МДК.01.02 Математический аппарат для построения компьютерных сетей, занятие 8

Плоские и планарные графы

1. Основные определения
2. Свойства планарных графов
3. Теорема Понтрягина-Куратовского

ПОВТОРЕНИЕ И ПРЕДЫДУЩИХ ЗАНЯТИЙ

1. Эйлеровым путем (циклом) называется . . .

2. Связный граф эйлеров тогда и только тогда . . .

3. Если граф G(V,E) обладает эйлеровым циклом, то он . . .

4. Эйлеров путь в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем имеется не более . . .

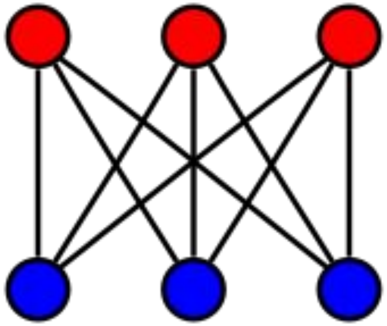
- двух ребер, связанных с одной вершиной
- двух вершин четной степени
- двух вершин нечетной степени
- трех ребер, сходящихся к одной вершине

5. Алгоритм поиска эйлерова цикла . . .

Рассмотренные ранее задачи – это задачи на алгебраическое понятие графа.

Однако в теории графов встречаются и задачи, в которых граф рассматривается как геометрическая фигура (или геометрическое «изображение» графа, заданного алгебраически)

При прокладке различных коммуникаций может требоваться, чтобы их линии не пересекались (пример – головоломка о домах и колодцах). Аналогичная проблема существует в электротехнике при проектировании и изготовлении печатных плат.



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Каждый граф укладывается в трехмерное пространство

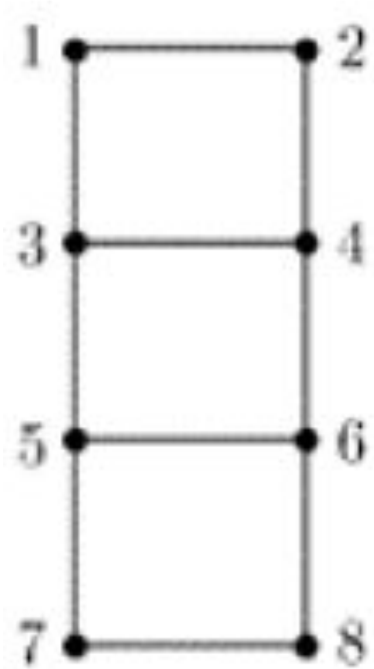
Граф, изображенный на плоскости, называется ***плоским***, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин графа.

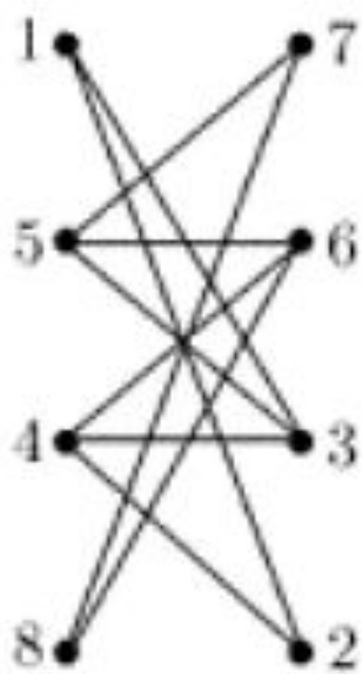
Один и тот же граф (как множество вершин + множество ребер) может иметь **как плоские, так и не плоские** изображения

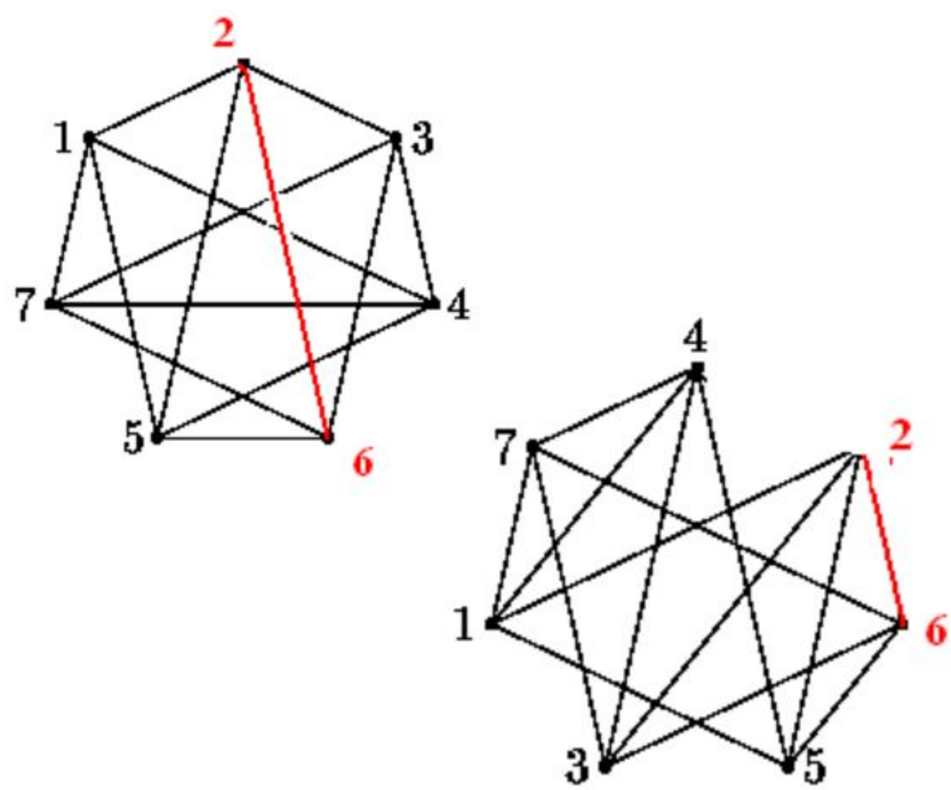
Принципиальный вопрос, на который нужно отвечать при решении задач типа прокладки коммуникаций, это:
имеет ли данный граф хотя бы одно плоское изображение?

