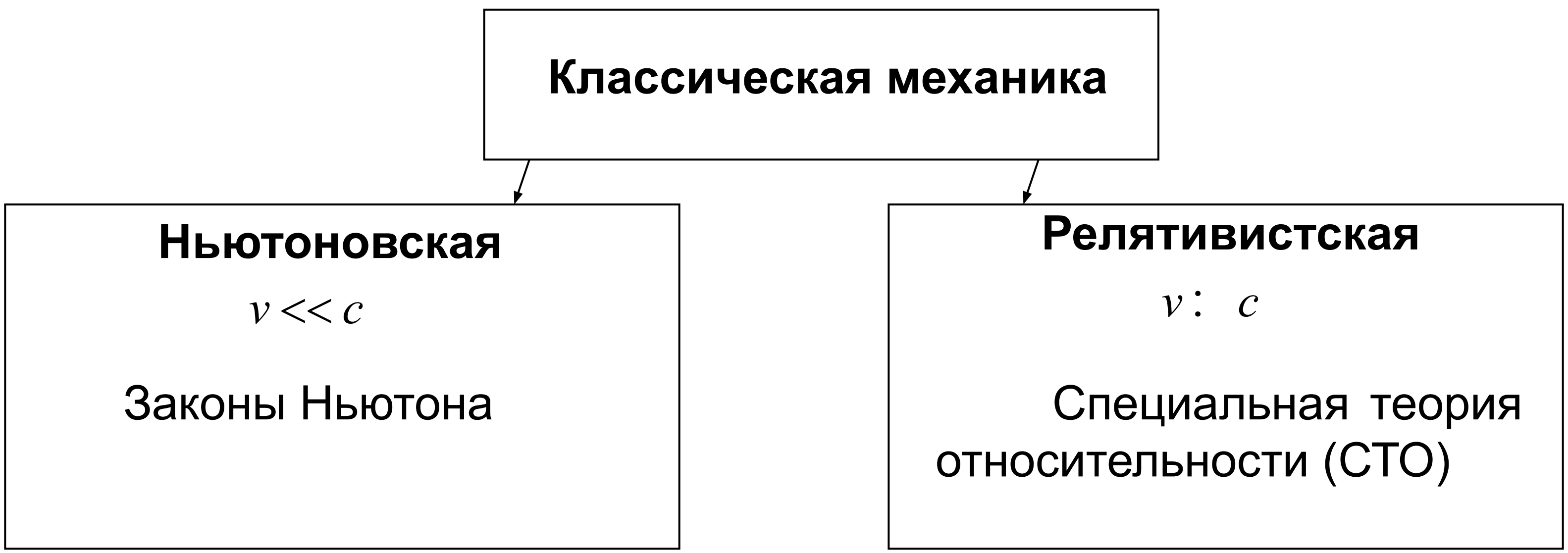
Глава 1. Кинематика точки

§ 1.1. Механическое движение

Механическим движением называется перемещение тела по отношению к другому телу, происходящее в пространстве и во времени.

Материальной точкой называют тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

Тело, деформациями которого в условиях рассматриваемой задачи можно пренебречь, называется **абсолютно твердым телом**.



Совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов называется **системой отсчета**

Линия, которую описывает материальная точка при своем движении, называется **траекторией**. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т. д.

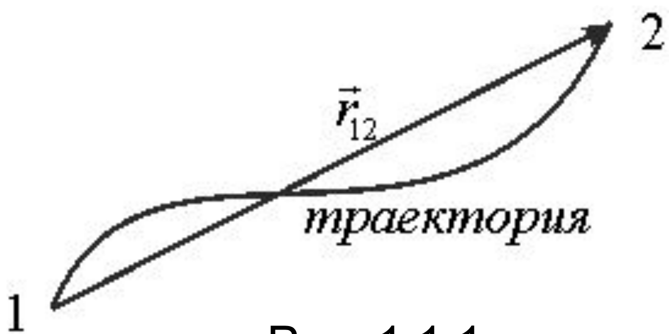
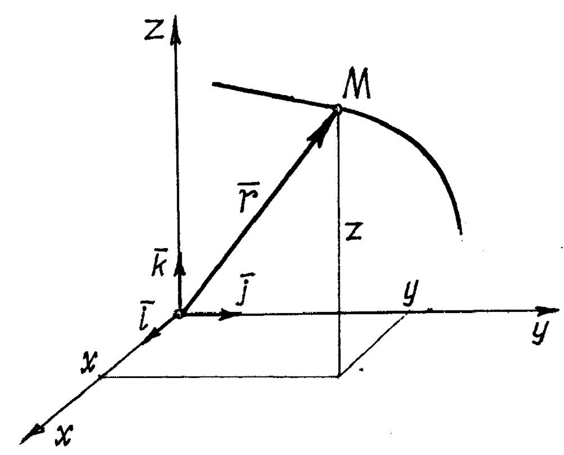


