ВоГТУ

Лекция 3

Динамика вращательного движения (динамика абсолютно твёрдого тела)

Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент

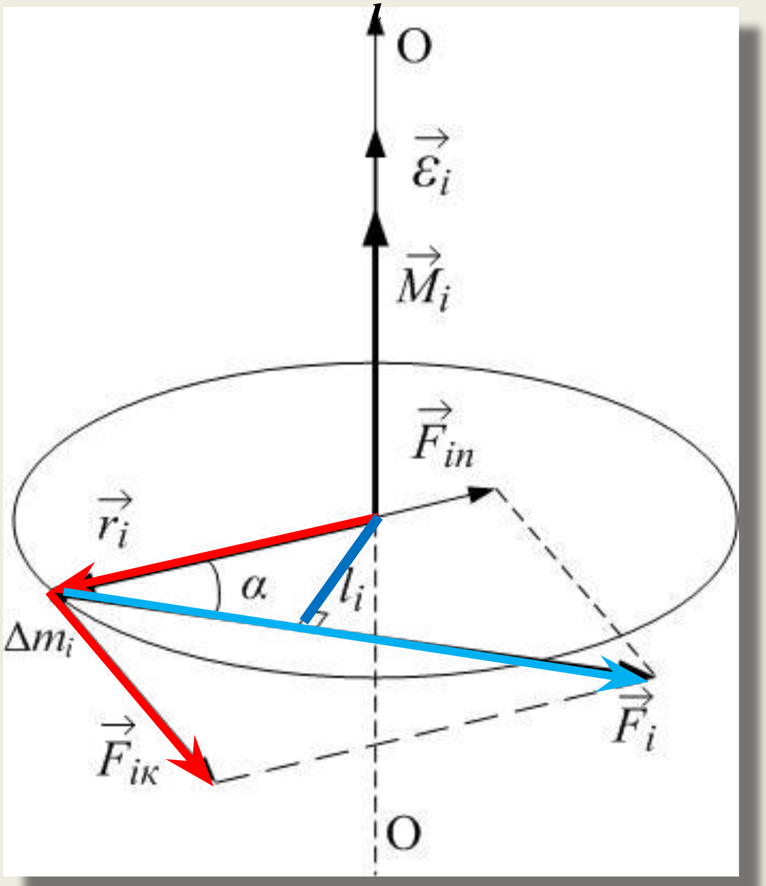
2015 г.

План

1. Закон динамики вращательного движения
   A. Момент силы
   B. Момент пары сил
   C. Момент инерции
2. Моменты инерции некоторых тел:
   D. Кольцо (тонкостенный цилиндр)
   E. Толстостенный цилиндр
   F. Сплошной цилиндр
   G. Шар
   H. Тонкий стержень
3. Теорема Штейнера
4. Момент импульса тела. Закон сохранения и закон изменения момента импульса; импульс момента силы
5. Работа при вращательном движении
6. Кинетическая энергия вращения
7. Сопоставление величин и законов для поступательного и вращательного движения

Рассматривается твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси

Запишем ***второй закон Ньютона*** для отдельной элементарной массы Δm_i.



$$F_{ik} = \Delta m_i a_{ik}$$

F_{in} - нормальная составляющая равнодействующей силы

F_{ik} - касательная составляющая равнодействующей силы

$$a_{ik} = \varepsilon \cdot r_i$$

$$F_{ik} = \Delta m_i \cdot \varepsilon \cdot r_i$$

$$F_{ik} \cdot r_i = \Delta m_i \cdot \varepsilon \cdot r_i \cdot r_i$$

$$F_{ik} \cdot r_i = F_i \cdot \sin\alpha \cdot r_i = F_i \cdot l_i$$

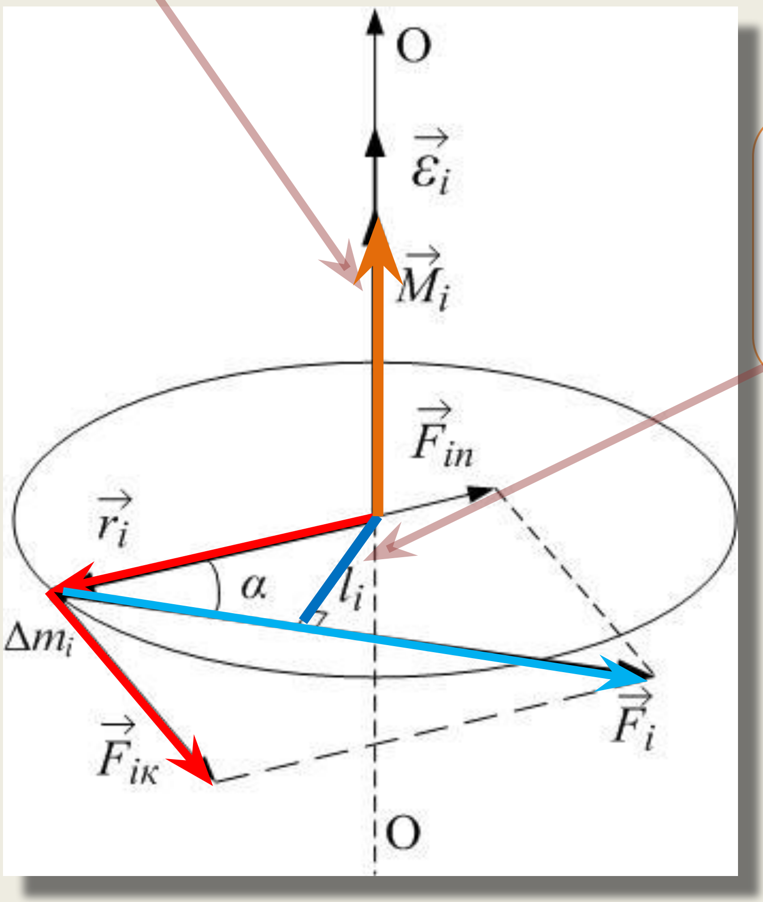
$$\boxed{M_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon}$$