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Два графа G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если между их вершинами установлено взаимнооднозначное соответствие: что любые две вершины графа G_1 соединены так же, как и соответствующие вершины графа G_2

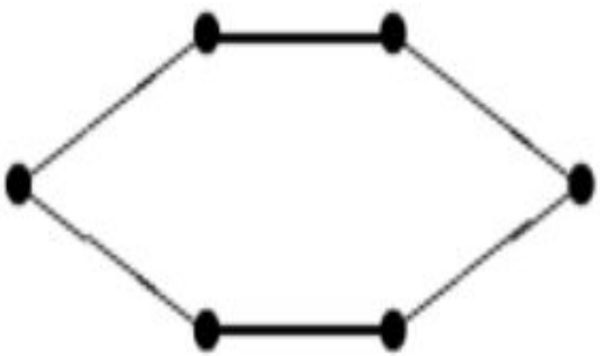




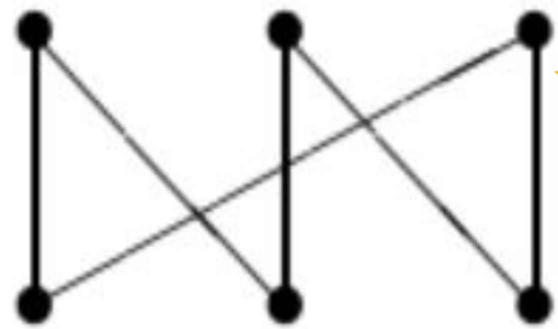


ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф называется ***планарным***, если он изоморфен плоскому графу.



G_1



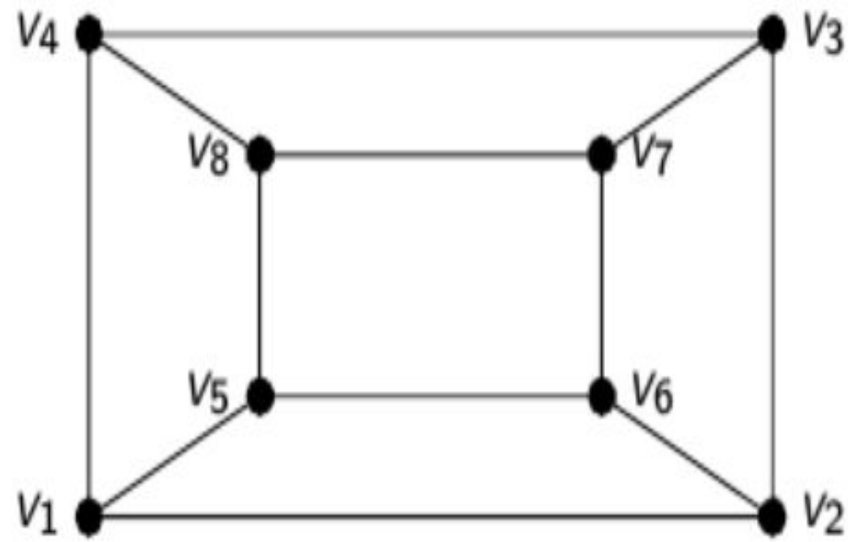
G_2

граф G2 – планарный, но не плоский

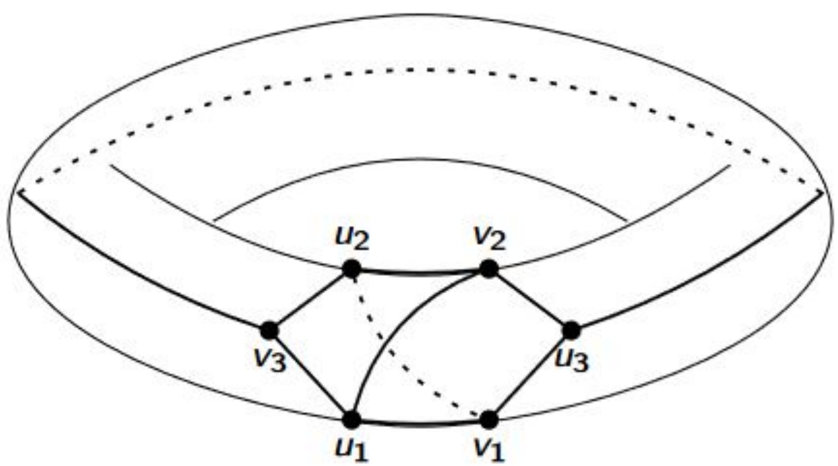
Свойство графа быть или не быть плоским это свойство ***геометрического изображения***, а не алгебраического объекта. Знания матрицы смежности графа может не хватить для проверки этого свойства.

