Лекция № 5-6

МАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Лекция № 5

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Литература: *Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М. — С.-П.: Физматлит, 2000.*

Магнитное поле

- порождается движущимися зарядами (токами).
- действует на движущийся электрический заряд и не действует на покоящийся заряд.

Вектор индукции магнитного поля

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

– *вектор магнитной индукции,* в СИ B = [Тл] *(тесла), характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд.*

Экспериментальный закон, определяющий поле точечного заряда, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью $\vec{v}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \qquad (5.1)$$

где $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная постоянная

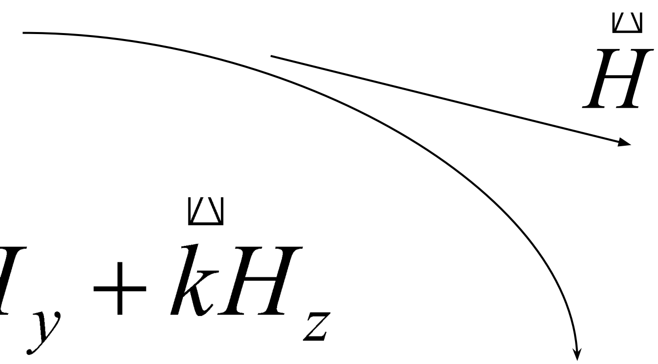
$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

В вакууме

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (5.2)$$

$\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля в вакууме, в СИ H = [А/м].

Силовая линия – линия, в каждой точке которой $\vec{H}$ $\left(\vec{B}\right)$ касателен к этой линии.



Уравнение силовой линии

$$\vec{H} = \vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{H_x} = \frac{\mathrm{d}y}{H_y} = \frac{\mathrm{d}z}{H_z}$$

Магнитное поле

- *однородное* $\vec{H} = \text{const}$
- *неоднородное* $\vec{H} \neq \text{const}$
- *статическое* (постоянное во времени)

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}) \neq \vec{H}(\vec{r}, t)$$

- *переменное* во времени

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$$

Магнитное поле – **вихревое** (его силовые линии замкнуты).

Закон Био-Савара

Найдем магнитное поле, создаваемое *постоянными* электрическими токами

Подставим в (5.1) (5.2) и

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V$ – элементарный объем, ρ – объемная плотность заряда.

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\rho\,\mathrm{d}V\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{r}\right]}{r^3},$$

$$\rho\vec{\mathrm{v}} = \vec{j},$$

$\vec{j}$ плотность тока. Тогда

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]\mathrm{d}V}{r^3}. \qquad (5.3)$$

Если ток течет по *тонкому* проводу с площадью поперечного сечения ΔS, то

$$j\,\mathrm{d}V = j\Delta S\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}l,$$

где dl – элемент длины провода.

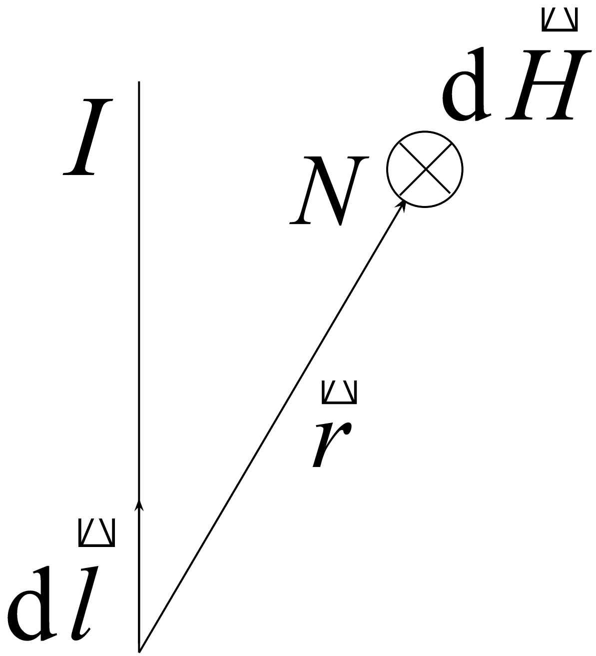
Введем $\mathrm{d}\vec{l}$ в направлении тока I.

Тогда

$$\vec{j}\,\mathrm{d}V = I\,\mathrm{d}\vec{l} \qquad (5.4)$$

$\vec{j}\,\mathrm{d}V$ и $I\,\mathrm{d}\vec{l}$ – **объемный** и **линейный элементы тока** соответственно.

(5.4) → (5.3):



$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\left[\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3} \qquad (5.5)$$

(5.3) и (5.5) – **закон Био-Савара** (Био-Савара-Лапласа).

