Введение в анализ размерностей

И.Н. Сибгатуллин

Литература

- Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика, Москва, 2014, глава 8.
- Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Москва, 1977
- Баренблатт Г. И., Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: теория и приложения к геофизической гидродинамике, 1982. Баренблатт Г.И. Анализ размерностей. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1987
- Barenblatt G. I. , Scaling phenomena in fluid mechanics. Cambridge University Press, 1994.
- Barenblatt G. I., Scaling. Cambridge University Press, Cambridge, 2003
- Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: РХД, 2001
- Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970

Первичные и вторичные единицы измерений

- Метр м, секунда с – *первичные*
- Скорость м/с, ньютон кг м/с^2 – *вторичные*

Система первичных (эталонных, базисных) единиц измерения – совокупность эталонных единиц измерения, достаточная для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений.

«Обладают несводимой более степенью простоты»   Перси Бриджмен

Вторичные величины измеряются посредством измерения первичных

Класс систем единиц измерения совокупность первичных систем единиц измерения, которые отличаются только величиной, но не физической природой

Класс, состоящий из единиц измерения ***длины, массы и времени***, обозначим *{Lmt}*.
В этот класс, в частности, входят системы единиц
МКС (метр, килограмм, секунда),
СГС (сантиметр, грам, секунда).

Значение физической величины, например высоту дерева, будем записывать в виде

$$\mathrm{a} = (\mathrm{a})[a], \text{ где}$$

(a) $-$ численное значение,

$[a]$ - единица измерения ("размерность")

Например, высоту дерева можно записать в виде

$$a = 10 \text{ м} = 1000 \text{ см} = 10000 \text{ мм}$$

- Понятие физической величины *инвариантно* относительно системы измерения. Например палка определенной длины будет всегда больше или меньше другой палки независимо чем мы ее измеряем.
- ***Инвариантно*** относительно определенных преобразованиях значит *не меняется* при этих преобразованиях.

Примеры обозначения размерностей

- МКС:

[L]=м, [m]=кг, [t]=с

[ρ]=кг/м3, [v]=м/с

СГС:

[L]=см, [m]=г, [t]=с

[ρ]=г/см3, [v]=см/с

Вообще, для *вторичных* единиц измерений можем записать ***формулу размерности***

$$[b] = [L]^p [m]^q [t]^r$$

$$\mathrm{p, q, r} \ - \text{показатели размерности}$$

- Почему в формулах размерностей основные единицы всегда входят как произведения в степенях?????

Основное требование к измеряемым величинам, первичным и вторичным:

Отношение двух одноименных физических величин не должно зависеть от выбора системы единиц измерений

Из этого требования следует, ***что каждая вторичная величина выражается как некоторая постоянная, умноженная на первичные величины в некоторых степенях***

$$[b] = [a_1]^{\varphi_1}[a_2]^{\varphi_2} \ldots [a_n]^{\varphi_n}$$

Независимые размерности

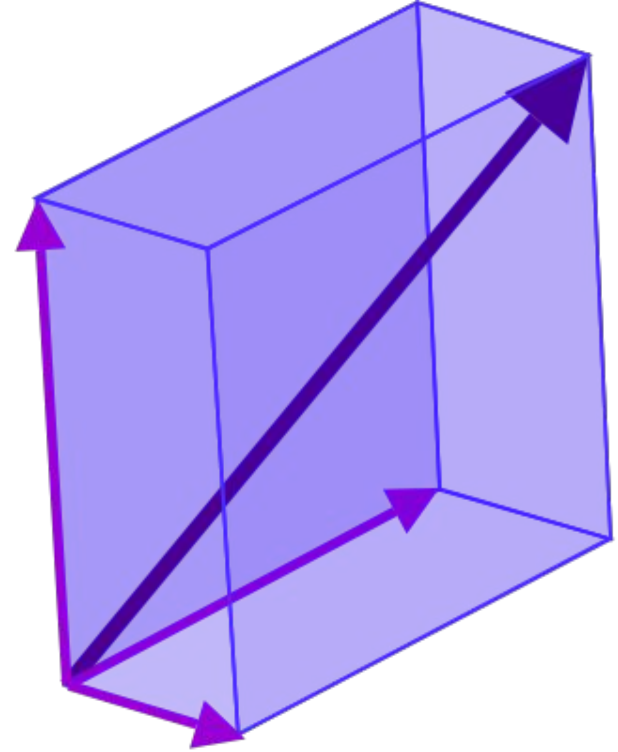
Безразмерные величины:

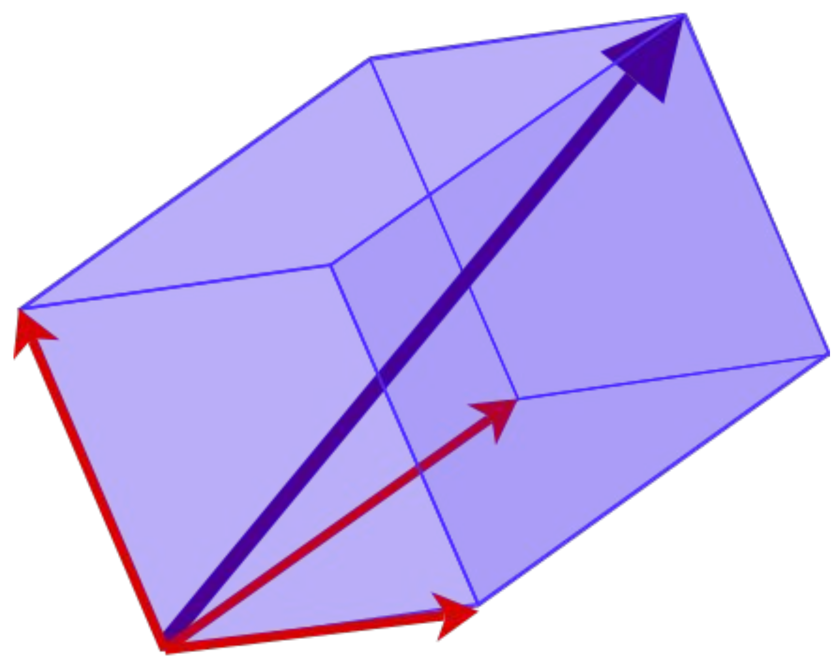
численные значения ***безразмерных величин*** одинаковы в любых системах единиц, принадлежащих ***одному классу***

Все ***показатели размерности*** безразмерных величин равны нулю

Независимые размерности

$\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots a_n}$- величины с ***независимыми размерностями***, если ни одна из них не имеет формулы размерности в виде степеней размерностей других величин





Цель количественного исследования – нахождение физического соотношения в виде функции или нескольких функций

- $$Y = f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

Где $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ - полная система параметров, расположенных таким образом, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеют независимые размерности, а размерности $b_1, \dots, b_m$могут быть выражены через размерности $a_1, a_2, \dots, a_n$

Вводный пример

- Функция Y равна удвоенной площади прямоугольника со сторонами a и b:

$$Y = Y(a, b) = 2ab$$

Параметры имеют равные и поэтому зависимые размерности. Выберем в качестве единицы измерения первый параметр, тогда второй параметр можно выразить через первый параметр $\mathrm{b} = \bar{b}a$, т. о.