Рис. 1.1.1

Отрезок прямой, проведенный из начального положения частицы в конечное, называется перемещением. На рис. 1.1.1 вектор перемещения $\vec{r}_{12}$

радиус вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат

Рис. 1.1.2



§ 1.2. Скорость и ускорение точки

Скорость — это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

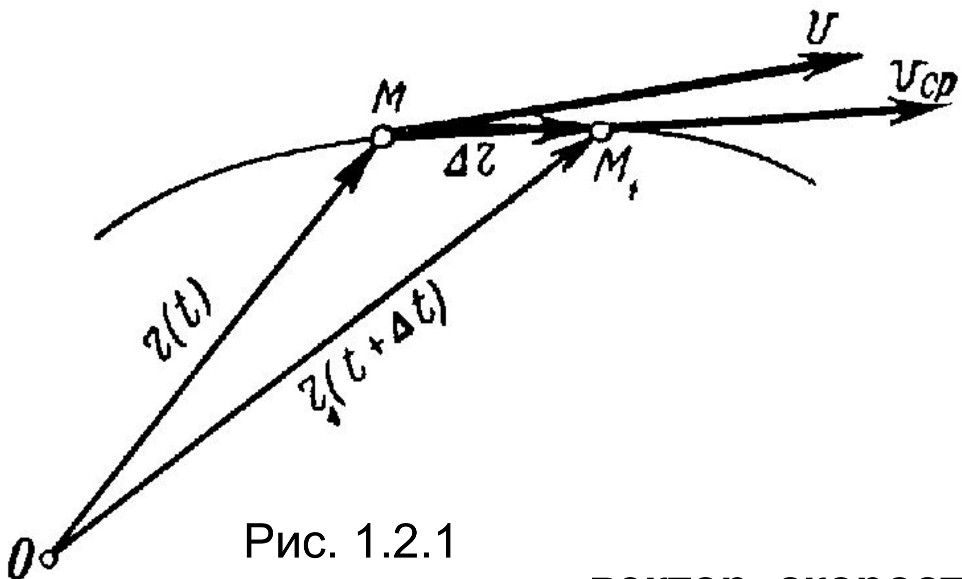


Рис. 1.2.1

Средняя скорость $\vec{v}_{cp} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Скорость точки $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \qquad (1.2.1)$$

вектор скорости точки в данный момент равен производной, от радиуса-вектора точки по времени и направлен по касательной к траектории движения точки

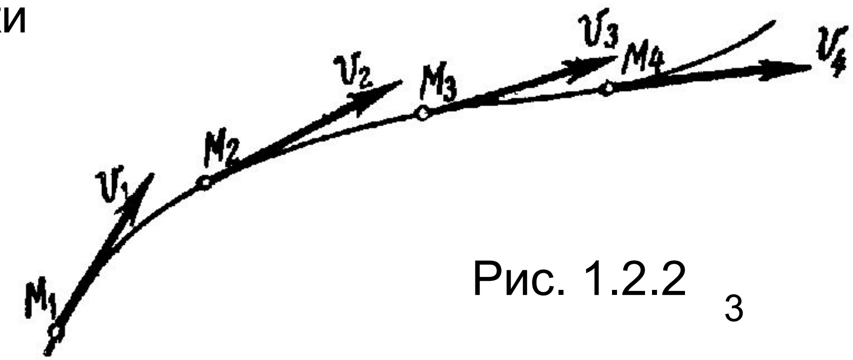


Рис. 1.2.2

радиус вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат

Согласно (1.2.1)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (1.2.2)$$

Скорость в декартовой системе координат

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (1.2.3)$$

Из (1.2.2) и (1.2.3) следует

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \ v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \qquad (1.2.4)$$

Компоненты скорости равны производным соответствующих координат по времени

Вектор **ускорения** точка равен первой производной от скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}$$

Компоненты **ускорения** равны вторым производным соответствующих координат по времени

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{d t^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{d t^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{d t^2}.$$

Представим скорость в виде

$$\vec{v} = v \vec{e}_v \qquad (1.2.5)$$

$\vec{e}_v$ - орт вектора $\vec{v}$

Рассмотрим два частных случая: 1) движение по прямолинейной траектории и 2) равномерное движение по окружности