Этот граф является планарным

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



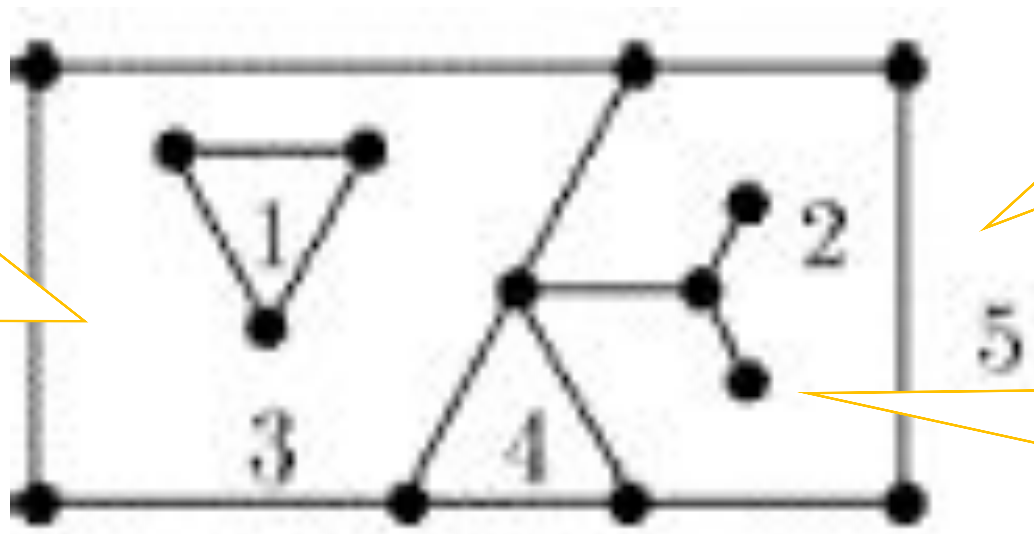
Этот граф НЕ является планарным



ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКИХ

Если плоскость разрезать по ребрам плоского графа, она распадется на связные части, которые называют ***гранями***. Всегда имеется одна неограниченная внешняя грань, все остальные грани называются внутренними.

это тоже внутрен-няя область



это внешняя область

это внутренняя область

Плоский граф с пятью гранями. Граница грани с номером 3 состоит из двух циклов, а граница грани с номером 2 кроме цикла длины 5 включает еще дерево из трех ребер.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКИХ

Количество граней в любой плоской укладке планарного графа, имеющего **n** вершин, **m** ребер и **k** компонент связности, равно

$$m - n + k + 1$$

Если обыкновенный связный плоский граф имеет n вершин, m ребер и r граней, то

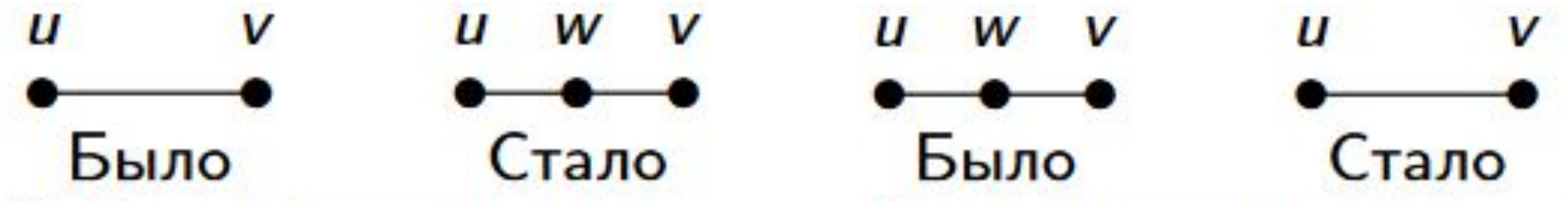
$$n - m + r = 2$$

Два изоморфных плоских графа имеют одинаковое число граней

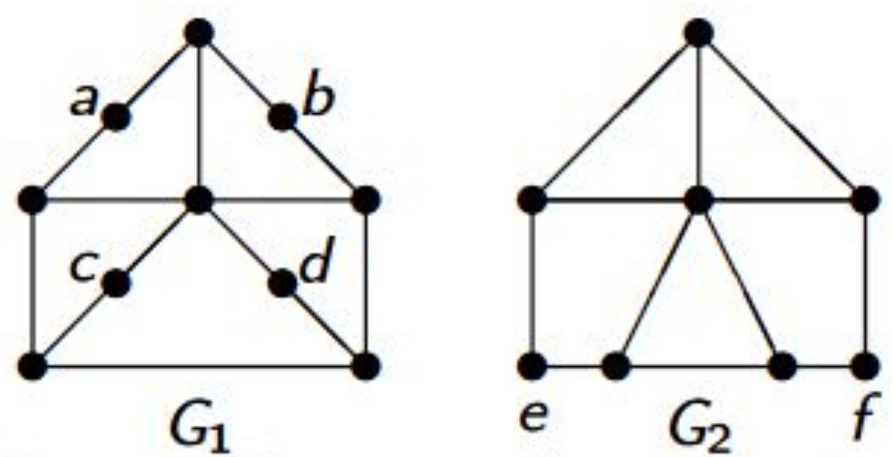
У связного плоского графа с числом вершин n>3 число ребер m удовлетворяет условию:

$$m \leq 3n - 6$$

УСЛОВИЯ ПЛАНАРНОСТИ



Графы G1 и G2 называются ***гомеоморфными***, если один из них может быть получен из другого применением конечного числа операций добавления и/или стирания вершин степени 2