Момент силы

Моментом силы относительно оси называется вектор, направленный по оси вращения и связанный с направлением силы правилом буравчика, модуль которого равен произведению силы на ее плечо:

$$M = F \cdot l$$

$$[M] = H \cdot м$$



Плечо силы l относительно оси вращения – это кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения

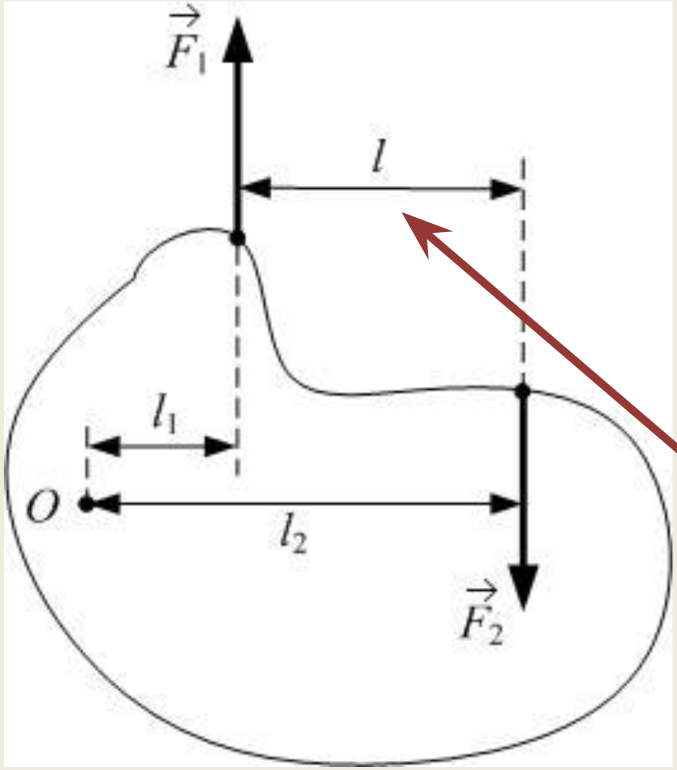
В векторной форме момент силы относительно точки:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Проекция момента силы

$$M_z = [r \cdot F]_z = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l$$

Момент пары сил



Пара сил – это две равные по величине и противоположные по направлению силы, линии действия которых не совпадают

Плечо пары сил

Суммарный момент пары сил в проекции на ось, проходящую через точку О:

$$M = F_2 \cdot l_2 - F_1 \cdot l_1 = F \cdot (l_1 + l) - F \cdot l_1 = F \cdot l$$

Закон динамики вращательного движения

$$M_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon$$

$$\vec{M}_i = I_i \vec{\varepsilon}$$

Суммируем по всем элементарным массам, на которые разбито тело

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2 \right)$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{внешних}$$

Скалярная величина I, равная произведению массы материальной точки на квадрат её расстояния до оси, называется ***моментом инерции материальной точки*** относительно оси OO:

$$I = mr^2$$

$$[I] = кг \cdot м^2$$

Момент инерции твёрдого тела:

$$I = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2 \right)$$

$$\vec{M}^{внешн.} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Закон динамики вращательного движения

$$\boxed{\vec{M}^{\,внешн.} = I \cdot \vec{\varepsilon}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}^{\,внешн.}}{I}}$$

Угловое ускорение тела прямо пропорционально суммарному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела

Аналог для поступательного движения:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}^{\,внешн.}}{m}}$$

Ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей внешних сил и обратно пропорционально массе тела

Момент инерции I твердого тела является мерой инертных свойств твердого тела при вращательном движении и аналогичен массе тела m во втором законе Ньютона.

Момент инерции I

- зависит от массы тела и от её распределения относительно оси вращения

- характеризует инертные свойства тела при вращательном движении

$$I = mr^2$$

для материальной точки

$$I = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2\right)$$

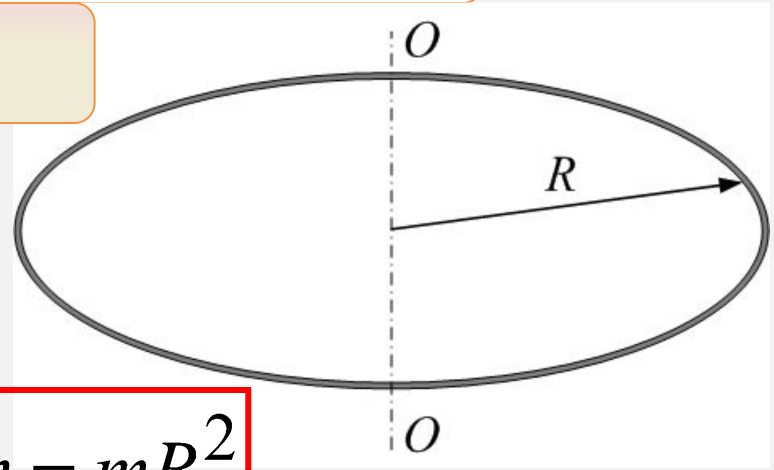
для твёрдого тела (для системы точечных масс)

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho \cdot dV$$

для твёрдого тела (если масса распределена непрерывно)

