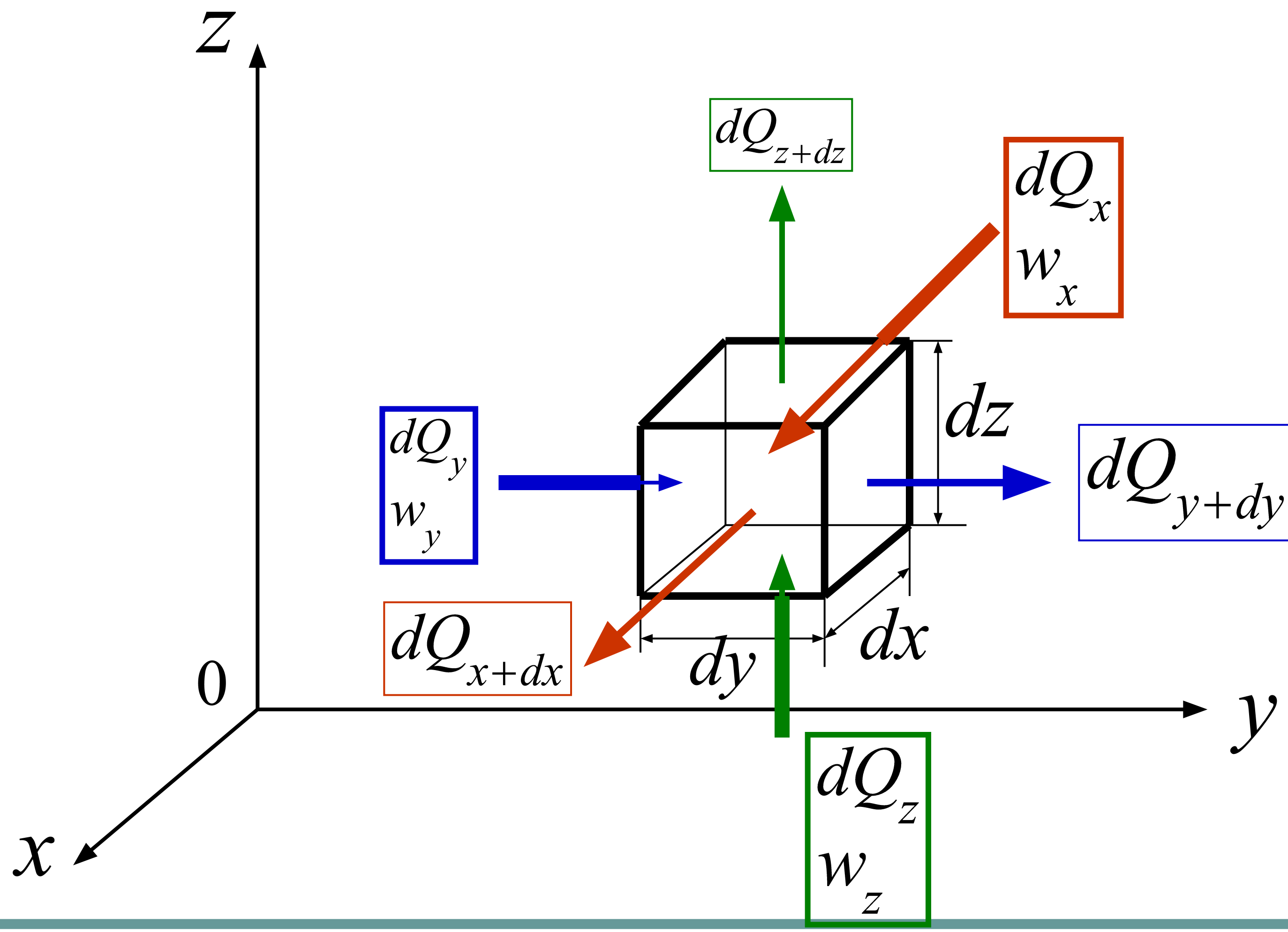
Тепломассообмен 10

- Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена
- Условия однозначности

К дифференциальному уравнению теплопроводности в жидкости



Уравнение теплового баланса

В математической физике изучают явление в бесконечно малом объеме *dv* за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$, что позволяет пренебречь величинами 2 порядка малости.

Принимаются допущения: тело однородно и изотропно; физические свойства тела в малом объеме *dv* постоянны; внутренние источники теплоты отсутствуют.