Принцип суперпозиции магнитных полей

(из опыта): магнитное поле, создаваемое несколькими токами равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым током в отдельности.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i; \qquad \vec{H} = \sum_{i=1}^{N} \vec{H}_i \qquad (5.6)$$

Из (5.3) и (5.5) с учетом (5.6)

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{I\left[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3} \qquad (5.7)$$

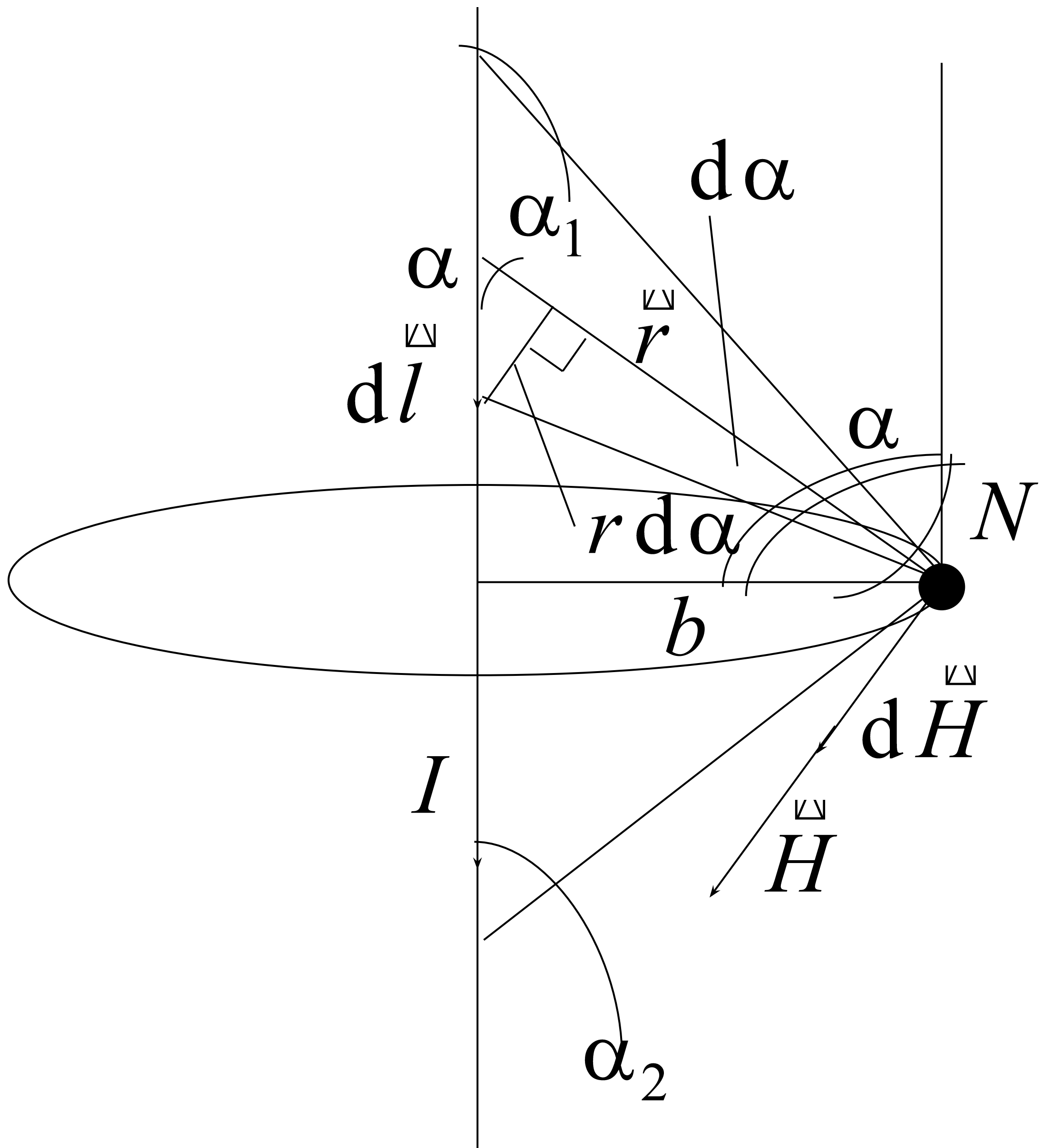
где l – контур, по элементам которого течет ток I (по направлению вектора $\mathrm{d}\vec{l}$ ток I считается положительным).

Если проводящее тело нельзя считать тонким проводником, то, используя (5.4), получим

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} \mathrm{d}V \qquad (5.8)$$

где V – объем тела, в котором текут токи.