1. При прямолинейном движении $\vec{e}_v = \mathrm{const}$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \vec{e}_v \qquad (1.2.6)$$

2. При равномерном движении по окружности $\vec{v} = \mathrm{const}$, поэтому

$$\vec{a} = v \dot{\vec{e}}_v \qquad (1.2.7)$$

Из рис. 1.2.3 следует, что за время Δt орт скорости поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = v \Delta t / R$$

и получает приращение $\Delta\vec{e}_v$

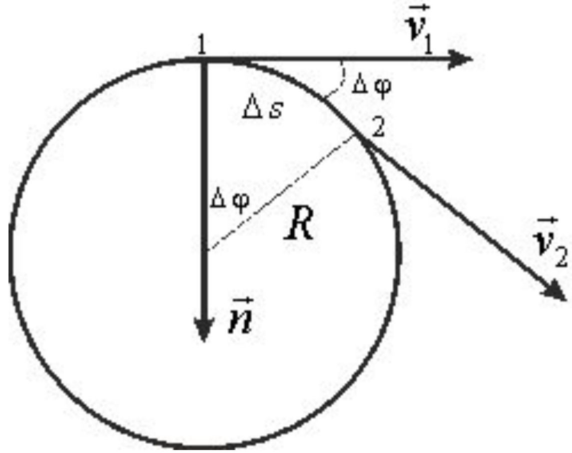
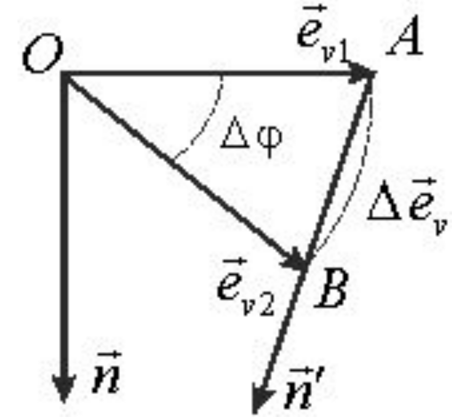


Рис. 1.2.3



По определению производной

$$\dot{\vec e}_v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec e_v}{\Delta t} \qquad (1.2.8)$$

Приняв $\left|\Delta\vec e_v\right| \approx \Delta\varphi$, можно записать $\Delta\vec e_v \approx \Delta\varphi\cdot\vec n'$, где $\vec n'$ – единичный вектор имеющий такое же направление, как и $\Delta\vec e_v$

При предельном переходе этот единичный вектор превращается в $\vec n$ орт нормали к траектории в той точке, в которой была частица в момент t. Тогда из (1.2.8)

$$\dot{\vec e}_v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\cdot\vec n'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\vec n' = \frac{v}{R}\vec n$$

Подставив найденное значение $\dot{\vec e}_v$ в (1.2.7), получим

$$\vec a_n = \frac{v^2}{R}\vec n. \qquad (1.2.9)$$

Таким образом, при равномерном движении по окружности ускорение определяется выражением (1.2.9). Направлено ускорение по нормали к скорости. Поэтому его называют **нормальным ускорением** и в его обозначении ставят индекс *n*

При неравномерном движении частицы по криволинейной траектории оба множителя в (1.2.5) изменяются со временем. Тогда

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{e}_v + v\dot{\vec{e}}_v \qquad (1.2.10)$$

$\vec{a}_\tau = \dot{v}\vec{e}_v$ - **тангенциальное** ускорение, $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ - **нормальное** ускорение.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \dot{v}\vec{e}_v + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

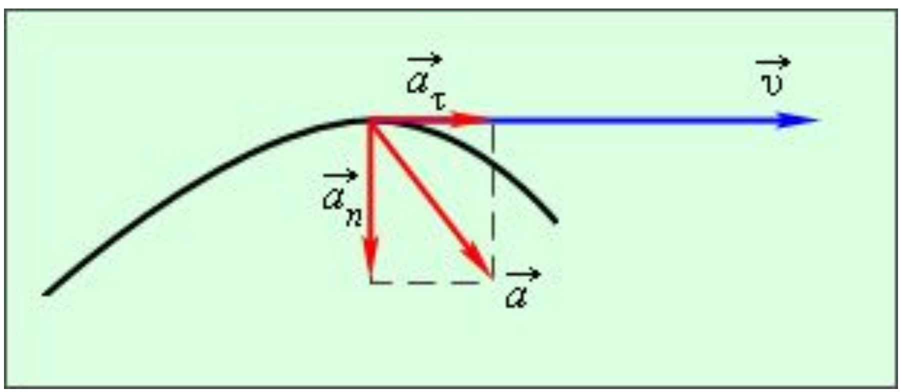


Рис. 1.2.4

Составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ перпендикулярны друг к другу. Поэтому $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v})^2 + (v^2 / R)^2}$$

