ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 14

11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

11.5. Теоремы двойственности и равновесия.

11.5. Теоремы двойственности и равновесия. Справедлива следующая теорема, которую обычно называют теоремой двойственности.

Теорема 1. ***Либо обе взаимнодвойственные задачи линейного программирования*** **Задача 3** ***и*** **Задача 3д(а)** ***не имеют решения, либо они обе имеют решение и при этом справедливо равенство***

$$I(u_*) = -\ I_Д(\lambda^*),$$

где u_* - ***решение прямой, а*** λ^* - ***решение двойственной задачи.***

Доказательство. Выпишем функцию Лагранжа для **задачи 3.**

Задача 3.

$$\langle c, u\rangle \to \inf,$$
$$Aw - b \le 0,$$
$$\hat{A}\overline{w} - \hat{b} = 0$$

$$u \in U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in R^k \times R^{n-k} \,\middle|\, w \ge 0 \right\}.$$

$$w = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix}, \quad \overline{w} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$L(u, \lambda) = \langle c, u\rangle +$$
$$+\langle \mu, Au - b\rangle + \langle \overline{\mu}, \hat{A}u - \hat{b}\rangle =$$
$$= \langle c + A^T\mu + \hat{A}^T\overline{\mu},\ u\rangle - \langle b, \mu\rangle - \langle \hat{b}, \overline{\mu}\rangle,$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in R^m, \quad \overline{\mu} = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} \in R^{s-m}$$

Область ее определения

$$U_0 \times \Lambda^0,$$ где

$$U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in R^k \times R^{n-k} \,\middle|\, w \geq 0 \right\},$$

$$\Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \,\middle|\, \mu \geq 0 \right\}.$$

Выпишем функцию Лагранжа для **задачи 3д(а).**

Задача 3д(а).

$$\langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \overline{\mu} \rangle \to \inf,$$

$$\left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \overline{\mu} \right)^i \leq 0, \quad i \in \{1, \ldots, k\};$$

$$\left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \overline{\mu} \right)^i = 0, \quad i \in \{k+1, \ldots, n\};$$

$$\lambda \in \Lambda^0 =$$

$$= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \,\middle|\, \mu \geq 0 \right\}.$$

$$L_Д(\lambda, u) = \langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \overline{\mu} \rangle +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} u^j \left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \overline{\mu} \right)^j + \sum_{j=k+1}^{n} u^j \left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \overline{\mu} \right)^j =$$

$$= \langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \overline{\mu} \rangle - \left\langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \overline{\mu}, u \right\rangle.$$

и область ее определения

$$U_{0Д}\times\Lambda^0_Д,$$ где

$$U_{0Д}=\Lambda^0=\left\{\lambda=\begin{pmatrix}\mu\\ \overline{\mu}\end{pmatrix}\in R^m\times R^{s-m}\;\middle|\;\mu\geq 0\right\}.$$

$$\Lambda^0_Д=U_0=\left\{u=\begin{pmatrix}w\\ \overline{w}\end{pmatrix}\in R^k\times R^{n-k}\;\middle|\;w\geq 0,\, i\in K\right\},$$

Сравним функцию Лагранжа для двойственной задачи

$$L_Д(\lambda,u)=\langle b,\,\mu\rangle+\langle\hat{b},\,\overline{\mu}\rangle-\langle c+A^T\mu+\hat{A}^T\overline{\mu},\;u\rangle$$

с функцией Лагранжа для основной задачи

$$L(u,\lambda)=\langle c+A^T\mu+\overline{A}^T\overline{\mu},\;u\rangle-\langle b,\,\mu\rangle-\langle\overline{b},\,\overline{\mu}\rangle.$$

Приходим к равенству

$$L(u,\lambda)\equiv -L_Д(\lambda,u),\quad u\in U_0,\,\lambda=\begin{pmatrix}\mu\\ \overline{\mu}\end{pmatrix}\in\Lambda^0.$$