$$Y = Y(a, b) = 2ab = Y'\left(a, \bar{b}\ \right) = 2a\bar{b}a$$

Величину Y также можно выразить, взяв a в качестве ед. измерения

$Y = \bar{Y}a^2$ и исходную зависимость можно переписать в виде

$$\bar{Y}\ = 2\bar{b}$$

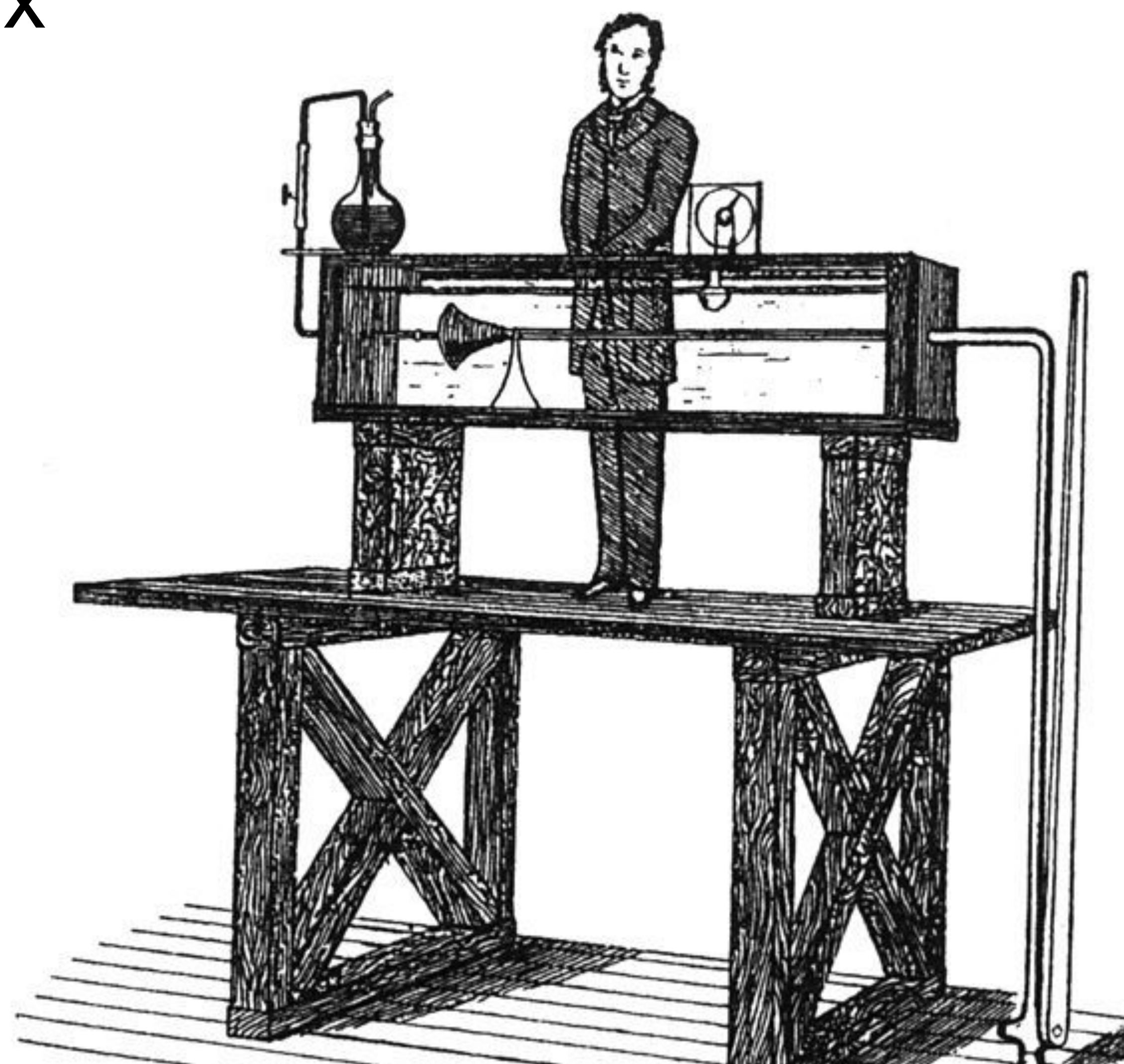
где $\bar{b}$ – отношение сторон.

Таким образом, зная $\bar{b}$ мы можем определить $\bar{Y}$, и затем, при необходимости вычисления размерной Y (например, при $a = 100cm$), вычислить $Y = a^2\ \bar{Y}$

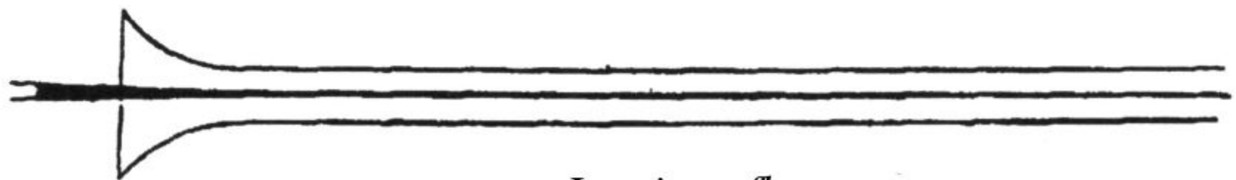
Приведенный пример не имеет *практического* смысла, поскольку вычисление площади по сторонам и так является простой операцией, но для более сложных задач переход от размерного вида уравнений к безразмерному в ряде случаев позволяет ***значительно упростить задачу*** и ***сделать выводы более универсальными***.