Моменты инерции некоторых тел

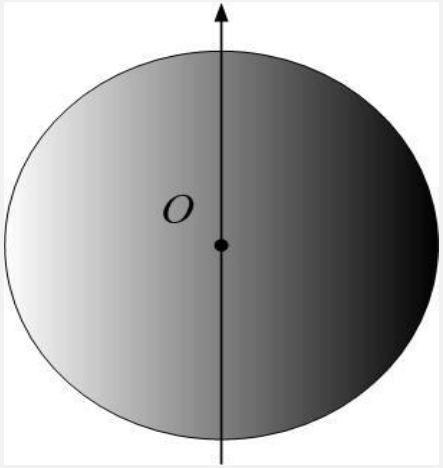
1) Кольцо (тонкостенный цилиндр)



$$I = \int_m r^2 dm = \int_m R^2 dm = R^2 \int_m dm = mR^2$$

2) Шар

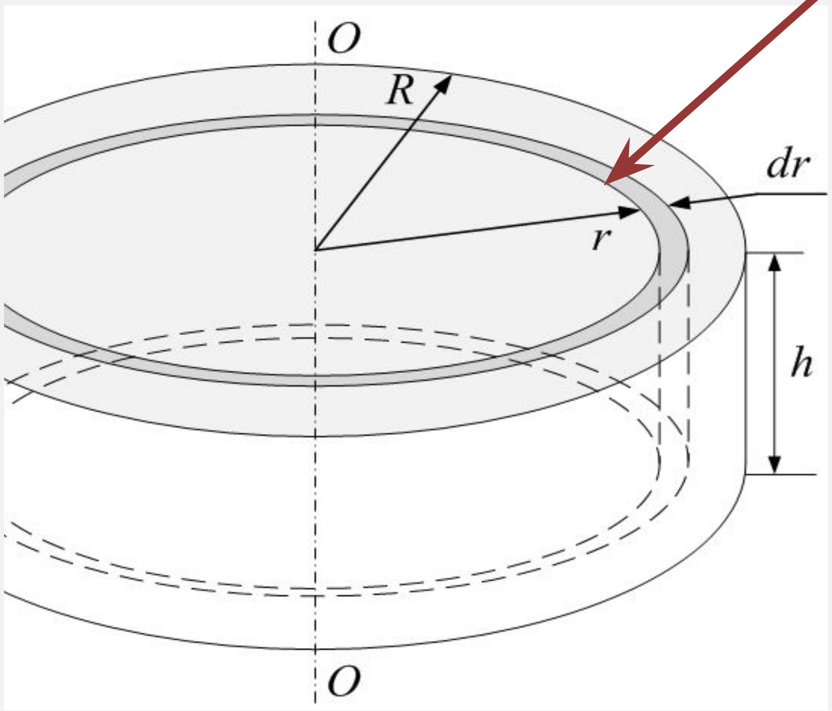
$$I = \frac{2}{5} mR^2$$



(без доказательства)

3)Сплошной цилиндр (диск)

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$



$$I = \int_m r^2 \cdot dm = \int_0^R r^2 \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

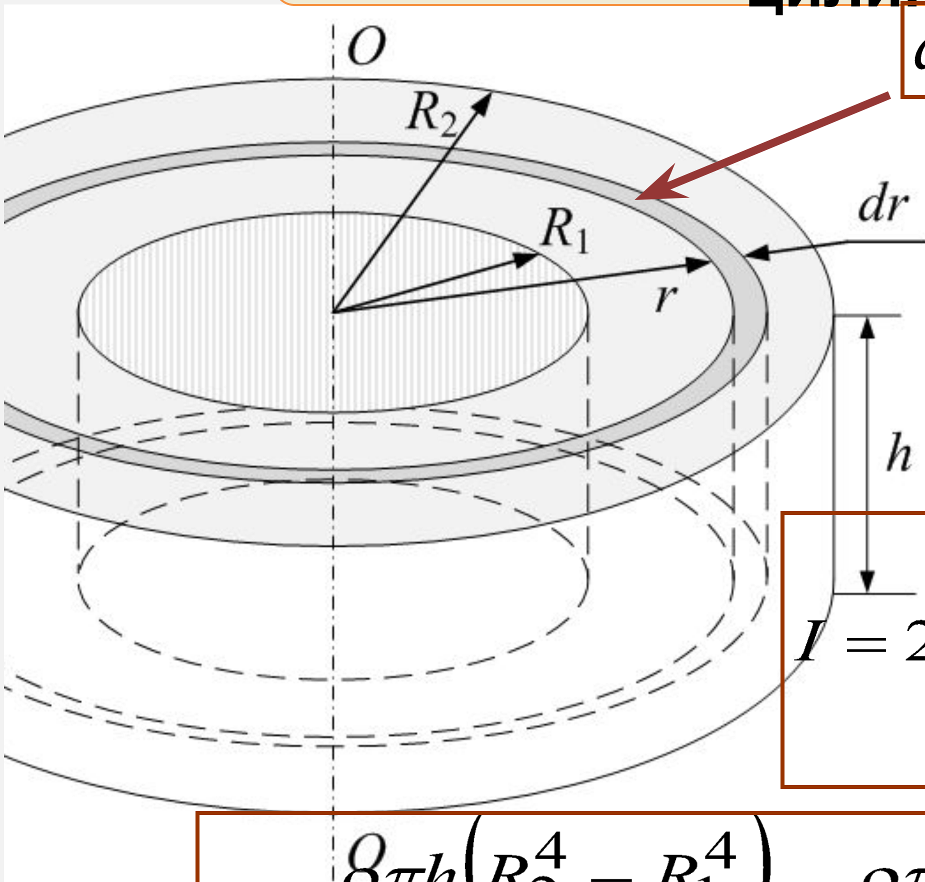
$$I = 2\rho \cdot \pi \cdot h \int_0^R r^3 dr$$

$$I = 2\rho \cdot \pi \cdot h \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^R$$

$$I = \frac{\rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4}{2} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot R^2}{2} = \frac{\rho \cdot V \cdot R^2}{2} = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