Пусть $\left(u_*,\lambda^*\right)\in U_0\times\Lambda^0$ – седловая точка функции $L\left(u,\lambda\right)$. Тогда

$$L\left(u_*,\lambda\right)\le L\left(u_*,\lambda^*\right)\le L\left(u,\lambda^*\right),\quad u\in U_0,\lambda\in\Lambda^0\Rightarrow$$

$$-L\left(u_*,\lambda\right)\ge -L\left(u_*,\lambda^*\right)\ge -L\left(u,\lambda^*\right),\quad u\in U_0,\lambda\in\Lambda^0\Rightarrow$$

$$-L\left(u,\lambda^*\right)\le -L\left(u_*,\lambda^*\right)\le -L\left(u_*,\lambda\right),\ \lambda\in\Lambda^0=U_{0Д},u\in U_0=\Lambda_Д^0\Rightarrow$$

$$L_Д\left(\lambda,u_*\right)\le L_Д\left(\lambda^*,u_*\right)\le L_Д\left(\lambda^*,u\right),\quad \lambda\in U_{0Д},u\in\Lambda_Д^0.$$

Таким образом, $\left(\lambda^*,u_*\right)\in\Lambda^0\times U_0$ – седловая точка функции $L_Д\left(\lambda,u\right)$.
При этом

$$L\left(u_*,\lambda^*\right)=-L_Д\left(\lambda^*,u_*\right).\qquad(1)$$

Пусть одна из взаимно двойственных задач имеет решение. Например, u_* – решение **задачи 3.** Тогда по **теореме 9.3** существует седловая точка $\left(u_*,\lambda^*\right)\in U_0\times\Lambda^0$ функции Лагранжа для этой задачи. При этом $I\left(u_*\right)=L\left(u_*,\lambda^*\right)$.

Выше установлено, что $\left(\lambda^*, u_*\right) \in \Lambda^0 \times U_0 -$ седловая точка функции $L_Д\left(\lambda, u\right)$.

Тогда по **теореме 9.2** точка λ^* является решением **задачи 3д(а)** и

$$L_Д\left(\lambda^*, u_*\right) = I_Д\left(\lambda^*\right).$$

В силу (1) $L\left(u_*, \lambda^*\right) = -L_Д\left(\lambda^*, u_*\right) \quad (1)$ справедливо равенство

$$I\left(u_*\right) = -\ I_Д\left(\lambda^*\right).$$

Аналогично устанавливается, что из существования решения двойственной задачи следует существование решения основной задачи. Из приведенных рассуждений следует также, что если одна из взаимно двойственных задач не имеет решения, то и другая не может его иметь. Теорема доказана.

Установим условия разрешимости взаимно двойственных задач.

Теорема 2. ***Для существования решения взаимодвойственных задач достаточно, чтобы обе взаимодвойственные задачи были допустимыми.***

Доказательство. Достаточно установить ограниченность снизу целевых функций взаимно двойственных задач. Пусть $u = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in U, \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \in U_Д.$ Тогда

$$
I(u) = \langle c,u\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j u^j = \sum_{j=1}^{k} \overset{c_j \ge \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j}{c_j} \overset{\ge 0}{u^j} + \sum_{j=k+1}^{n} \overset{c_j = \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j}{c_j} u^j \ge
$$

$$
\ge \sum_{j=1}^{k} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j + \sum_{j=k+1}^{n} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j = \left\langle -A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}, u\right\rangle =
$$

$$
= \left\langle -A^T\mu, u\right\rangle + \left\langle -\hat{A}^T\bar{\mu}, u\right\rangle = \left\langle \overset{\mu \ge 0}{\mu}, \overset{-Au \ge -b}{-Au}\right\rangle + \left\langle \bar{\mu}, \overset{-\hat{A}u = -\hat{b}}{-\hat{A}u}\right\rangle \ge
$$

$$
\ge -\langle \mu, b\rangle - \langle \bar{\mu}, \hat{b}\rangle = -I_Д(\lambda) \Rightarrow \quad I(u) \ge -I_Д(\lambda). \qquad (2)
$$