Магнитное поле прямого тока



Из закона Био-Савара $$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\left[\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3},$$

$$\mathrm{d}H = \frac{1}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\cdot\sin\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{Ir\,\mathrm{d}\alpha}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\alpha}{r} =$$

$$= \frac{I}{4\pi}\frac{\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{r\sin\alpha},$$

где $\mathrm{d}l\cdot\sin\alpha = r\,\mathrm{d}\alpha$

Тогда $\mathrm{d}H = \dfrac{I}{4\pi}\dfrac{\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{b}$, где $b = r\sin\alpha$

Напряженность магнитного поля прямого тока

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I}{4\pi} \frac{\sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha}{b} = \frac{I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha$$

$$H = \frac{I}{4\pi b}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

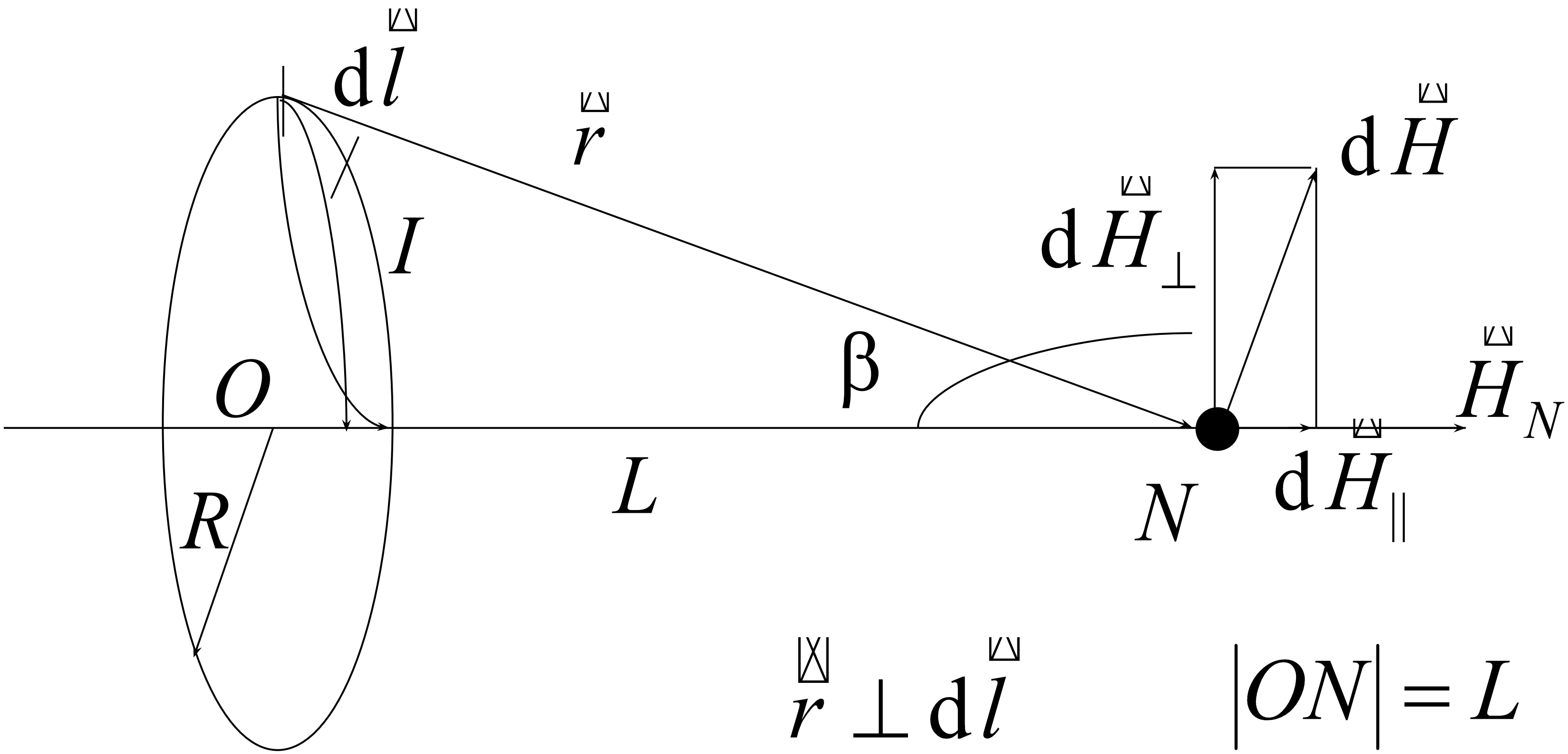
Для бесконечно длинного проводника

$$\alpha_1 = 0 \quad \left(\cos\alpha_1 = 1\right); \qquad \alpha_2 = \pi \quad \left(\cos\alpha_2 = -1\right)$$