1.3. Простейшие виды движения точки

1. Равномерное прямолинейное движение точки вдоль положительного направления оси OX

$$a_n = a_\tau = 0, \vec{v} = v_x \vec{i}, v_x > 0$$

Зависимость координаты от времени имеет вид $x = \int_0^t v_x dt + x_0 = v_x t + x_0$, где x_0-значение координаты в момент начала отсчета по времени. Пройденный путь, $S = x - x_0 = vt$.

2. Равнопеременное прямолинейное движение.

$$a_n = 0, \quad a_\tau = \text{const}.$$

Так как, $a_\tau = dv / dt$, то $v = \int_0^t a_\tau dt + v_0 = a_\tau t + v_0$, где v_0-значение скорости в момент начала отсчета по времени.

Если движение точки происходит вдоль положительного направления оси OX, то $v = v_x = dx/dt$. Тогда координата и пройденный путь определяются по следующим выражениям

$$x = \int_0^t v\,dt + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad S = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Для простоты в полученных выражениях вместо a_τ пишут просто a, тогда

$$v = at + v_0,$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Глава 2. Простейшие движения твердого тела

2.1. Поступательное движение твердого тела.

Поступательным движением тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, всё время перемещается параллельно своему первоначальному положению (рис. 2.1.1).

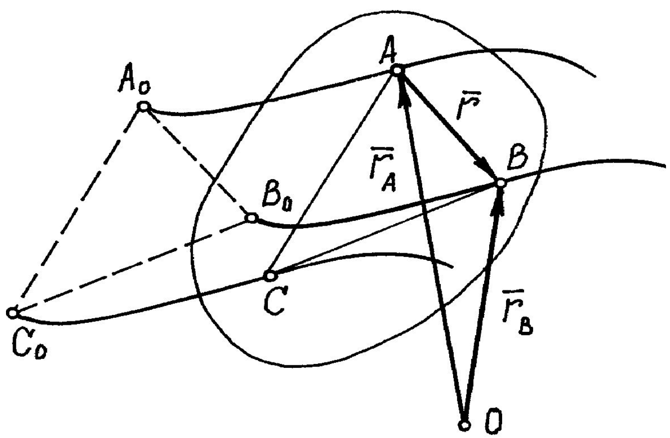


Рис. 2.1.1

Проведем радиусы векторы к точкам A и B

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \mathrm{const}$$

Тогда, $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}, \;\; \vec{a}_B = \vec{a}_A$

При поступательном движении все точки твердого тела имеют в любой момент времени одинаковые скорости и ускорения.

Для описания поступательного движения твердого тела достаточно знать, как движется одна из его точек. Все остальные точки движутся таким же образом.

2.2. Вращательное движение твердого тела (ТТ).

При вращательном движении ТТ все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения.**

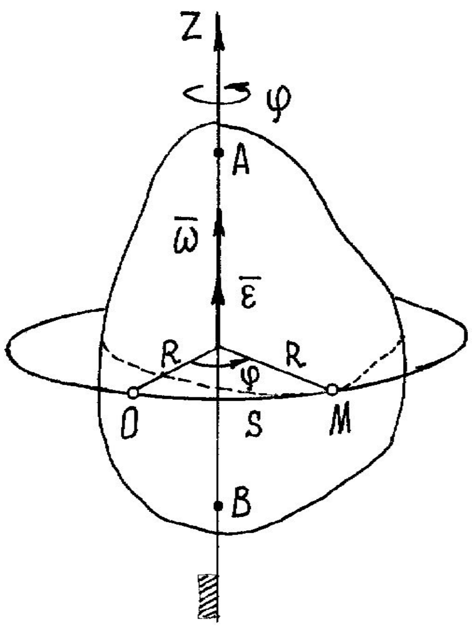


Рис. 2.2.1

Положение тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси относительно какого-либо заранее выбранного положения. Этот угол измеряется в радианах. Чтобы определить положение тела в любой момент времени, должен быть задан угол поворота как функция времени $\varphi = \varphi$ (t), рис. 2.2.1 .

Эта функция называется ***уравнением вращения тела***.