Из (2) выводим

$$
\begin{aligned} I(u) &\ge -I_Д(\lambda), \\ I_Д(\lambda) &\ge -I(u), \end{aligned} \qquad \forall u \in U_0, \lambda \in \Lambda^0. \qquad (3)
$$

Таким образом, если u - допустимая точка основной задачи, то целевая функция двойственной задачи ограничена снизу числом $-I(u)$. Наоборот, если λ - допустимая точка двойственной задачи, то целевая функция основной задачи ограничена снизу числом $-I_{Д}(\lambda)$. Ограниченность целевой функции (снизу при решении задачи линейного программирования на минимум) является достаточным условием ее разрешимости. Теорема доказана.

Теорема 3 (равновесия). ***Пусть*** $u_* \in U$ ***и*** $\lambda^* \in \Lambda$ - ***решения взаимодвойственных задач 3 и 3Д(а) соответственно. Тогда для всех*** $j \in \{1, \ldots, k\}$ ***выполнено***

$$u_*^j > 0,\ j \in \{1, \ldots, k\} \Rightarrow c_j = \left(-A^T \mu^* - \overline{A}^T \overline{\mu}^*\right)^j, \qquad (4)$$

$$c_j > \left(-A^T \mu^* - \overline{A}^T \overline{\mu}^*\right)^j \Rightarrow u_*^j = 0,$$

а для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ ***выполнено***

$$\lambda_i^* > 0 \Rightarrow (Au_*)^i = b^i, \quad (Au_*)^i < b^i \Rightarrow \lambda_i^* = 0. \qquad (5)$$

Доказательство. Из неравенства (2)

$$I(u) = \langle c,u\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j u^j = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j u^j \geq \sum_{j=1}^{k} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j = \sum_{j=1}^{n} \left(-A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}\right)^j u^j = \left\langle -A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}, u\right\rangle =$$

$$= \left\langle -A^T\mu, u\right\rangle + \left\langle -\hat{A}^T\bar{\mu}, u\right\rangle = \left\langle \mu, -Au\right\rangle + \left\langle \bar{\mu}, -\hat{A}u\right\rangle \geq$$

$$\geq -\left\langle \mu, b\right\rangle - \left\langle \bar{\mu}, \hat{b}\right\rangle = -I_Д(\lambda). \qquad (2)$$

следует

$$I(u) = \langle c,u\rangle \geq \left\langle -A^T\mu - \hat{A}^T\bar{\mu}, u\right\rangle = \left\langle \mu, -Au\right\rangle + \left\langle \bar{\mu}, -\hat{A}u\right\rangle \geq$$

$$\geq -\left\langle \mu, b\right\rangle - \left\langle \bar{\mu}, \hat{b}\right\rangle = -I_Д(\lambda). \qquad (6)$$

В силу **теоремы 1** справедливо равенство

$$I(u_*) = -I_Д(\lambda^*).$$

Тогда при $u = u_*, \lambda = \lambda^*$ все знаки неравенства в (6) следует заменить на знаки равенства. Имеем

$$I(u_*) = \langle c, u_* \rangle = \langle -A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^*, u_* \rangle = \langle \mu^*, -Au_* \rangle + \langle \bar{\mu}^*, -\hat{A}u_* \rangle =$$

$$= -\langle \mu^*, b \rangle - \langle \bar{\mu}^*, \hat{b} \rangle = -I_Д(\lambda^*). \qquad (7)$$

Из (7) выводим

$$\langle c, u_* \rangle = \langle -A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^*, u_* \rangle \Rightarrow \langle -A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^* - c, u_* \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(-A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^* - c\right)^j u_*^j + \overbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \left(-A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^* - c\right)^j u_*^j}^{=0\ \text{Задача 3Д}(a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(-A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^* - c\right)^j u_*^j = 0. \qquad (8)$$