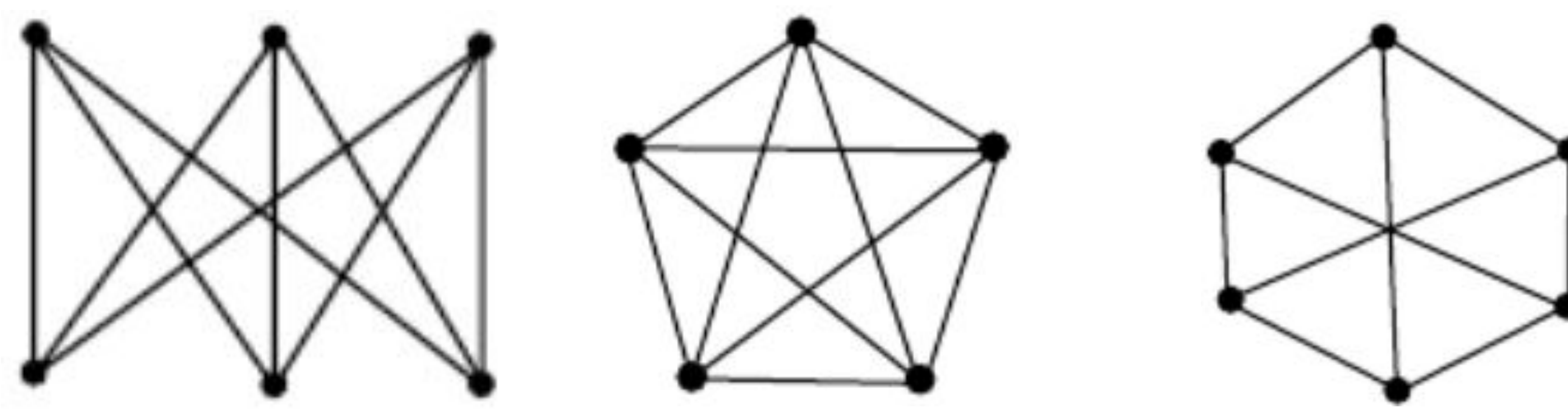


граф G2 может быть получен из G1 стиранием вершин a, b, c и d и добавлением вершин e и f .

ЗАДАЧА О ПОЛНОМ ГРАФЕ, ИМЕЮЩЕМ ПЯТЬ ВЕРШИН

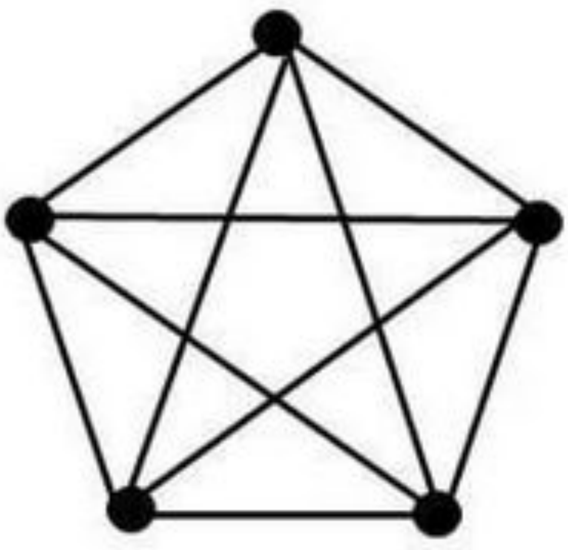
Любой ***полный*** граф, имеющий ***пять*** вершин, ***неплоский***

Графы Куратовского

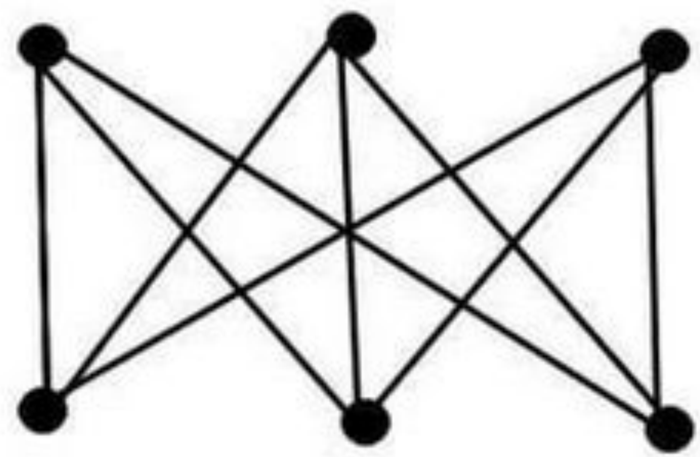


Теорема Понтрягина — Куратовского

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных приведенным ниже (K_5 и $K_{3,3}$)