Тогда **магнитное поле прямого тока**

$$H = \frac{I}{2\pi b}$$

Магнитное поле кругового тока



$$\vec{r} \perp \mathrm{d}\vec{l} \qquad \left|ON\right| = L$$

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\left[\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3},$$

$$\mathrm{d}H_{\parallel} = \mathrm{d}H \sin\beta = \frac{I\,\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\frac{R}{r}$$

Здесь $\sin\beta = R/r$

$$H = \frac{IR}{4\pi\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}} \int\limits_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$$

При $L = 0$ $$H_O = \frac{I}{2R}$$

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля

в интегральной форме: *циркуляция вектора индукции магнитного поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную*

$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i \qquad (5.9)$$

При непрерывном распределении токов в пространстве, охватываемом контуром, *циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру L пропорциональна потоку вектора плотности тока $\vec{j}$ через произвольную поверхность S, натянутую на этот контур*

$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} \qquad (5.10)$$

Здесь направления обхода контура и нормали $\vec{n}$ к поверхности S связаны между собой правилом правого винта.

$$\int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Применим теорему Стокса:

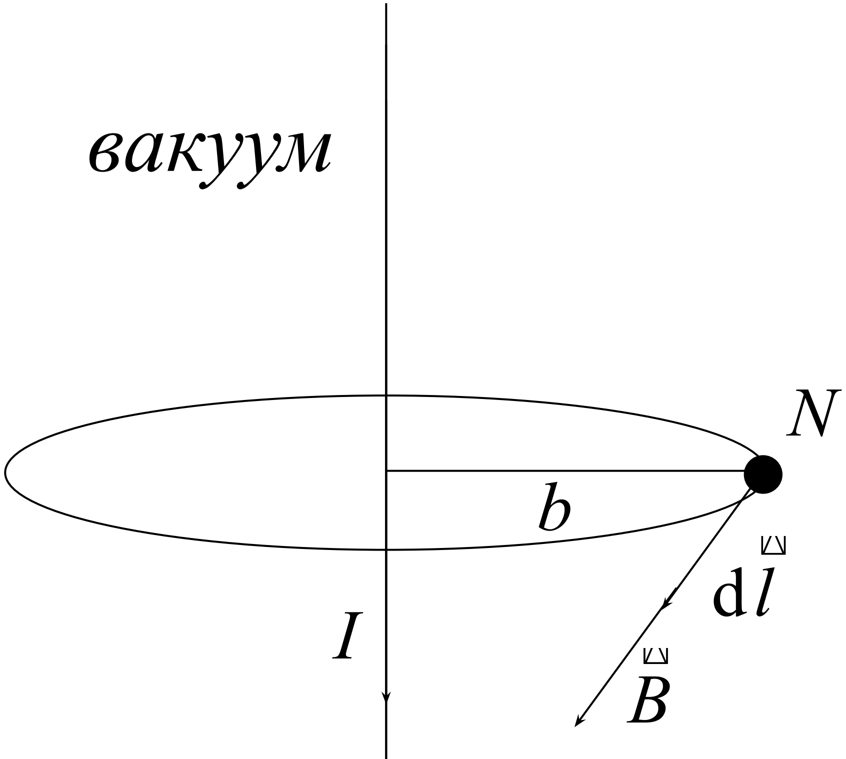
$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Стягивая контур к точке, получим **теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной форме:**

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad (5.11)$$

Физический смысл теоремы о циркуляции: магнитное поле неконсервативное (5.9), (5.10) и вихревое (5.11).

Если можно подобрать такой произвольный замкнутый контур, что интеграл в левой части (5.9) и (5.10) сводится к умножению $|\vec{B}|$ на длину контура или участка контура, теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитных полей.



Дано: I , b

$$\oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Вспомогательный контур совпадает с силовой линией магнитного поля прямого тока – это окружность, проходящая через точку наблюдения, с центром на прямой, по которой течет ток.

Зададим направление обхода по контуру, совпадающее с направлением $\vec{B}$ $\left(\vec{B}\uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{l}\right)$

Тогда $\oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_L B\cos\alpha\,\mathrm{d}l = \oint\limits_L B\,\mathrm{d}l$

На всем вспомогательном контуре

$$\left|\vec{B}\right| = B = \mathrm{const},$$

Тогда $\oint\limits_L B\,\mathrm{d}l = B\oint\limits_L \mathrm{d}l = B\cdot 2\pi b = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

(Расчет магнитного поля тороида и соленоида)