Задача о течении жидкости в длинной трубе
Osborne Reynolds

1883 исследование течения в длинных трубах

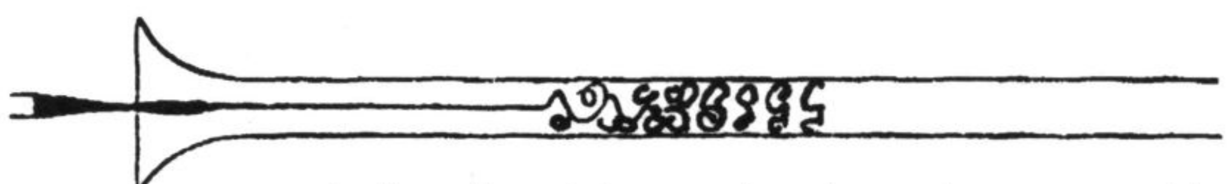


При увеличении скорости (расхода) характер течения и сопротивление изменялось



Laminar flow

Turbulent flow



Turbulent flow (observed with an electric spark)

Рассмотрим течение жидкости в длинной ***круглой*** трубе постоянного диаметра, так что свойства течения не зависят от координаты вдоль трубы (например скорость).

До работы Рейнольдса существовало множество эмпирических (соответствующих конкретным экспериментальным условиям) формул, зависящих от диаметра трубы и свойств жидкости.

Рейнольдс показал, что при заданном расходе (скорости) жидкости сопротивление зависит от одного безразмерного параметра.

Обратно, при заданном перепаде давления на некотором участке трубы (сопротивлении), средняя скорость также будет зависеть от одного параметра.

Величины, характеризующие поток:

- Диаметр трубы D,

$$[D] = [L]^1[m]^0[t]^0$$

- Скорость течения на входе V,

$$[V] = [L]^1[m]^0[t]^{-1}$$

- Плотность ρ,

$$[\rho] = [L]^{-3}[m]^1[t]^0$$

- Вязкость μ,

$$[\mu] = [L]^{-1}[m]^1[t]^{-1}$$

- Первые три параметра D, V, ρ имеют независимые размерности.

Поэтому зависимость перепада давления (l – длина участка трубы) от параметров течения в трубе может быть выражена формулой

$$\frac{p_2 - p_1}{l} = W = f(\underbrace{D, V, \rho}, \underbrace{\mu}), \text{ или}$$

$$y = f(a_1, a_2, a_3, b_1)$$

Можно проверить, что существует лишь одна комбинация первых трех параметров (один степенной одночлен), с помощью которой можно обезразмерить последний параметр

$$\frac{\mu}{\rho V D}$$

- Таким образом, от исходной зависимости

$$W = f(D, V, \rho, \mu)$$

Можно перейти к зависимости

$$W = g(D, V, \rho, \frac{\mu}{\rho V D})$$

На практике вместо $\frac{\mu}{\rho V D}$ используют обратное выражение $\frac{\rho V D}{\mu}$, которое было названо числом Рейнольдса, таким образом

$$W = g(D, V, \rho, Re)$$

Вспомнив, что $W = (p_2 - p_1)/l$, можно убедиться, что существует лишь одна возможность обезразмерить W с помощью D, V, ρ

$$\frac{WD}{\rho V^2} = C$$

- Таким образом, от исходной зависимости

$$W = f(D, V, \rho, \mu)$$

Мы перешли к зависимости

$$\text{C} = \psi(D, V, \rho, Re)$$

Но D, V, ρ являются базисной системой параметров, иными словами эталонной системой единиц, с помощью которой выражаются все другие параметры (аналогично метру, килограмму и секунде в МКС)

Поэтому последнее соотношение можно просто записать в виде

$$\text{C} = \psi(Re)$$

Таким образом: ***при заданном расходе в трубе перепад давления на единицу длины будет зависеть только от одного параметра***

(Зная B можно также вычислить сопротивление $P = (p_2 - p_1)S$, где $S = \pi D^2/4$ - площадь сечения)

Если найти эту зависимость с помощью серии экспериментов для конкретных условий, например для воды в трубе определенного диаметра, изменяя скорость течения (расход), то затем эту зависимость ***можно использовать совершенно для других условий***, например для воздуха и трубы другого диаметра.

Оказалось, что переход от ламинарного течения к турбулентному в круглый трубах также зависит от единственного параметра – ***числа Рейнольдса***.

Значение, при котором происходит переход к турбулентному течению называется ***критическим числом Рейнольдса***.

