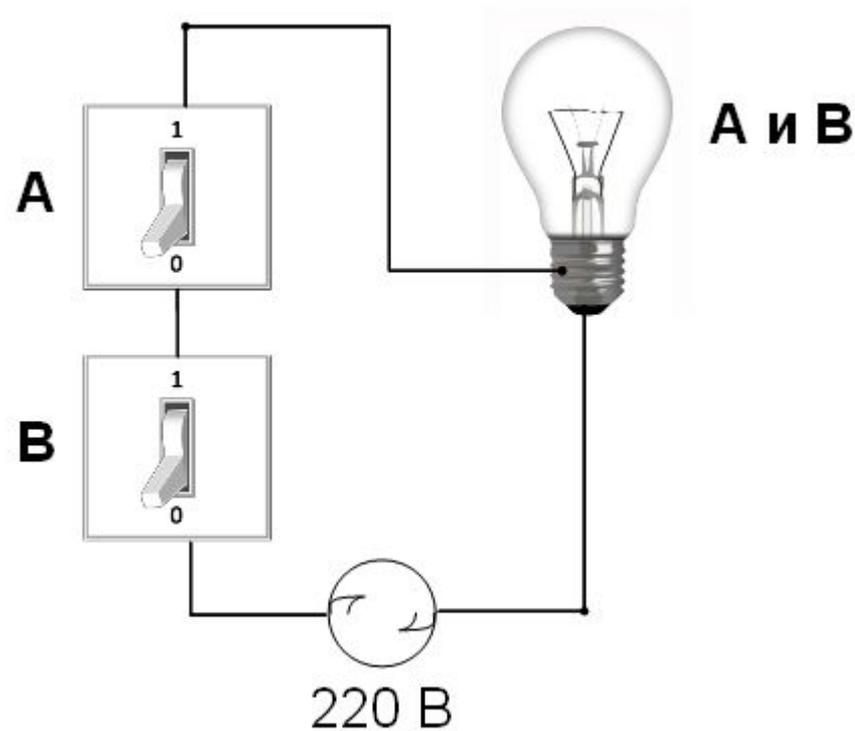


Таблица истинности КОНЪЮНКЦИИ

Также $A \wedge B$
A and B (Паскаль)
A && B (Си)



$A = \{\text{На автостоянке стоит «Мерседес»}\}$

$B = \{\text{На автостоянке стоят «Жигули»}\}$

$A * B = \{\text{На автостоянке стоят «Мерседес» и «Жигули»}\}$

Дизъюнкция («или», логическое сложение)



Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.