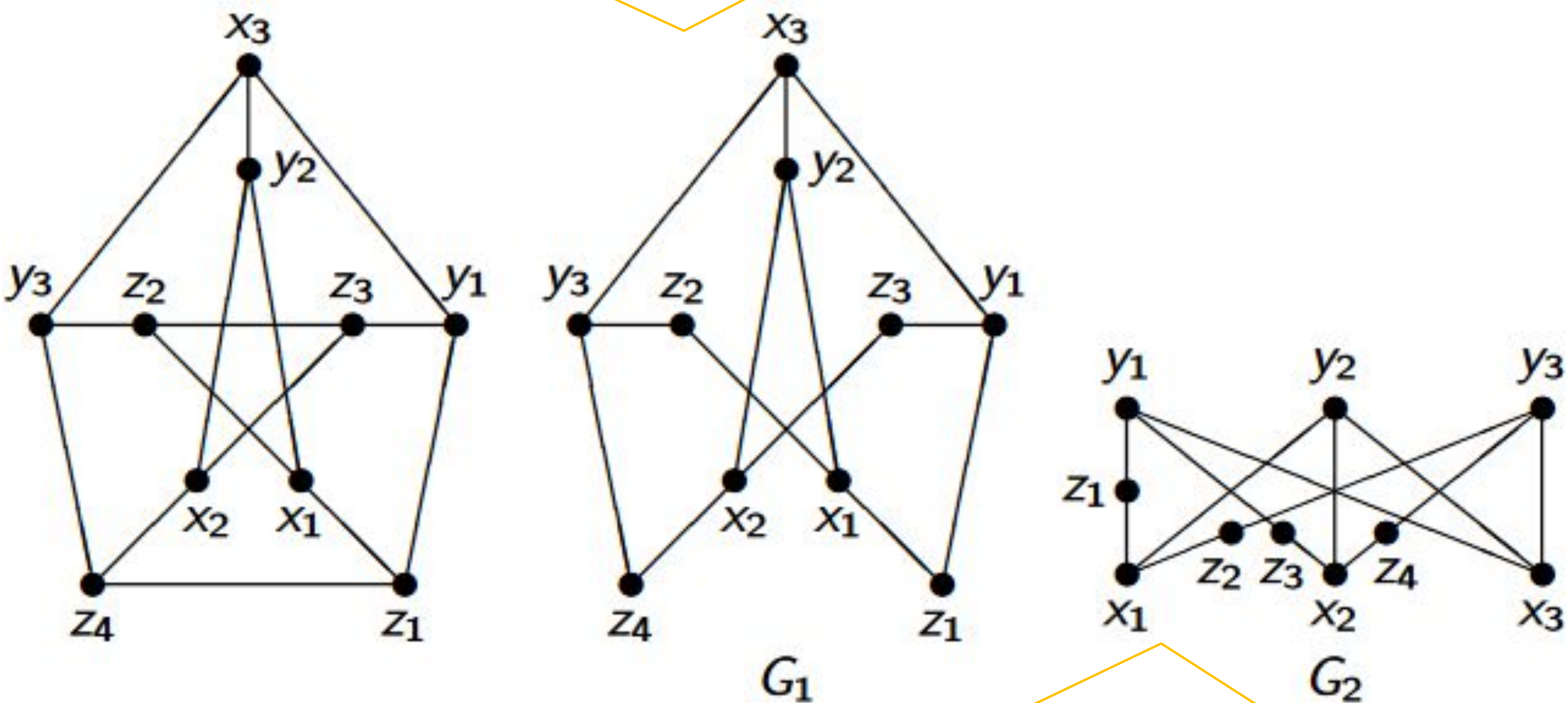


K_5



$K_{3,3}$

удалили ребра $(z_1;z_4)$ и $(z_2;z_3)$

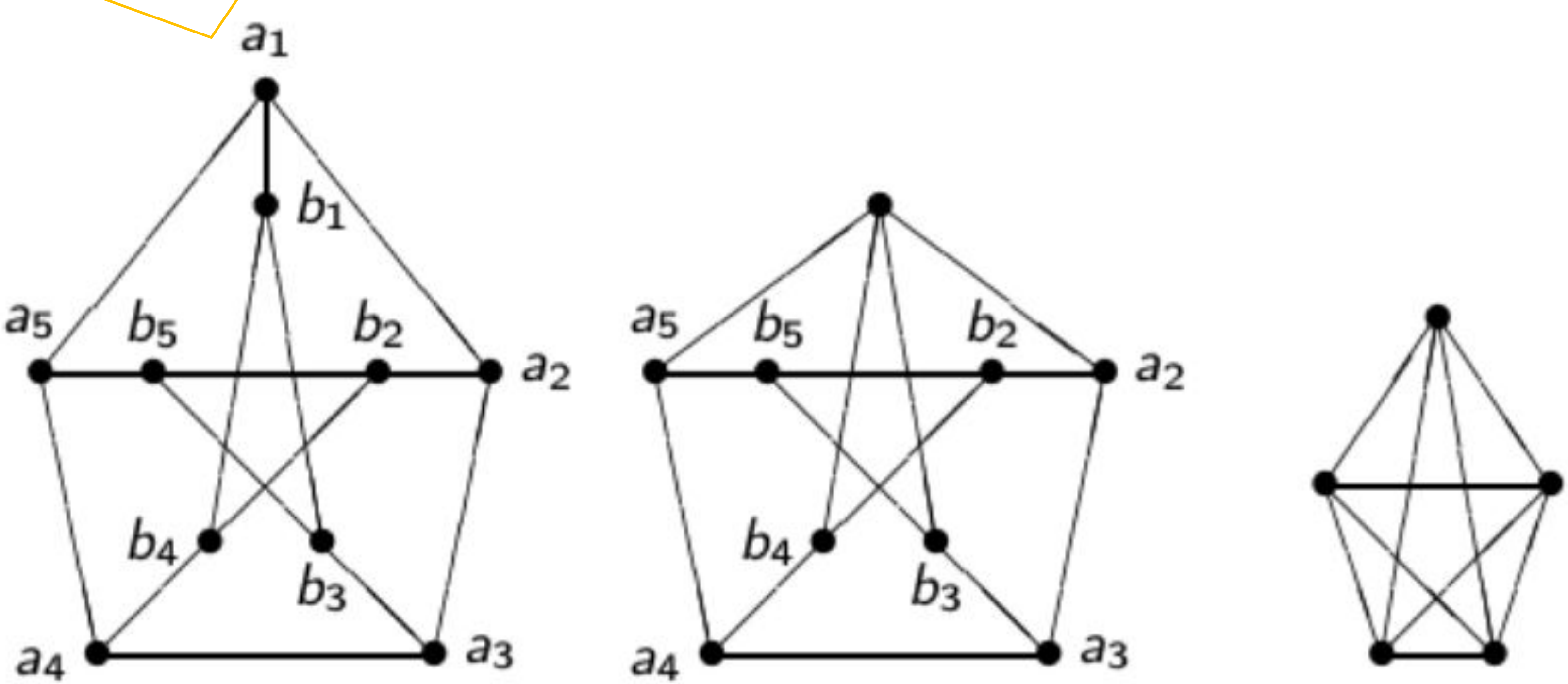


граф G_1 изоморфен графу G_2
G_2 получается из графа $K_{3,3}$ добавлением четырех вершин степени 2
(а именно, вершин z_1, z_2, z_3 и z_4)

Теорема Вагнера

Обыкновенный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, который стягивается к графу K_5 или графу $K_{3,3}$.