По аналогии с дифференциальным уравнением теплопроводности в твердом теле, которое было выведено ранее, можно получить дифференциальное уравнение теплопроводности в жидкости (уравнение энергии Фурье – Кирхгофа).

Уравнение теплового баланса: $\boxed{Q = Q_1,}$ (1)

где *Q* – изменение внутренней энергии объема *dv* за время $d\tau$:

Ряд Тейлора

$$Q = \rho dv\left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right)d\tau \quad (2)$$

– изменение внутренней энергии объема *dv* за время $d\tau$;

$Q_1 \rightarrow$ теплота, подведенная конвекцией и теплопроводностью к объему *dv* за время $d\tau$.

$$Q_1 = Q_{x1} + Q_{y1} + Q_{z1}, \quad (3)$$

$$Q_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx}, \quad (4)$$

Теплота на входе вдоль оси x:

$$dQ_x = q_x dydzd\tau, \quad (5)$$

Теплота на выходе вдоль оси *x:*

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau. \quad (6)$$

Если функция q_{x+dx} в интервале *dx* непрерывна и дифференцируема, то ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (7)$$

где $\frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2!} \approx 0,$ как величина 2 порядка малости.

Теплота, подведенная теплопроводностью и конвекцией

Подставляя (5), (6), (7) в (4), имеем теплоту, подведенную вдоль оси *x* к бесконечно малому объему *dv* за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$:

$$Q_{x1} = (q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x}dx)dydzd\tau \overset{(8)}{=} -\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdydzd\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dvd\tau.$$

Аналогично вдоль осей *y* и *z*:

$$Q_{y1} = dQ_y - dQ_{y+dy} \overset{(9)}{=} -\frac{\partial q_y}{\partial y}dvd\tau,$$

$$Q_{z1} = dQ_z - dQ_{z+dz} \overset{(10)}{=} -\frac{\partial q_z}{\partial z}dvd\tau.$$

После подстановки (2), (3), (8), (9), (10) в (1) получаем:

$$\rho dv(\frac{\partial h}{\partial \tau})d\tau = -(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z})dvd\tau,$$

Теплота, подведенная к элементарному объему

После сокращения на *dv*, $d\tau$ имеем: $\rho\left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right) = -divq,$ (11)

где $$divq = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

Тогда теплота, подведенная к объему *dv* за время $d\tau$ конвекцией и теплопроводностью: (12)

$$q_x = \rho w_x h - \lambda \frac{\partial t}{\partial x},$$

где $\rho w_x \rightarrow$ расход массы через единицу сечения в единицу времени, кг/(м^{2}с).

Аналогично вдоль оси y: $$q_y = \rho w_y h - \lambda \frac{\partial t}{\partial y}$$

и вдоль оси z: $$q_z = \rho w_z h - \lambda \frac{\partial t}{\partial z}$$

Общий вид дифференциального уравнения энергии Фурье-Кирхгофа

Возьмем производные по координатам *x, y, z* от тепловых потоков:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho\left(w_x \frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial w_x}{\partial x}\right) - \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \rho\left(w_y \frac{\partial h}{\partial y} + h\frac{\partial w_y}{\partial y}\right) - \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = \rho\left(w_z \frac{\partial h}{\partial z} + h\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) - \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \qquad (15)$$

После подстановки (13), (14), (15) в (11) получим общий вид дифференциального уравнения энергии Фурье-Кирхгофа:

$$\rho\frac{\partial h}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) - \rho\left(w_x\frac{\partial h}{\partial x} + w_y\frac{\partial h}{\partial y} + w_z\frac{\partial h}{\partial z}\right) - \qquad (16)$$

$$\rho h\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right).$$

Развернутое выражение дифференциального уравнения энергии

В уравнении (16) выражение

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0 \quad (17)$$

представляет собой дифференциальное уравнение сплошности (неразрывности) течения жидкости.