4) Полый (толстостенный) цилиндр



$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$I = \int_m r^2 \cdot dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

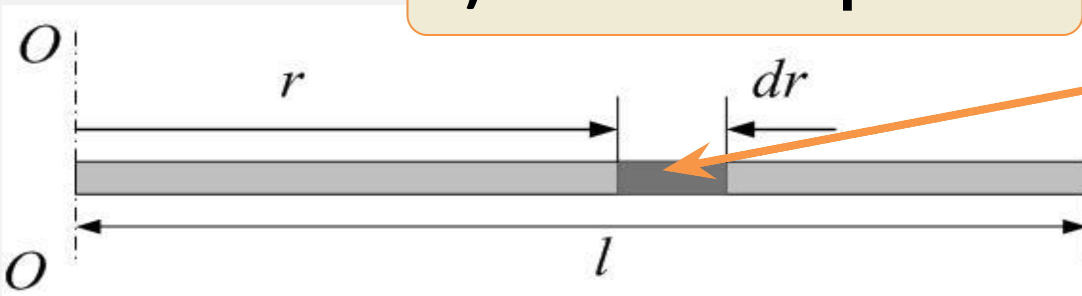
$$I = 2\rho \cdot \pi \cdot h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\rho\pi h \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{R_1}^{R_2}$$

$$I = \frac{\rho\pi h \left(R_2^4 - R_1^4\right)}{2} = \frac{\rho\pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}$$

$$I = \frac{\rho V \left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2} = \frac{m\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{m\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}}$$

5) Тонкий стержень



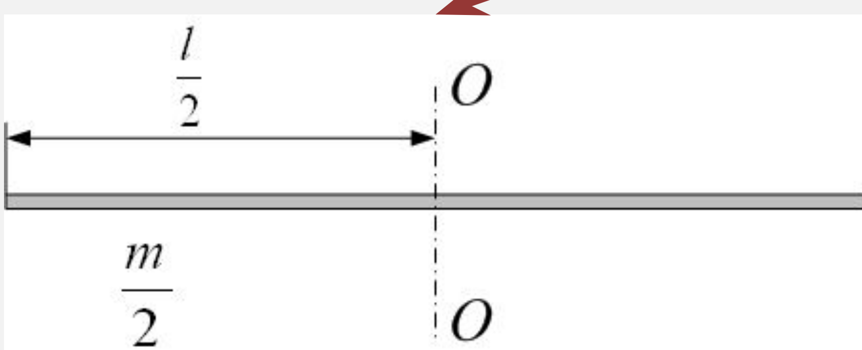
$$dm = \frac{m}{l}dr$$

$$I = \int_m r^2 dm = \int_0^l r^2 \cdot \frac{m}{l} dr = \frac{m}{l}\int_0^l r^2 \cdot dr = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

относительно оси, проходящей через <u>конец</u> стержня

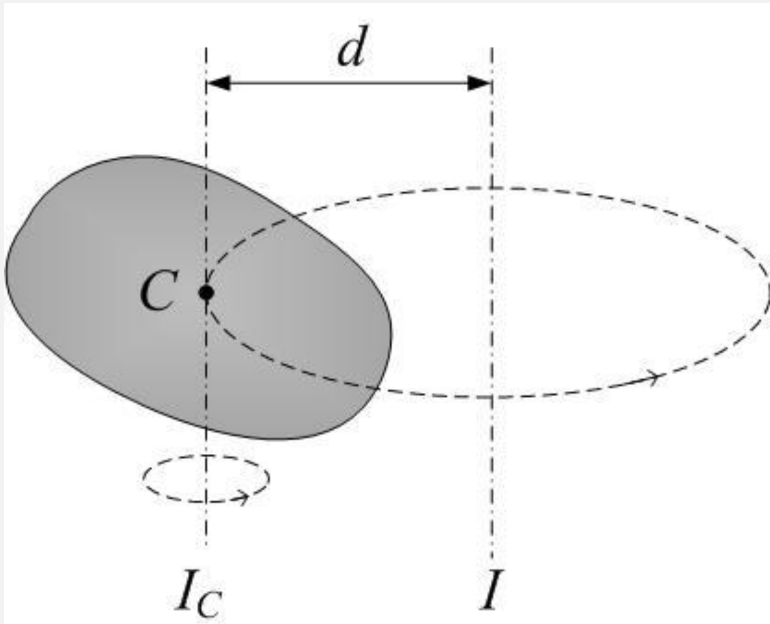
относительно оси, проходящей через <u>середину</u> стержня



$$I_c = 2\frac{\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{3} = \frac{ml^2}{12}$$