В силу $\left(-A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^* - c\right)^j \overset{\text{Задача 3Д}(a)}{\leq} 0, \quad u_*^j \overset{\text{Задача 3}}{\geq} 0, \quad j = 1, \ldots, k$

из (8) следует утверждение (4) теоремы

$$u_*^j > 0,\ j \in \{1, \ldots, k\} \Rightarrow c_j = \left(-A^T\mu^* - \overline{A}^T\bar{\mu}^*\right)^j,$$

$$c_j > \left(-A^T\mu^* - \overline{A}^T\bar{\mu}^*\right)^j \Rightarrow u_*^j = 0, \quad j = 1, \ldots, k \qquad (4)$$

Аналогично из (7) $I(u_*) = \langle c, u_* \rangle = \langle -A^T\mu^* - \hat{A}^T\bar{\mu}^*, u_* \rangle = \langle \mu^*, -Au_* \rangle +$

$+ \langle \bar{\mu}^*, -\hat{A}u_* \rangle = -\langle \mu^*, b \rangle - \langle \bar{\mu}^*, \hat{b} \rangle = -I_Д(\lambda^*).$ (7) следует

$$\langle \mu^*, -Au_* \rangle + \langle \bar{\mu}^*, -\hat{A}u_* \rangle = -\langle \mu^*, b \rangle - \langle \bar{\mu}^*, \hat{b} \rangle \Rightarrow$$

$$0 = -\langle \mu^*, b \rangle + \langle \mu^*, Au_* \rangle - \langle \bar{\mu}^*, \hat{b} \rangle + \langle \bar{\mu}^*, \hat{A}u_* \rangle \Rightarrow \qquad \mu^* = \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_m^* \end{pmatrix}$$

$$\langle \mu^*, Au_* - b \rangle + \overbrace{\langle \bar{\mu}^*, \hat{A}u_* - \hat{b} \rangle}^{=0\ \text{Задача 3}} = 0 \Rightarrow \langle \mu^*, Au_* - b \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (Au_* - b)^i = 0. \qquad (9)$$

В силу $(Au_* - b)^i \overset{\text{Задача 3}}{\le} 0,\quad \lambda_*^i \overset{\text{Задача 3Д(a)}}{\ge} 0,\quad i = 1, \dots, m$ из (9) следует утверждение (5) теоремы

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i^* > 0 \Rightarrow (Au_*)^i = b^i, \\ &(Au_*)^i < b^i \Rightarrow \lambda_i^* = 0 \end{aligned}\right. \quad i = 1, \dots, m \qquad (5)$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$u^1 + 2u^2 - 3u^3 + 5u^4 - 4u^5 \to \min$$

$$u^1 + 2u^2 - 3u^3 + 4u^4 + 6u^5 \leq 8,$$

$$-2u^1 + 3u^2 - 4u^3 + u^4 + 5u^5 \leq 10,$$

$$-4u^1 + 6u^2 + 2u^3 - 5u^4 + u^5 = -4,$$

$$3u^1 - 5u^2 + 2u^3 + u^4 - 4u^5 = 8,$$

$$u^1 \geq 0, u^2 \geq 0, u^3 \geq 0$$

Построим двойственную к ней задачу:

$$8\lambda_1 + 10\lambda_2 - 4\lambda_3 + 8\lambda_4 \to \min$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3\lambda_4 \le 1,$$

$$-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 + 5\lambda_4 \le 2,$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 \le -3,$$

$$-4\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 - \lambda_4 = 5,$$

$$-6\lambda_1 - 5\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = -4,$$

$$\lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0.$$

Точка $u \in R^5$ с координатами

$$u^1 = 0,\ u^2 = 0,\ u^3 = 0,\ u^4 = \frac{8}{19},\ u^5 = -\frac{36}{19}$$

является допустимой для прямой задачи, так как выполняются соотношения

$$0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot\frac{8}{19}-6\cdot\frac{36}{19}=-\frac{184}{19}<8,$$