стягиваем ребро $(a_1;b_1)$



КОНЕЦ 1 СЕРИИ СЕЗОНА 8

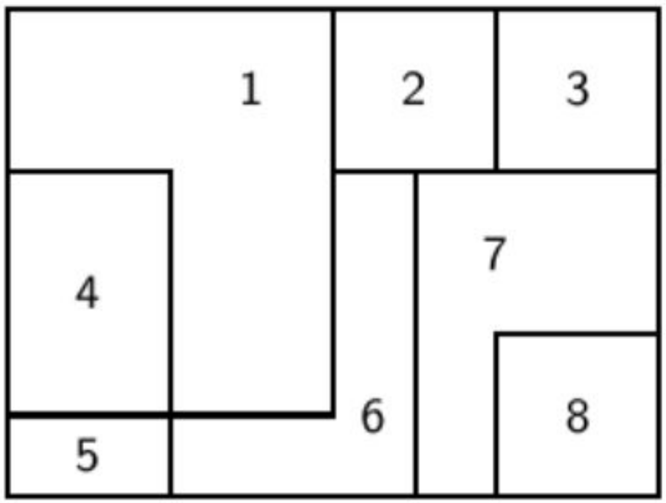
В следующей серии вы увидите:

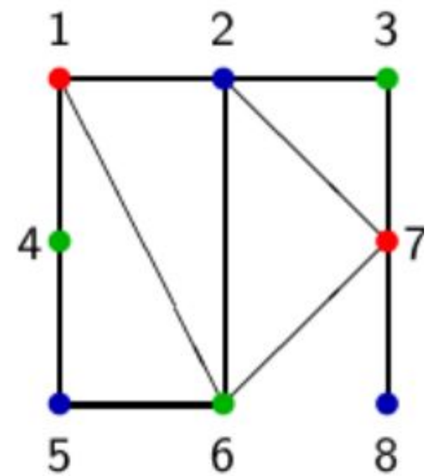
как красят политическую карту мира;
тайна создания расписаний занятий в группах 26, 28, 18к11;
к чему приводит жадность при раскраске графов

РАСКРАСКА ГРАФОВ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСКРАСКИ

Дана политическая карта мира. Требуется раскрасить каждую страну в какой-либо цвет так, чтобы любые две граничащие между собой страны были раскрашены в разные цвета, использовав при этом минимально возможное число красок.





Дан обыкновенный граф. Требуется раскрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы любые две смежные вершины имели различный цвет.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При раскраске элементам графа ставятся в соответствие метки (**числа**) из множества k (k = 1, 2, 3, ...); эти метки традиционно называются «цветами».

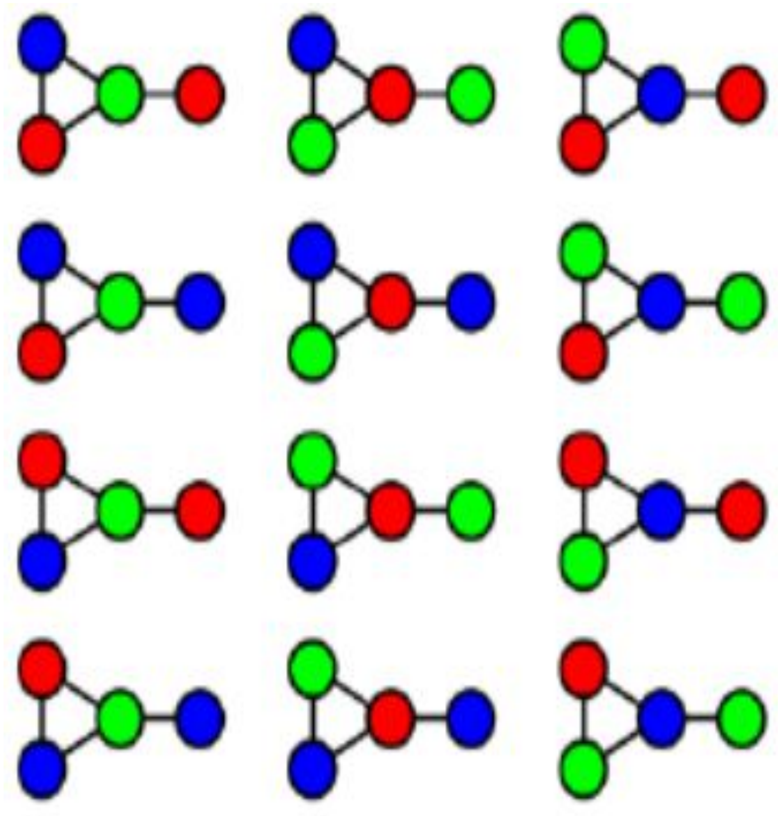
способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным **вершинам** соответствуют разные цвета, называется **раскраской вершин**.

Раскраска графа называется ***правильной***, если любые две смежные вершины графа имеют разные цвета из множества цветов k (k = 1, 2, 3, ...)

Раскраска с использованием k цветов называется k-раскраской. ***Наименьшее число цветов, необходимое для раскраски графа G, называется его хроматическим числом***.

Задача раскраски карты может быть переформулирована следующим образом: ***Найти хроматическое число данного планарного графа***.

Когда говорят о раскраске графов, почти всегда подразумевают под этим раскраску их вершин



Этот граф может быть раскрашен 3 цветами 12 способами

ВИДЫ РАСКРАСКИ

Раскраска вершин

Раскраска вершин — главная задача раскраски графов, все остальные задачи в этой области могут быть сведены к ней.