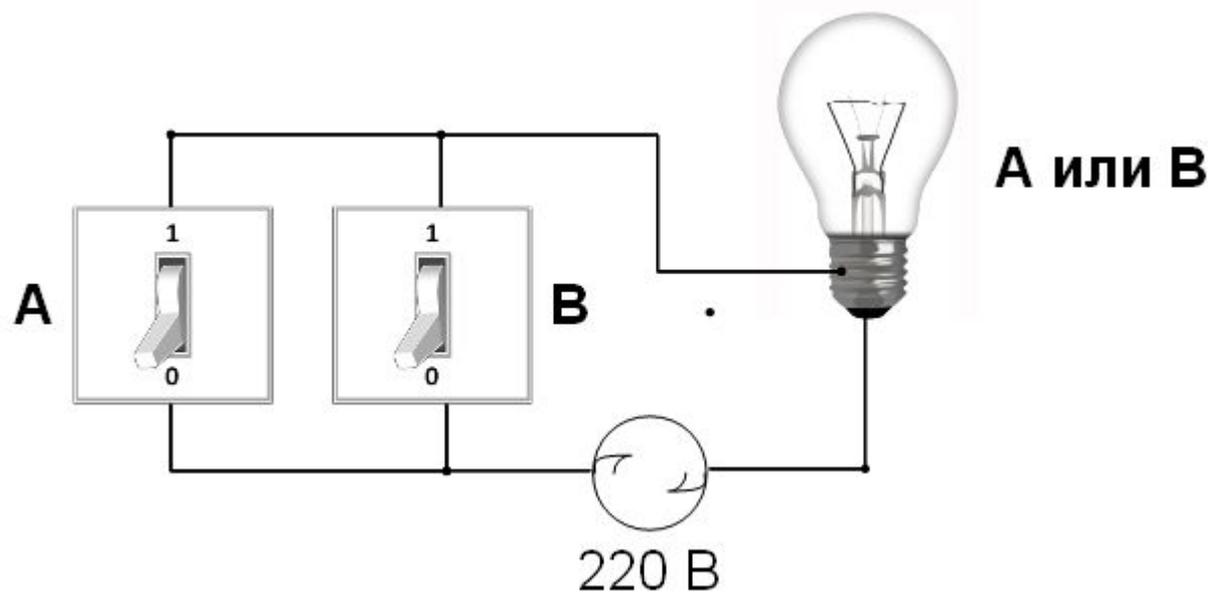


Таблица истинности дизъюнкции

$A = \{\text{На автостоянке стоит «Мерседес»}\}$

$B = \{\text{На автостоянке стоят «Жигули»}\}$

$A + B = \{\text{На автостоянке стоят «Мерседес»
или «Жигули»}\}$

также: **$A \vee B$**
 $A \text{ or } B$ (Паскаль)
 $A \parallel B$ (Си)



Мнемоническое правило

Конъюнкц**И**я

И



Д**И**зъюнкц**И**я

ИЛИ



Разделительная дизъюнкция («либо», “исключающее или” сложение по модулю 2)



Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно A или B , но **не оба одновременно** (то есть $A \neq B$).

Петя сидит на трибуне А либо на трибуне Б

Кошка охотится за мышами либо спит на диване

Таблица истинности разделительной ДИЗЪЮНКЦИИ

$A = \{\text{На автостоянке стоит «Мерседес»}\}$

$B = \{\text{На автостоянке стоят «Жигули»}\}$

$A \oplus B = \{\text{На автостоянке стоит «Мерседес»
либо «Жигули»}\}$

также:

$A \text{ xor } B$ (Паскаль),

$A \wedge B$ (Си)

сложение по модулю 2: $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$



Импликация («если, то», логическое следование)



Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда условие (посылка) — истинно, а следствие (заключение) — ложно.

Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять

Если $2 > 3$, то крокодилы летают

Таблица истинности импликации

- $A = \{\text{На улице дождь}\}$
- $B = \{\text{Асфальт мокрый}\}$
- $A \rightarrow B = \{\text{Если на улице дождь, то асфальт мокрый}\}$



Истинные импликации:

Если $2 \times 2 = 4$, то через Смоленск протекает Днепр

Если через Смоленск протекает Енисей, то $2 \times 2 = 4$

Если через Смоленск протекает Енисей, то $2 \times 2 = 5$

Если все студенты группы напишут контрольную работу по физике на отлично, то слоны в Африке живут

Если через Смоленск протекает Енисей, то все студенты группы напишут контрольную работу по физике на отлично

Ложные импликации:

Если $2 \times 2 = 4$, то через Смоленск протекает Енисей

Если через Смоленск протекает Днепр, то Луна сделана из теста



Эквивалентность («тогда, и только тогда», логическое равенство)



Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны (одновременно истинны или ложны).

Я получу паспорт тогда и только тогда, когда мне исполнится 14 лет

Учитель утверждает, что 5 в четверти ученику он поставит тогда и только тогда, когда ученик получит 5 на зачете

Таблица истинности эквивалентности

- $A = \{\text{Число кратно трем}\}$
- $B = \{\text{Сумма цифр числа кратна трем}\}$
- $A \leftrightarrow B = \{\text{Число кратно трем тогда и только тогда, когда сумма его цифр кратна трем}\}$



Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



И

ИЛИ

НЕ

базовый набор
операций

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

Обозначив простые высказывания буквами (переменными) и используя логические операции, можно записать любое высказывание в виде **логического выражения.**



Пример: пусть система сигнализации должна дать аварийный сигнал, если вышли из строя два из трех двигателей самолета. Обозначим высказывания:

A — “1й двигатель вышел из строя”.

B — “2й двигатель вышел из строя”.

C — “3й двигатель вышел из строя”.

X — “Аварийная ситуация”.

Тогда логическое высказывание **X** можно записать в виде формулы

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Приоритет логических операций при вычислении значения логического выражения

- 1) ...
- 2) ...
- 3) ...
- 4) ...
- 5) ...