Введем также обозначение оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\nabla^2 t \rightarrow \quad (18)$$

С учетом выражений (17) и (18) уравнение энергии примет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial \tau}+w_x\frac{\partial h}{\partial x}+w_y\frac{\partial h}{\partial y}+w_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\lambda\nabla^2 t, \quad (19)$$

где энтальпия $h = c_p t$, тогда развернутое уравнение энергии:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}+w_x\frac{\partial t}{\partial x}+w_y\frac{\partial t}{\partial y}+w_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)=\lambda\nabla^2 t. \quad (20)$$

Дифференциальное уравнение энергии Фурье-Кирхгофа

В уравнении (20) выражение в скобках представляет собой полную (субстанциональную) производную от температуры по времени и координатам:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{Dt}{d\tau},} \quad (21)$$

где проекции скоростей жидкости на оси координат:

$$w_x = \frac{\partial x}{\partial \tau}; w_y = \frac{\partial y}{\partial \tau}; w_z = \frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

После деления уравнения (20) на $c_p \rho$,

с учетом (21) и обозначения коэффициента температуропроводности жидкости:

$$\boxed{\frac{\lambda}{c_p \rho} = a \rightarrow}$$

получаем окончательное выражение дифференциального уравнения энергии:

$$\boxed{\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t.} \quad (22)$$

Дифференциальное уравнение движения жидкости Навье-Стокса

Частным случаем дифференциального уравнения энергии (22) для твердого тела $(w_x = w_y = w_z = 0)$ является дифференциальное уравнение тепло-проводности, которое было выведено ранее:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t .}$$

Вывод дифференциального уравнения движения жидкости Навье-Стокса сложен, поэтому оно приводится без вывода:

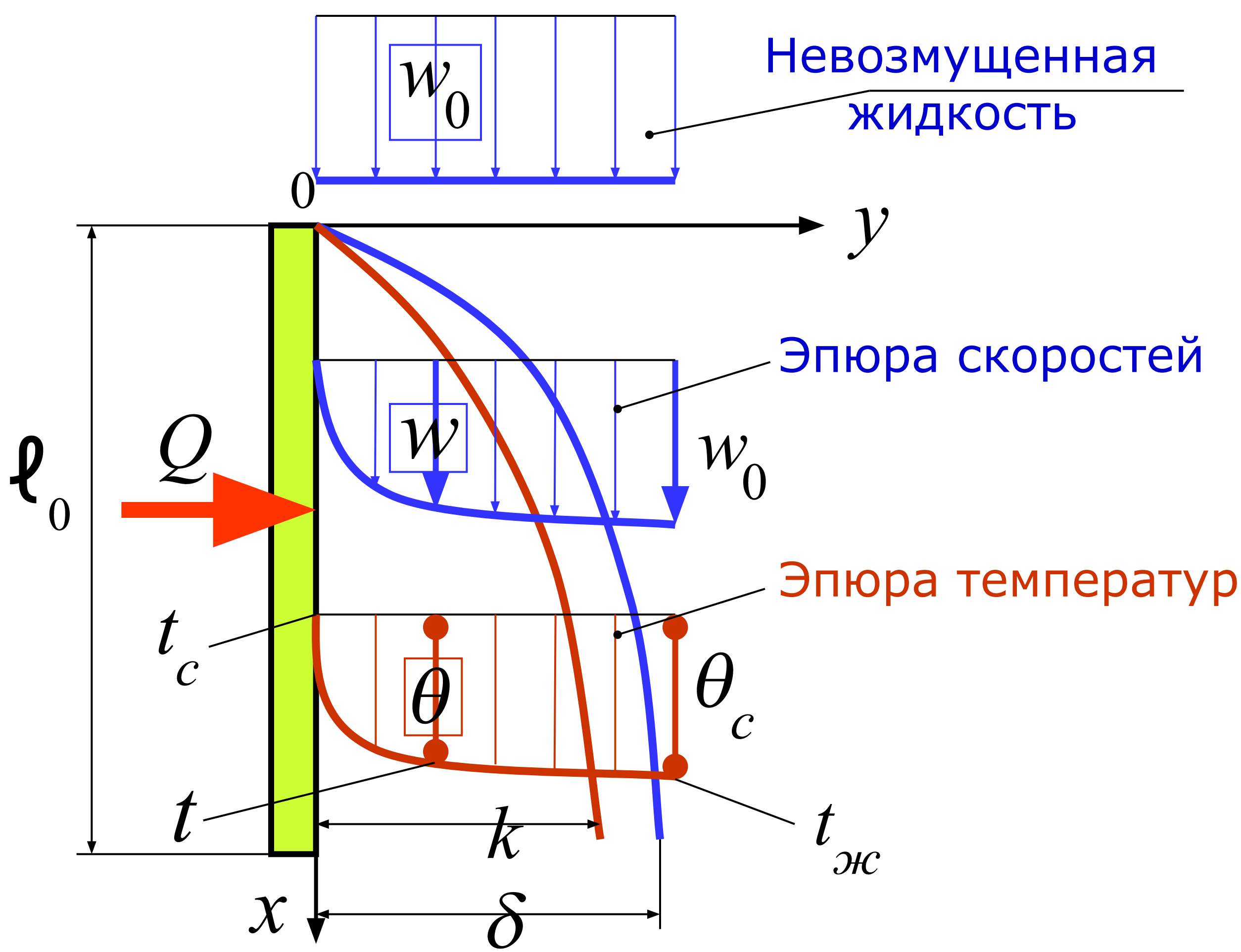
$$\boxed{\frac{D\vec{w}}{d\tau} = \vec{g}\beta\theta - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{w},} \quad (1)$$