$$-2\cdot 0+3\cdot 0-4\cdot 0+\frac{8}{19}-5\cdot\frac{36}{19}=-\frac{172}{19}<10,$$

$$-4\cdot 0+6\cdot 0+2\cdot 0-5\cdot\frac{8}{19}-\frac{36}{19}=-4,$$

$$3\cdot 0-5\cdot 0+2\cdot 0+\frac{8}{19}+4\cdot\frac{36}{19}=8.$$

Аналогично точка $\lambda\in R^4$ с координатами

$$\lambda_1=5,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=\frac{207}{19},\ \lambda_4=\frac{389}{19}$$

является допустимой для двойственной задачи, так как выполняются соотношения

$$-5+2\cdot 9+4\cdot\frac{207}{19}-3\cdot\frac{389}{19}=-\frac{92}{19}<1,\qquad -2\cdot 5-3\cdot 9-6\cdot\frac{207}{19}+5\cdot\frac{389}{19}=0<2,$$

$$3\cdot 5+4\cdot 9-2\cdot\frac{207}{19}-2\cdot\frac{389}{19}=-\frac{223}{19}<-3,$$

$$-6\cdot 5-5\cdot 9-\frac{207}{19}+4\cdot\frac{389}{19}=-4,\qquad -4\cdot 5-9+5\cdot\frac{207}{19}-\frac{389}{19}=5.$$

По **теореме 2** обе взаимодвойственные задачи имеют решение. Выпишем эти решения.

Решение прямой задачи:

$$u_*^1 = \frac{112}{11},\ u_*^2 = 0,\ u_*^3 = 0,\ u_*^4 = -\frac{72}{11},\ u_*^5 = 4, \quad I\left(u_*\right) = -\frac{424}{11}$$

Решение двойственной задачи:

$$\lambda_1^* = \frac{30}{11},\ \lambda_2^* = 0,\ \lambda_3^* = 4,\ \lambda_4^* = \frac{45}{11},\ \ I_Д\left(\lambda^*\right) = \frac{424}{11}$$

В соответствии с **теоремой 1** здесь выполнено равенство

$$I\left(u_*\right) = -\ I_Д\left(\lambda^*\right).$$

В силу **теоремы 3** первое ограничение прямой задачи на оптимальном векторе u_* и первое ограничение двойственной задачи на оптимальном векторе λ^* должны выполняться со знаком «=». Действительно,

$$\frac{112}{11} + 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 4\left(-\frac{72}{11}\right) + 6\cdot 4 = 8, \quad -\frac{30}{11} + 2\cdot 0 + 4\cdot 4 - 3\cdot\frac{45}{11} = 1.$$

Вычислим второе ограничение основной задачи, а также второе и третье ограничения двойственной задачи на оптимальных значениях переменных. Имеем

$$\left(-2u^1+3u^2-4u^3+u^4+5u^5-10\right)\Bigg|_{\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\\u^4\\u^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{112}{11}\\0\\0\\-\frac{72}{11}\\4\end{pmatrix}}=-\frac{186}{11}<0,$$

$$\left(-2\lambda_1-3\lambda_2-6\lambda_3+5\lambda_4-2\right)\Bigg|_{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{30}{11}\\0\\4\\\frac{45}{11}\end{pmatrix}}=-\frac{125}{11}<0,$$

$$\left(3\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_3-2\lambda_4+3\right)\Bigg|_{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{30}{11}\\0\\4\\\frac{45}{11}\end{pmatrix}}=-\frac{49}{11}<0.$$

В полном соответствие с **теоремой 3** выше было получено $\lambda_2^*=0,\ u_*^2=0,\ u_*^3=0.$