Рёберная раскраска

графа подразумевает назначение цветов ребрам так, что никакие два ребра одного цвета не принадлежат одной вершине. Наименьшее число цветов, необходимое для рѐберной раскраски графа G — это его ***хроматический индекс***, или ***рёберное хроматическое число***

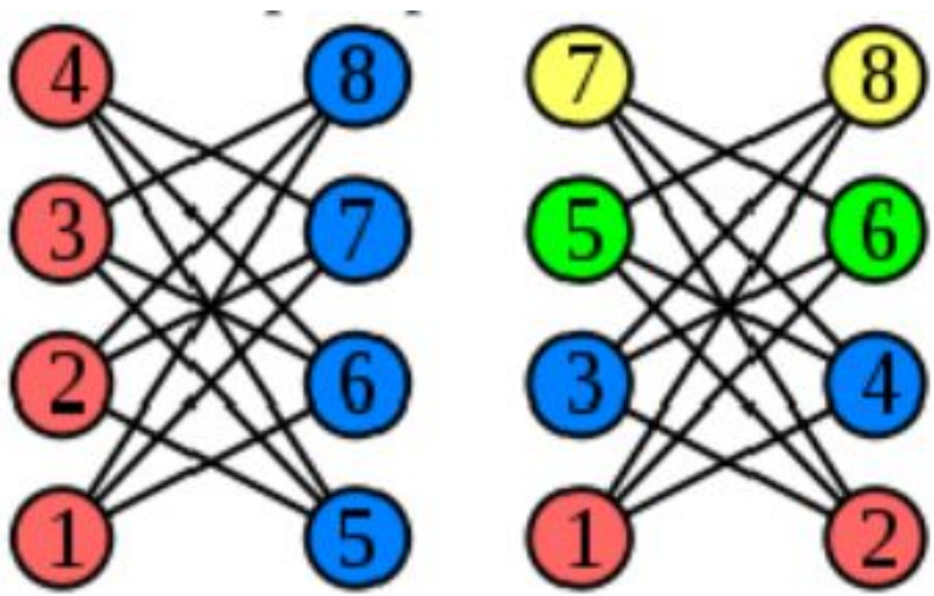
Тотальная раскраска

—такое присвоение цветов, что ни соседние вершины, ни смежные ребра, ни вершины и ребра, которые их соединяют, не имеют одинакового цвета

АЛГОРИТМЫ РАСКРАСКИ

Жадная раскраска

Жадный алгоритм упорядочивает вершины $v_{1},\ldots,v_{n}$ и последовательно присваивает вершине v_{i} наименьший доступный цвет, не использовавшийся для окраски соседей v_{i} среди $v_{1},\ldots, v_{i-1}$, либо добавляет новый



ПРИМЕНЕНИЕ

Распределение регистров

Компилятор — это компьютерная программа, которая переводит один компьютерный язык в другой. Для улучшения времени выполнения результирующего кода одной из техник компиляторной оптимизации является распределение регистров, в которой наиболее часто используемые переменные компилируемой программы хранятся в быстродействующих регистрах процессора. В идеальном случае переменные хранятся в регистрах так, что они все находятся в регистрах во время их использования.

Компилятор строит **интерференционный** граф, где вершины соответствуют регистрам, а ребра соединяют две из них, если они нужны в один и тот же момент времени

Цифровые водяные знаки

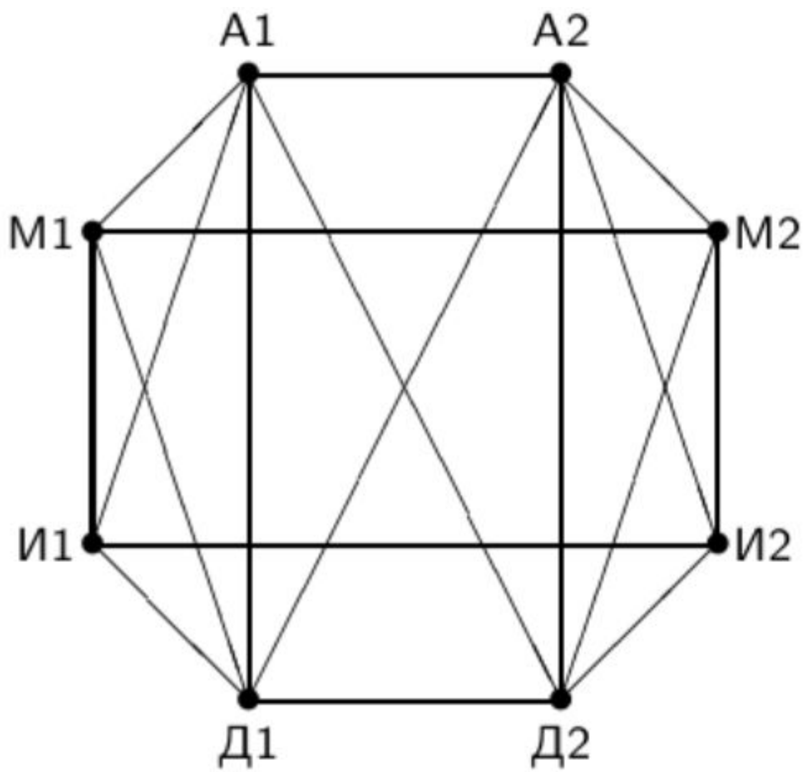
Технология цифровых водяных знаков (англ. digital watermarking) позволяет вместе с данными (будь то медиафайлы, исполняемые файлы и прочие) передать некое скрытое сообщение («водяной знак», Watermark). Такое скрытое сообщение может быть применено в защите авторских прав для идентификации владельца данных.

