Физика ч.I

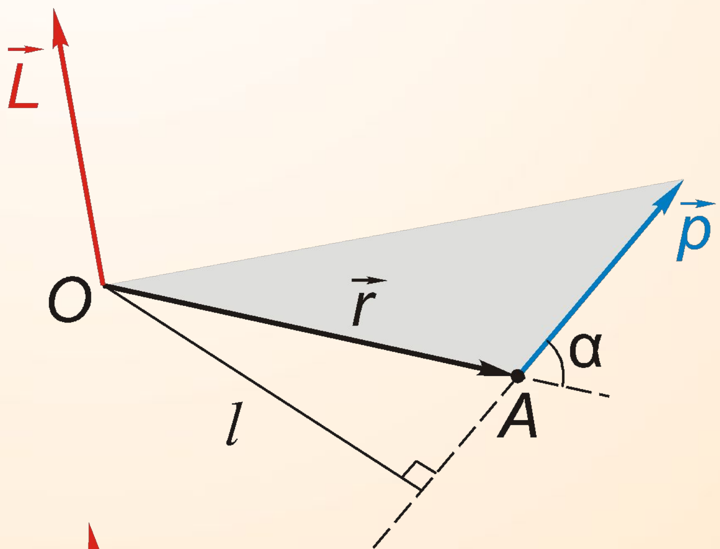
«Механика. Молекулярная физика и термодинамика»

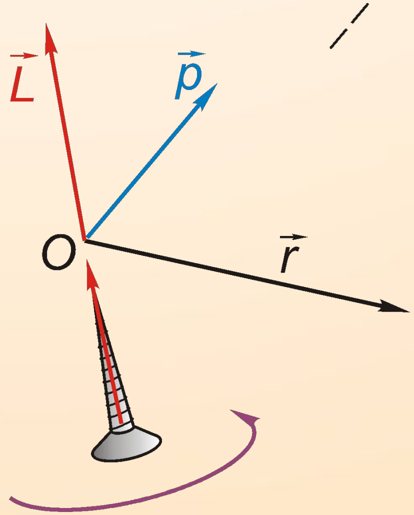
Лекция №6

Динамика вращательного движения твердого тела

Тема 6. Элементы динамики вращательного движения твердого тела.

6.1. Момент импульса частицы. Момент силы.





- Моментом импульса частицы А относительно точки О называется физическая величина, численно равная векторному произведению радиус-вектора частицы на ее импульс.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (6.1)$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = l \cdot p \qquad (6.2)$$

Единицы системы СИ:

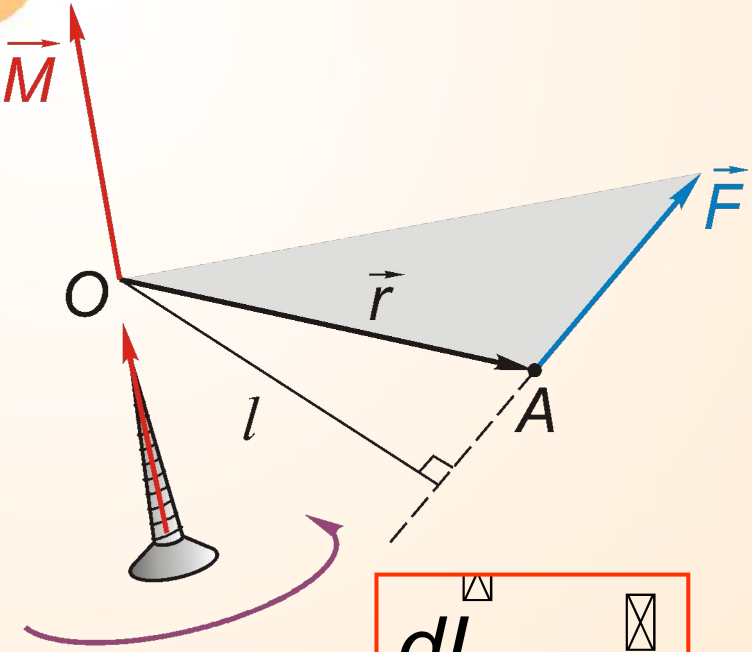
момент импульса – 1м·1кг·м/с=1 кг·м^2/с

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (6.3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ - момент силы F относительно точки O