Операции одного приоритета выполняются слева
направо



3. Доказательство равносильности логических выражений

Равносильные выражения

Если значения выражений A и B совпадают на всех возможных наборах входящих в их переменных, то такие выражения называют ***равносильными***, или тождественными, или эквивалентными



Равносильность обозначается знаком равенства, например $A = B$.

Примеры равносильных выражений

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Убедиться в тождественности левых и правых частей логических выражений можно путем **аналитических преобразований** выражений по законам алгебры логики или путем построения **таблицы истинности** для логических выражений, находящихся в левой и правой частях



3.1. Таблицы истинности логических выражений



Любую формулу можно задать **таблицей истинности** для этого необходимо:

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

5. ...



$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Практика

Составление логических выражений

**Вычисление значения логического
выражения**

Упражнение 1 (устно)

*В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

- 1) **принтеры & сканеры & продажа**
- 2) **принтеры | сканеры | продажа**
- 3) **принтеры & продажа**
- 4) **принтеры | продажа**

Упражнение 2 (устно)

В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание.

- а) Число 376 четное и трехзначное.
- б) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
- в) Новый год мы встретим на даче либо на Красной площади.
- г) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
- д) Если 14 октября будет солнечным, то зима будет теплой.
- е) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
- ж) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу
- з) Если вчера было воскресенье, то Дима вчера не был в школе и весь день гулял.
- и) Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то число делится на 3.
- к) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

Упражнение 3 (устно)

Постройте отрицания следующих высказываний:

- а) Сегодня в театре идет опера «Евгений Онегин».
- б) Каждый охотник желает знать, где сидит фазан.
- в) Число 1 есть простое число.
- г) Число 1 — составное.
- д) Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.
- е) Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
- ж) Коля решил все задания контрольной работы.
- з) Неверно, что любое число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4.
- и) Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом,
- к) Некоторые млекопитающие не живут на суше.

Упражнение 4 (устно)

Пусть

$p =$ (Ане нравятся уроки математики), а

$q =$ (Ане нравятся уроки химии).

Выразите следующие формулы на естественном языке

$$p * q$$

$$\neg p * q$$

$$p * \neg q$$

$$p + q$$

$$p + \neg q$$

$$\neg p + \neg q$$

$$\neg (p * q)$$

$$\neg (p + q)$$

$$\neg (p * \neg q)$$

$$\neg (p * \neg q)$$

$$\neg (p * \neg q)$$

$$p \rightarrow q$$

$$p \rightarrow \neg q$$

$$\neg (p \rightarrow q)$$

Упражнение 5

Автопилот может работать, если исправен главный бортовой компьютер или два вспомогательных.

Запишите логические формулы для высказываний “автопилот работоспособен” и “автопилот неработоспособен”.

Упражнение 6

Определите значение логического выражения

$((X > 3) + (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$ для $X = 1, 2, 3, 4$.

Упражнение 7

Докажите равносильность двух выражений с помощью таблицы истинности

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Упражнение 8

Символом **F** обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: **X**, **Y**, **Z**.

Дан фрагмент таблицы истинности выражения **F**.
Какие из этих выражений могут соответствовать **F**?

X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1

а) $\mathbf{x + \bar{y} + \bar{z}}$

б) $\mathbf{x + y + z}$

в) $\mathbf{\bar{x} + y + z}$

г) $\mathbf{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}}$

Упражнение 9

Символом **F** обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: **X**, **Y**, **Z**.

Дан фрагмент таблицы истинности выражения **F**.

Какие из этих выражений могут соответствовать **F**?

<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>F</i>
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

2) $X \wedge Y \wedge Z$

3) $X \vee Y \vee Z$

4) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

Шесть приятелей, Саша, Петя, Витя, Дима, Миша и Кирилл, встретившись через 10 лет после окончания школы, выяснили, что двое из них живут в Москве, двое — в Санкт-Петербурге, а двое — в Перми.

Известно, что

- (1) Витя ездит в гости к родственникам в Москву и Санкт-Петербург.
- (2) Петя старше Саши.
- (3) Дима и Миша летом были в Перми в командировке.
- (4) Кирилл и Саша закончили университет в Санкт-Петербурге и уехали в другие города.
- (5) Самый молодой из них живет в Москве.
- (6) Кирилл редко приезжает в Москву.
- (7) Витя и Дима часто бывают в Санкт-Петербурге по работе.

Определите, кто где живет.