(домашнее) задание

- Обратная задача,

Пусть изначально задан перепад давления В на участке трубы длины l

$$\mathrm{B} = \frac{p_2 - p_1}{l}$$

Выписать общую формулу зависимости расхода от параметров течения и привести ее к безразмерному виду.

Возвращаясь к формализации функциональных зависимостей общего вида …

Цель количественного исследования – нахождение физического соотношения в виде функции или нескольких функций

- $$Y = f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

Где $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ - полная система параметров, расположенных таким образом, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеют независимые размерности, а размерности $b_1, \dots, b_m$ могут быть выражены через размерности $a_1, a_2, \dots, a_n$

Π — теорема

- $$[Y] = [a_1]^{\psi_1}[a_2]^{\psi_2} \dots [a_n]^{\psi_n}$$

$$\bar{Y} = \frac{Y}{Y_*}, \overline{b_i} = \frac{b_i}{b_{i^*}}$$

Y_*- масштабный параметр $Y_* = a_1^{\psi_1} \dots a_n^{\psi_n}$

$$b_{i*} = a_1^{\beta_{i1}} \dots a_n^{\beta_{in}}$$

В итоге переходим от исходной размерной зависимости

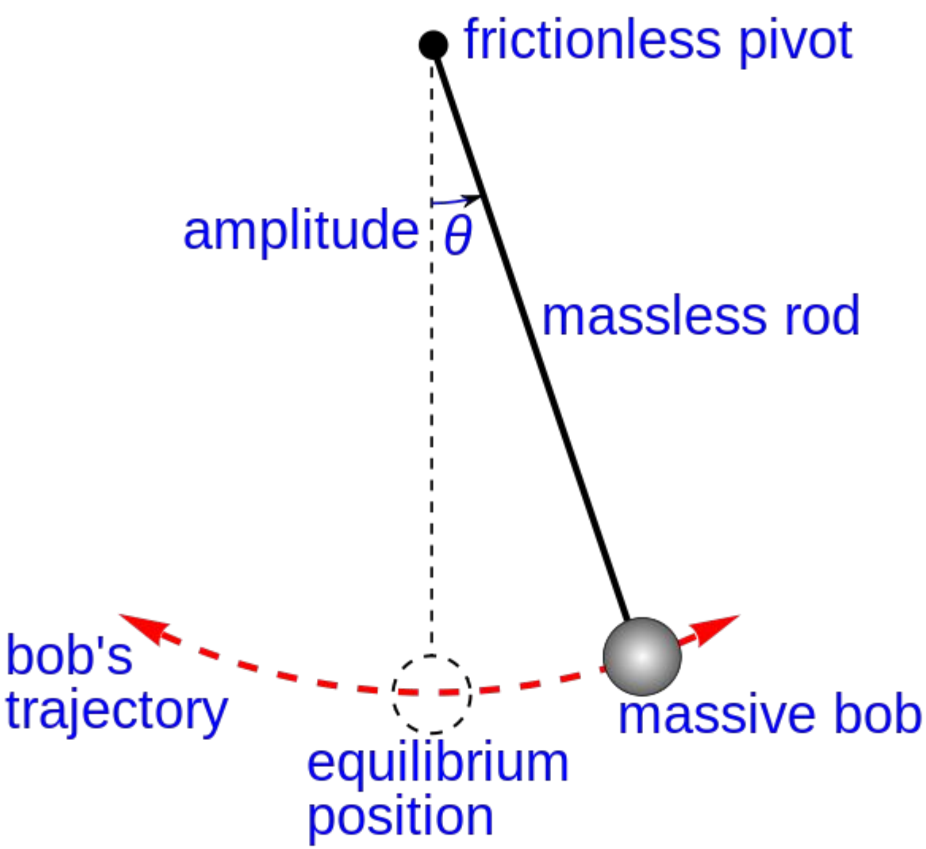
$$Y = f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

к безразмерной зависимости

$$\bar{Y} = g(\overline{b^1}, \overline{b^2}, \dots, \overline{b^m})$$

Безразмерная_ функция $\bar{Y}$ является функцией от m параметров $\overline{b_i}$, представляющих собой базисную совокупность безразмерных параметров.

Математический маятник



$$T_p = f(l, m, g, \theta)$$

l – длина

m – масса

θ – максимальный угол отклонения (угловая амплитуда)

Пользуясь методами теории размерностей определить общий виде зависимости периода колебаний от параметров

Цель анализа размерностей – дать *некоторые* сведения о соотношениях между *измеримыми* величинами.