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (6.4)$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = l \cdot F \qquad (6.5)$$

<u>Единицы системы СИ:</u>
момент силы – 1 Н·м

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

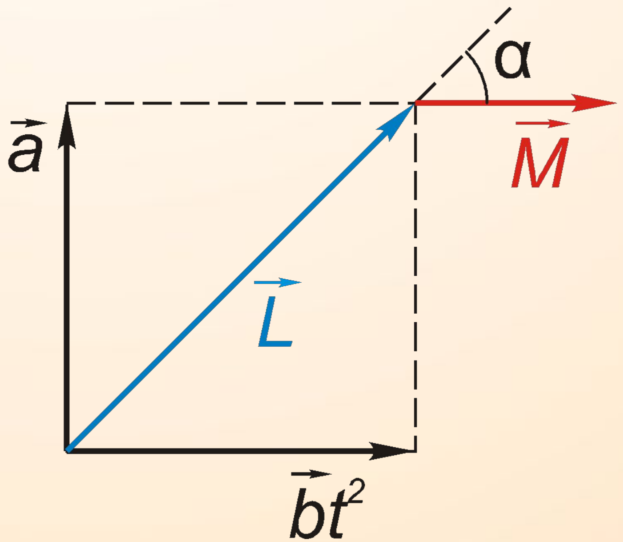
Скорость изменения момента импульса равна моменту внешних сил
(6.6)

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$$ - импульс момента силы (6.7)

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}(t)dt \qquad (6.8)$$

Задача 6.1

Момент импульса частицы относительно некоторой точки меняется со временем t по закону $\vec{L}(t)=\vec{a}+\vec{b}\cdot t^2$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - некоторые постоянные векторы, причем $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найти момент силы $\vec{M}$, действующий на частицу, когда угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{M}$ окажется равным 45°.



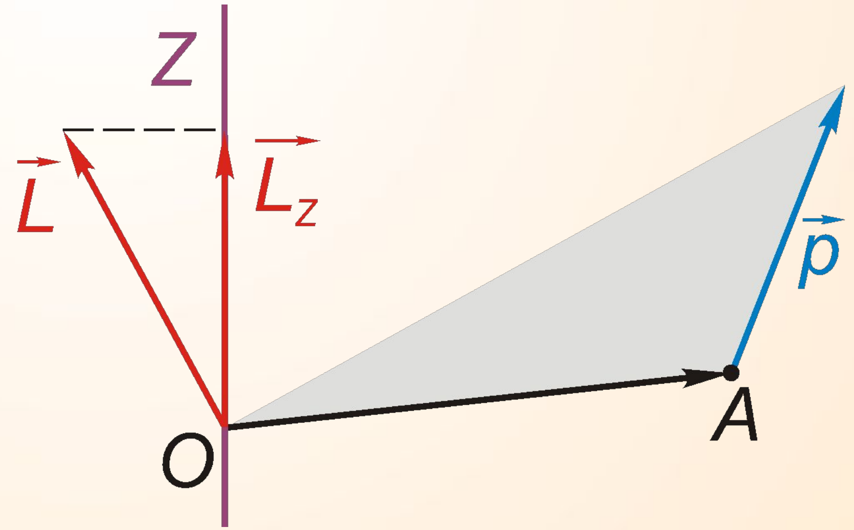
$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}=2\vec{b}\cdot t$$