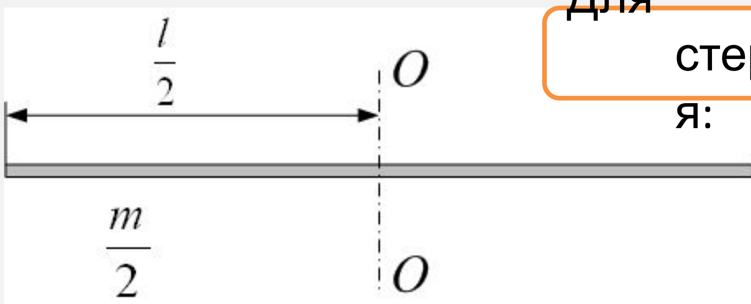
$$I_c = \frac{ml^2}{12}$$

Теорема Штейнера



Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

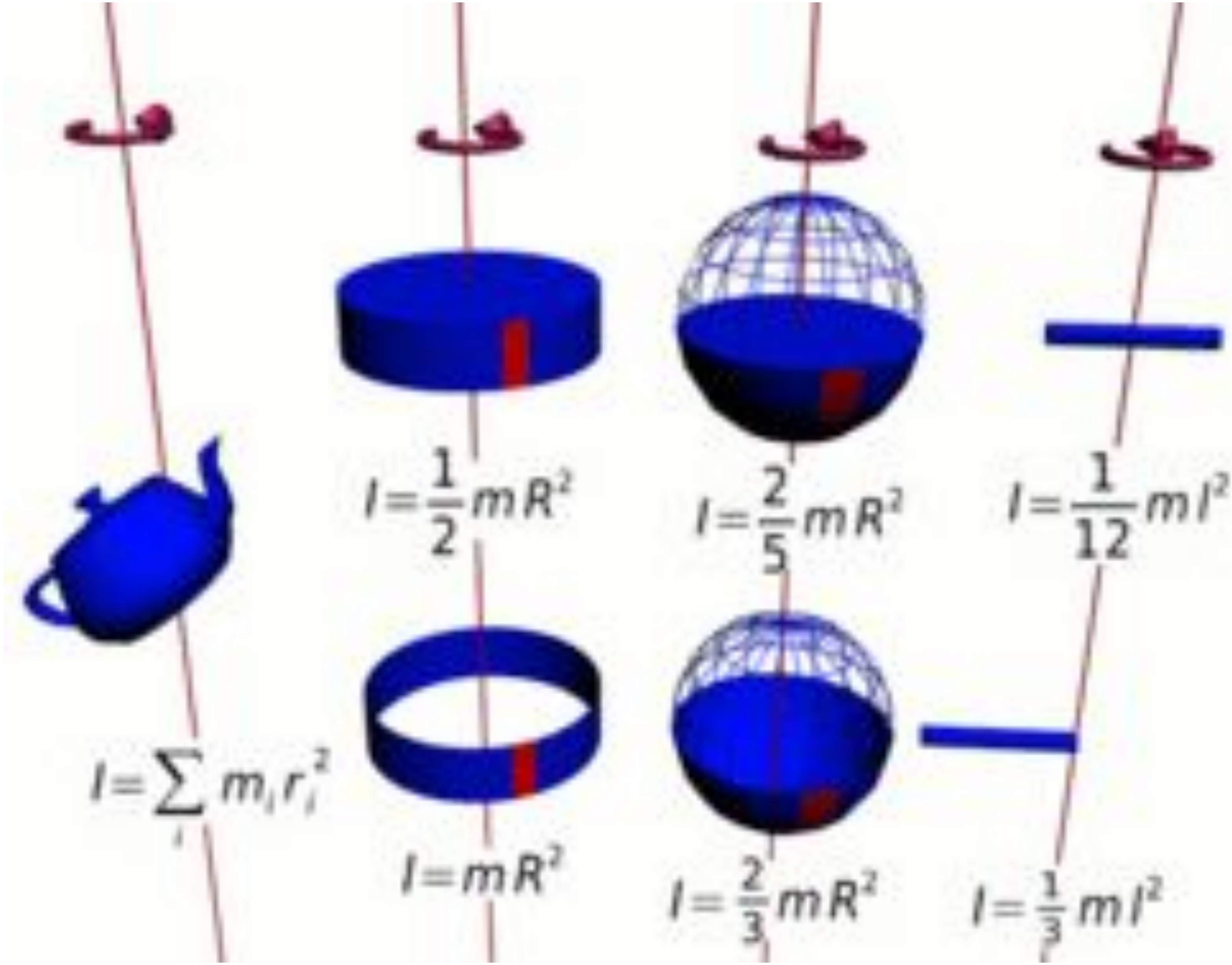
$$\boxed{I = I_c + m \cdot d^2}$$



Для стержня:

$$I = \frac{ml^2}{3} \qquad I_c = \frac{ml^2}{12} \qquad d = \frac{l}{2}$$

$$I = I_c + m \cdot d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{ml^2}{3} = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$



$I=\sum_i m_i r_i^2$
$I=\frac{1}{2}mR^2$
$I=mR^2$
$I=\frac{2}{5}mR^2$
$I=\frac{2}{3}mR^2$
$I=\frac{1}{12}ml^2$
$I=\frac{1}{3}ml^2$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{\vec{M}}{I} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} \cdot dt = I \cdot d\vec{\omega} = d\left(I \cdot \vec{\omega}\right) = d\vec{L}$$

<u>Момент импульса</u> **твёрдого тела $\vec{L}$ – это произведение момента инерции твёрдого тела на угловую скорость:**

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

$$[L] = \frac{кг \cdot м^2}{с}$$

Аналогичен импульсу: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{M} \cdot dt = d\vec{L}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Аналог