где оператор Гамильтона для давления:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Стрелки в уравнении (1) отмечают векторные величины.

Продольное обтекание жидкостью вертикальной пластины



Проекции дифференциального уравнения движения на оси координат

При продольном обтекании вертикальной пластины, когда ось «*x*» направлена вниз, проекции ускорения на оси координат:

$g_y = g_z = 0$ - тогда $g_x = g = 9{,}81\ м/с^2$ - ускорение свободного падения.

В этом случае проекции уравнения Навье-Стокса (1) на оси координат:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = g\beta\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 w_x; \quad (2)$$

$$\frac{Dw_y}{d\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 w_y; \quad (3)$$

$$\frac{Dw_z}{d\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w_z. \quad (4)$$

Составляющие проекций уравнения движения на оси координат

В левых частях уравнений (2), (3), (4) находятся полные (субстанциональные) производные от скоростей по времени и координатам:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z};$$

$$\frac{Dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z};$$

$$\frac{Dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z},$$

Введем обозначения операторов Лапласа:

$$\nabla^2 w_x = \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 w_y = \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}; \quad \nabla^2 w_z = \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}.$$

Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена

Дифференциальное уравнение сплошности (неразрывности):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0, \quad (5)$$

или в векторной форме:

$$\boxed{div\vec{w}=0.} \quad (6)$$

Итак конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\alpha=-\frac{\lambda}{\theta_c}\frac{d\theta}{dy};\\
&\frac{Dt}{d\tau}=a\nabla^2 t;\\
&\frac{D\vec{w}}{d\tau}=\vec{g}\beta\theta-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{w};\\
&div\vec{w}=o.
\end{aligned}} \quad (7)$$

Чтобы из бесконечного множества процессов, описываемых системой уравнений (7), выделить конкретный процесс, надо добавить условия однозначности.

Условия однозначности

- Геометрические условия: вертикальная плоскость длиной ℓ_0;
- Физические условия: $\lambda, \rho, a, \nu, \beta \rightarrow$ величины постоянные, берутся при определяющей температуре. Чаще всего ей является средняя температура жидкости $t_{ж}$.
- Начальные условия: при $\tau = 0 \rightarrow t = f(x, y, z)$;
- Граничные условия I рода: при

$$x < 0 \rightarrow w_{x} = w_{0}; w_y = w_z = 0; \theta = \theta_0 = t - t = 0;$$

(8)

$$0 \le x \le \ell_0; y = 0 \rightarrow w_{x} = w_y = w_z = 0; \theta = \theta_c = t_c - t = Const.$$

В системе дифференциальных уравнений и условиях однозначности есть три вида величин: независимые переменные - x, y, z; постоянные величины - $w_0, \ell_0, t_{ж}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta$; зависимые переменные - $\alpha, \theta, w_x, w_y, w_z, p$.

Общие решения задачи конвективного теплообмена

Шесть неизвестных (независимых величин) могут быть найдены при наличии шести уравнений. С учетом того, что уравнение Навье-Стокса в проекциях на оси координат дает три дифференциальных уравнения, общие решения системы уравнений (7) с граничными условиями (8):

$$\boxed{\alpha = f_1(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta);}$$

$$\theta = f_2(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta);$$

$$w_x = f_3(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta); \qquad (9)$$

$$w_y = f_4(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta);$$

$$w_z = f_5(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta);$$

$$p = f_6(x, y, z, w_0, \ell_0, t_{жс}, \theta_c, \lambda, \rho, a, \nu, \beta).$$