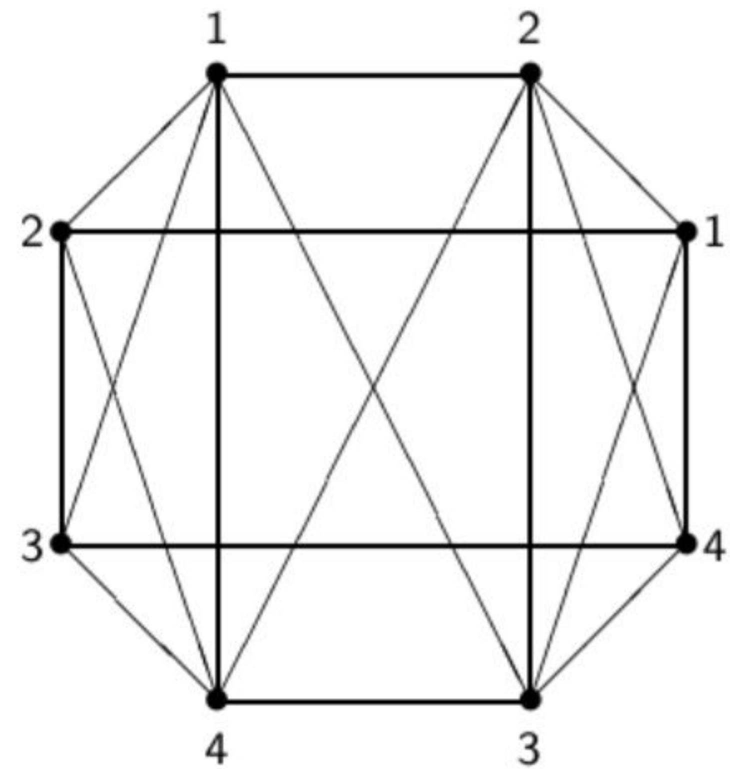
ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

В студенческих группах 26-К и 28-К надо провести занятия по
А) операционным системам;
Д) Дискретной математике и теории графов,
М) Математической логике и
И) Истории
(по одному занятию по каждому предмету).
Занятия по каждому предмету проводятся с каждой группой отдельно.
Занятия по операционным системам и по теории графов ведет преподаватель X, по математической логике – преподаватель Y , по истории – преподаватель Z.
Найти минимальное число пар, в которые можно «уложить» все занятия, и составить соответствующее расписание.

РЕШЕНИЕ

Построим граф с вершинами А1, А2, Д1, Д2, М1, М2, И1 и И2 (буква соответствует предмету, а цифра – номеру группы). Соединим ребрами вершины, соответствующие парам, которые нельзя проводить одновременно. Получим граф, изображенный на рисунке



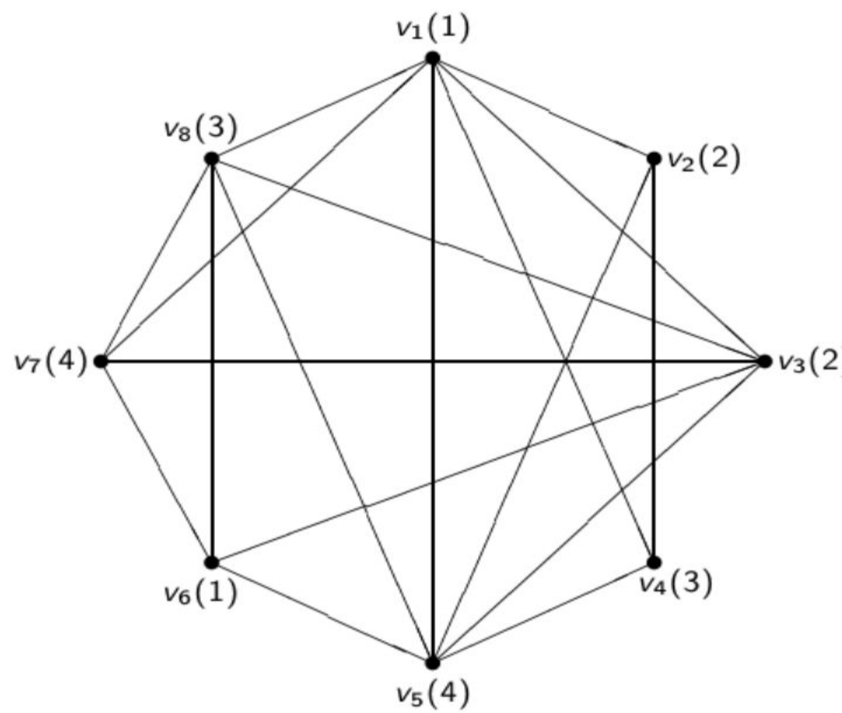


ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ

Имеется некоторое количество работ и механизмов для их осуществления. Для выполнения каждой работы требуется одно и то же время. При этом никакой из механизмов не может быть занят одновременно более чем в одной работе. ***Нужно распределить механизмы так, чтобы общее время выполнения работ было минимально возможным***

Для перевода этой задачи на язык теории графов рассмотрим граф G, вершинами которого являются работы, причем две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда для выполнения соответствующих работ требуется хотя бы один общий механизм

Механизм	Работа							
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
a_1	+		+				+	+
a_2		+		+				
a_3			+			+	+	
a_4	+	+		+	+			
a_5			+		+			+
a_6					+	+		+



АЛГОРИТМ РАСКРАСКИ

1. Упорядочить вершины по невозрастанию степени.
2. Окрасить первую вершину в цвет 1.
3. Выбрать цвет окраски 1.
4. Пока не окрашены все вершины, повторять п.4.1.-4.2.:
   4.1. Окрасить в выбранный цвет всякую вершину, которая не смежна с другой, уже окрашенной в этот цвет.
   4.2. Выбрать следующий цвет.