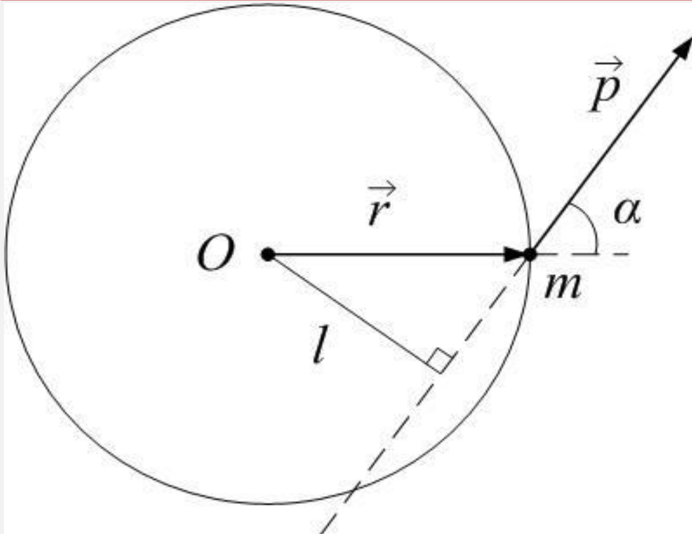
$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{M} \cdot \Delta t = \Delta \vec{L}}$$

Аналог

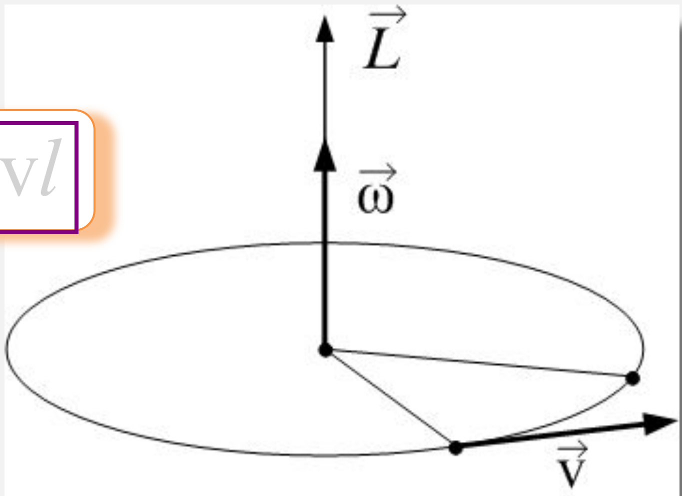
$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Момент импульса материальной точки:



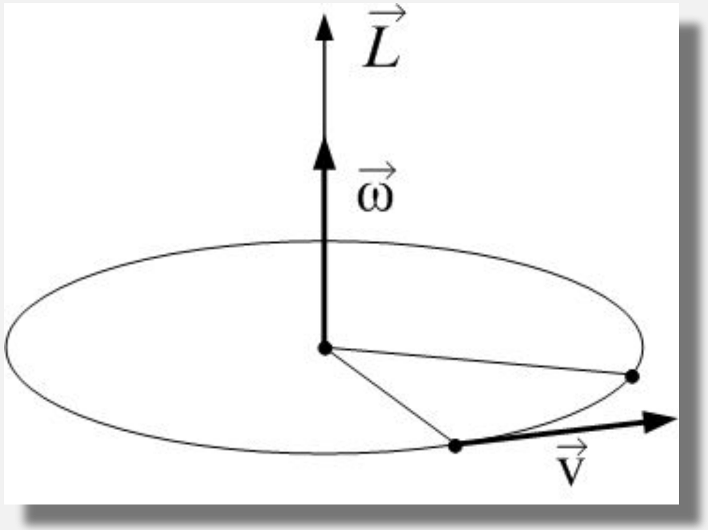
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = mvl$$



Момент импульса – вектор, направленный по оси вращения по правилу буравчика

Момент импульса **твёрдого тела**



Для расчёта момента импульса $\vec{L}$ вращающегося **твёрдого тела** найдём сумму $\vec{L}_i$ по всем материальным точкам:

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \cdot m_i \cdot v_i = \sum_i r_i \cdot m_i \cdot (\omega \cdot r_i) = \omega \cdot \sum_i \left(m_i \cdot r_i^2\right) = \omega \cdot I$$

$$\Downarrow$$

Определения эквивалентны:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

$$\vec{M} \cdot \Delta t = \Delta \vec{L}$$

***Изменение момента импульса тела равно импульсу суммарного момента внешних сил*.**

Это – **закон изменения момента импульса (для незамкнутых систем)**

$\vec{M}\Delta t$ Импульс момента силы – аналог импульса силы $\vec{F} \cdot \Delta t$

Закон сохранения момента импульса:

Если $\sum \vec{M}^{внешн.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$

Это возможно, если:

система замкнута (или $\sum \vec{F}^{внешн.} = 0$)

у внешних сил нет касательных составляющих (вектор силы проходит через ось или центр вращения)

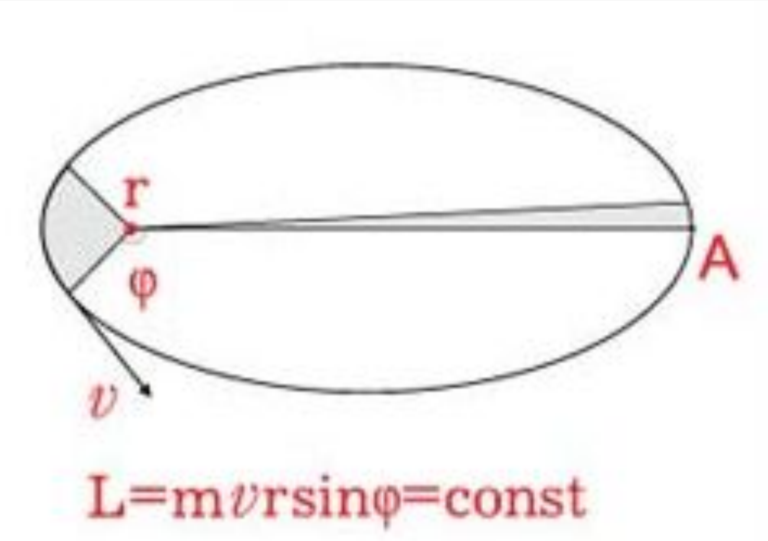
внешние силы параллельны закреплённой оси вращения