Элементарные повороты тела можно рассматривать как векторы $d\vec{\varphi}$. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу **правого винта**.

Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами.**

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad [\omega] = 1\,рад/с$$

Изменение угловой скорости со временем характеризуется векторной величиной

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}.$$

Если направление оси вращения в пространстве не изменяется, вектор $\vec{\omega}$ может изменяться только по модулю. В этом случае векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ коллинеарны, причем направлены в одну и ту же сторону, если вращение ускоренное, и в противоположные стороны, если вращение замедленное.

Угловое ускорение измеряется в радианах в секунду за секунду (рад/с^2).

Найдем связь ω и ε с величинами v и a, которые, чтобы отличить их от угловых, называют линейными скоростью и ускорением. Из рис. 2.2.1 следует $\Delta s = R\Delta\varphi$, тогда

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega \qquad (2.2.1)$$

Согласно (1.2.9) модуль нормального ускорения определяется по формуле

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$, тогда с учетом (2.2.1)

$$a_n = R\omega^2 \qquad (2.2.2)$$

Таким образом, модуль нормального ускорения пропорционален квадрату угловой скорости.

Продифференцировав выражение $v = R\omega$ по времени, получим $\dot{v} = R\dot{\omega}$. В соответствие с формулой (1.2.10) $|\dot{v}|$ представляет собой модуль тангенциального ускорения a_τ. В случае, когда ось вращения не изменяет направления в пространстве, получим

$$a_\tau = \varepsilon R. \tag{2.2.3}$$

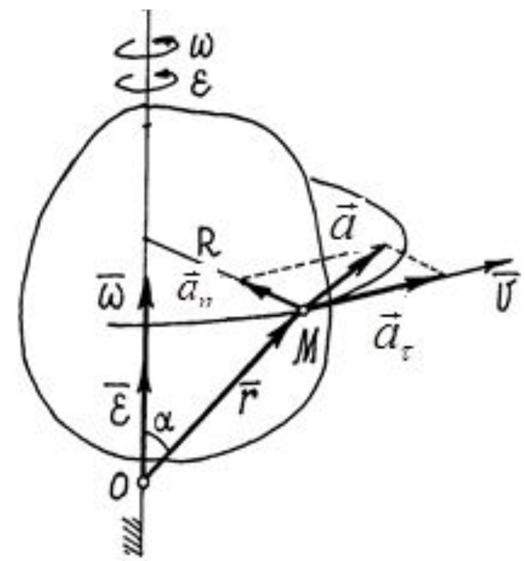


Рис. 2.2.2

Глава 3. Элементы теории относительности

3.1. Принцип относительности Галилея

Сопоставим описания движения частицы в инерциальных системах отсчета *K* и K', движущихся друг относительно друга со скоростью $\vec{V}$.

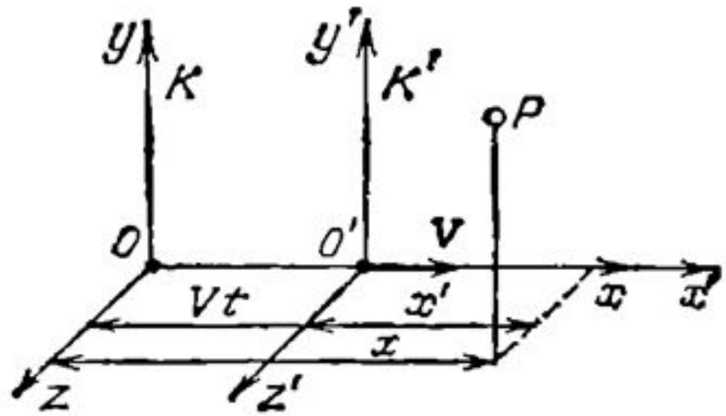


Рис. 9.

Отсчет времени начнем с момента, когда O и O' совпадают, тогда для координат точек справедливо $x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$. В ньютоновской механике время во всех системах отсчета течет одинаково $t = t'$.

Преобразования Галилея

$$x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t'.$$

Эти уравнения позволяют перейти от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы.

Продифференцируем первые три уравнения, получим

$$v_x = v'_{x'} + V,\ v_y = v'_{y'},\ v_y = v'_{y'}.$$

Эти уравнения можно представить в виде: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$

Закон сложения скоростей: скорость частицы относительно системы K равна сумме скорости частицы относительно системы K' и скорости системы K' относительно системы K. Дифференцирование по времени этого уравнения приводит к равенству

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Т.е. ускорения частиц относительно систем K и K' одинаковы.