Закон сохранения момента импульса:

Если $\sum \vec{M}^{внешн.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$

У внешних сил нет касательных составляющих (вектор силы проходит через ось или центр вращения)
– **поле центральных сил** (гравитация)

Примеры
:



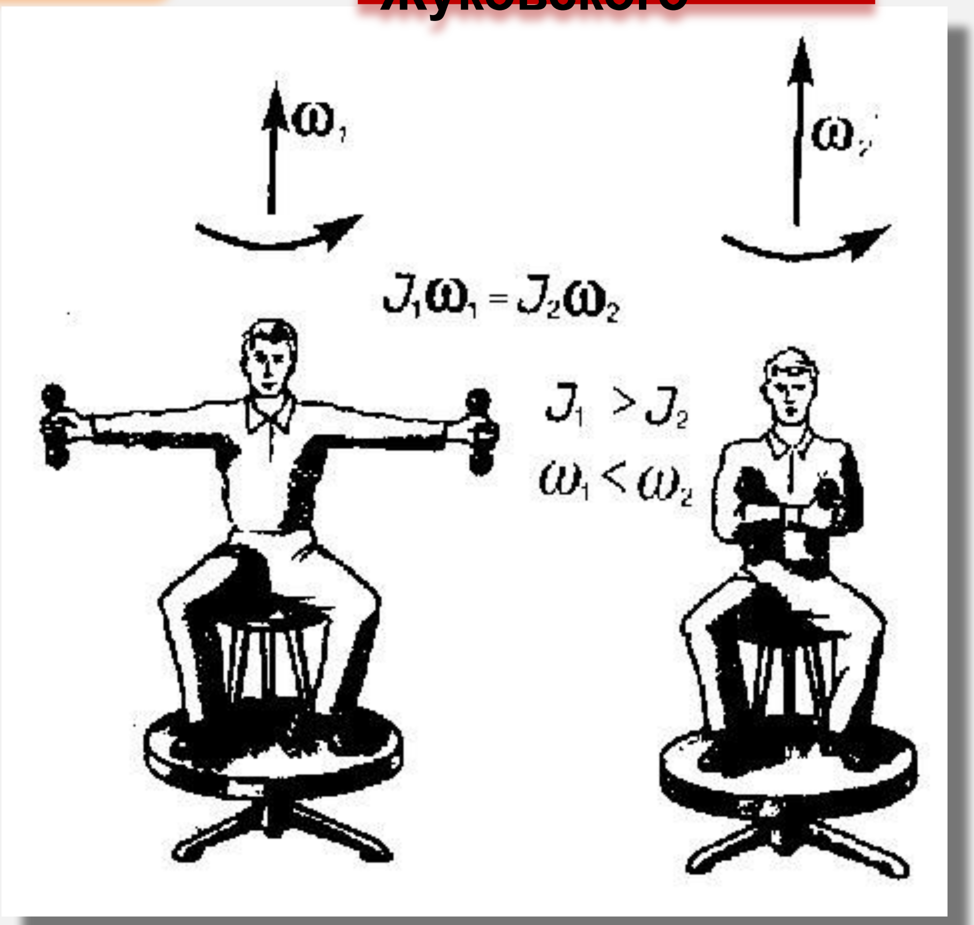
<u>Закон сохранения момента импульса:</u>

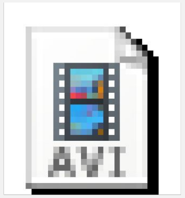
Если $\sum \vec{M}^{внешн.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$

[Примеры](#)

:

Скамья Жуковского



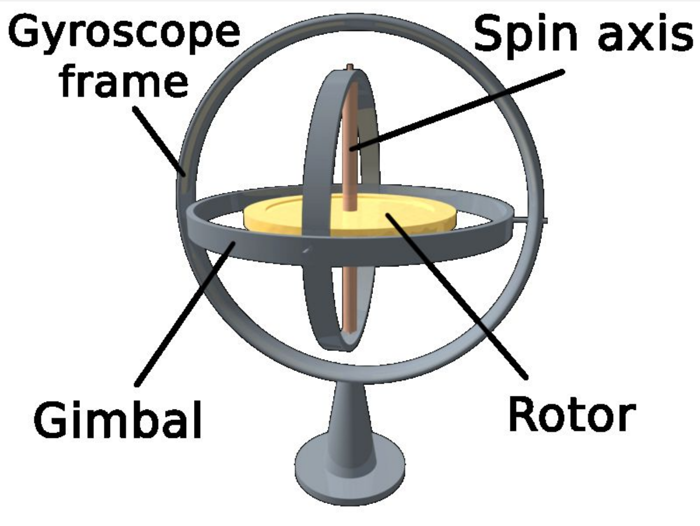


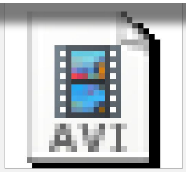
Ñêàìüÿ Æóêîâñêîãî.avi

Закон сохранения момента импульса:

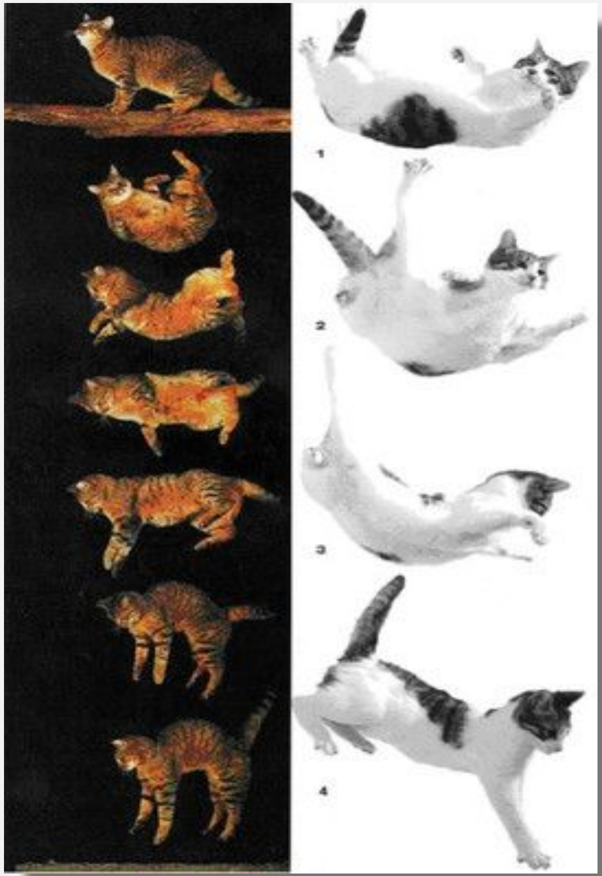
Если $\sum \vec{M}^{внешн.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$

Примеры:





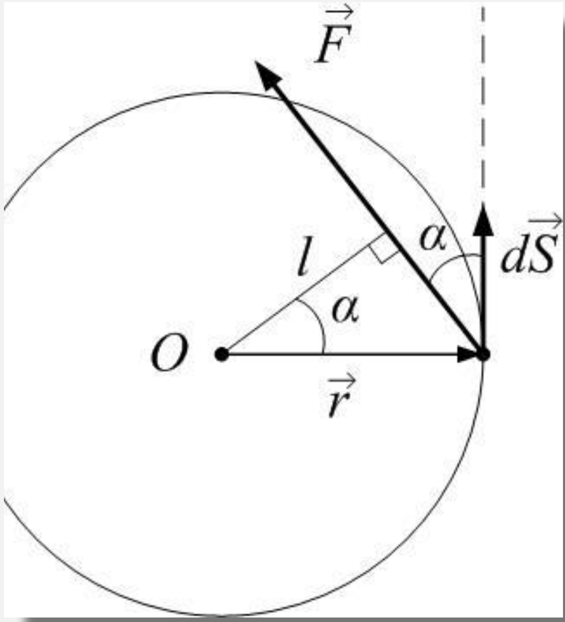
Ãèðîñêîï.avi



Кошки используют закон сохранения момента импульса: чтобы приземлиться на лапы, надо развернуть тело, а для этого кошка вращает хвостом в другую сторону

http://mephi.ru/students/vl/physics/mechanics/1_10_mechanics_of_solid_3.php

Работа при вращательном движении



Пусть тело повернулось на угол $d\varphi$ под действием силы $\vec{F}$

α – угол между силой и перемещением $d\vec{S}$

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы

$\Downarrow$

Работа силы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F\cos\alpha \cdot dS$$

$$dS = r \cdot d\varphi$$

$$dA = F\cos\alpha \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot l \cdot d\varphi$$

$$M = F \cdot l$$

$$dA = M \cdot d\varphi$$

$$\Delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi \Leftarrow$$

Кинетическая энергия вращения

Пусть тело вращается относительно закрепленной оси с угловой скоростью ω. Разобьём его мысленно на элементарные массы m_i и просуммируем кинетические энергии:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}$$

$$\mathrm{v} = r \cdot \omega$$

$$W = \sum_i \frac{m_i \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \left(m_i \cdot r_i^2 \right)$$

$$I = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2 \right)$$

$$W = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Для катящегося тела:

$$W_{кин.} = W_{пост.} + W_{вращ} = \frac{m \cdot \mathrm{v}_c^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Скорость центра масс

Аналогия между поступательным и вращательным движениями

Величина/закон	Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение	$\vec{S}$	$\vec{\varphi}$
Скорость	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{S}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{S}}{dt^2}$	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Сила; момент силы	$\vec{F}$	$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$ $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l$
Масса; момент инерции	m	$I = \int\limits_m r^2 dm;\ I = \sum\limits_i \left(\Delta m_i r_i^2\right)$ $I = mr^2$ (для материальной точки) $I = I_c + m \cdot d^2$ – теорема Штейнера

Аналогия между поступательным и вращательным движениями

Величина/закон	Поступательное движение	Вращательное движение
Второй закон Ньютона	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$
Импульс; момент импульса	$\vec{p} = m \cdot \vec{\mathrm{v}}$	$\vec{L} = I\vec{\omega};\ \vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$
Второй закон Ньютона в импульсной форме	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Закон сохранения импульса; момента импульса	$\sum\limits_k \vec{F}_k^{\,внеш.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_i \vec{p}_i = const$	$\sum \vec{M}^{внеш.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{L} = const$
Работа	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$	$dA = M \cdot d\varphi$
Кинетическая энергия	$W_{кин.} = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$	$W_{вращ} = \dfrac{I \cdot \omega^2}{2}$

Закон сохранения момента импульса (старый советский фильм) http://www.youtube.com/watch?v=reVVfgexHvw

Закон сохранения момента импульса (скамья Жуковского) http://www.youtube.com/watch?v=hwlwfJMAvYw
http://www.youtube.com/watch?v=8BB5sWXBKos

Гирокомпас в карданном подвесе http://www.youtube.com/watch?v=W6ii5GILINA

Гироскоп
http://www.youtube.com/watch?v=UpTGaalydXo

Второй закон Кеплера