$$a=b\cdot t_0^2$$

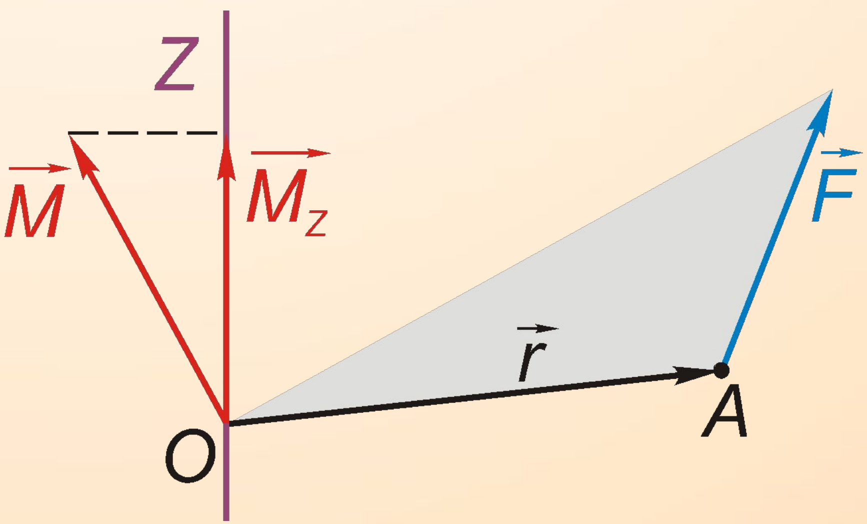
$$t_0=\sqrt{a/b}$$

$$\vec{M}=2\sqrt{a/b}\cdot\vec{b}$$

6.2. Момент импульса и момент силы относительно оси.

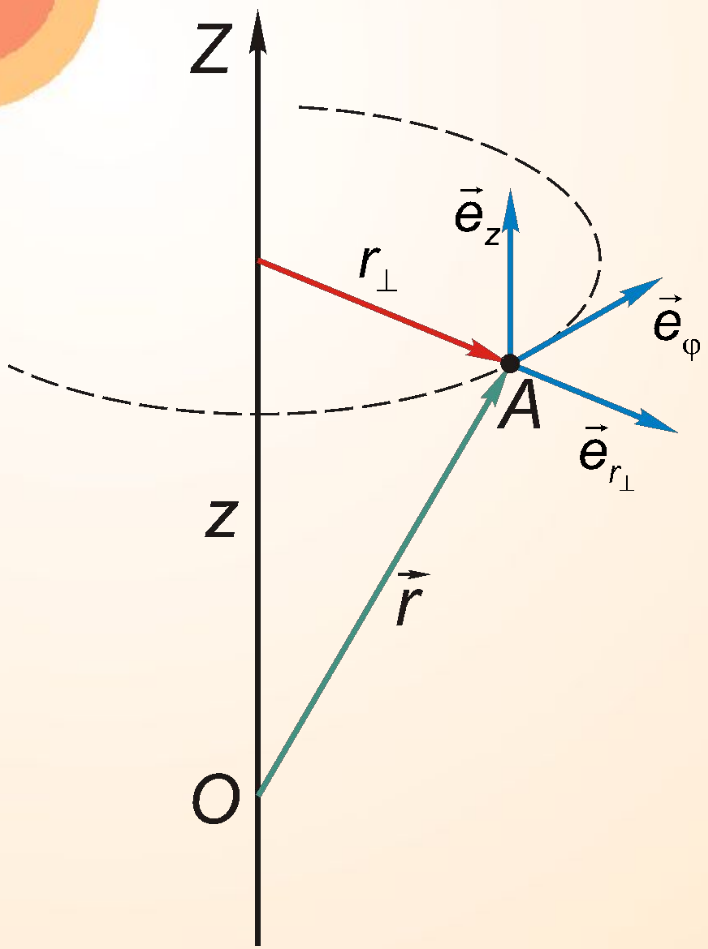


$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (6.9)$$



$$L_z = \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_z$$

$$M_z = \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_z$$



$$\boxed{L_z = m r_\perp^2 \omega_z} \qquad (6.10)$$

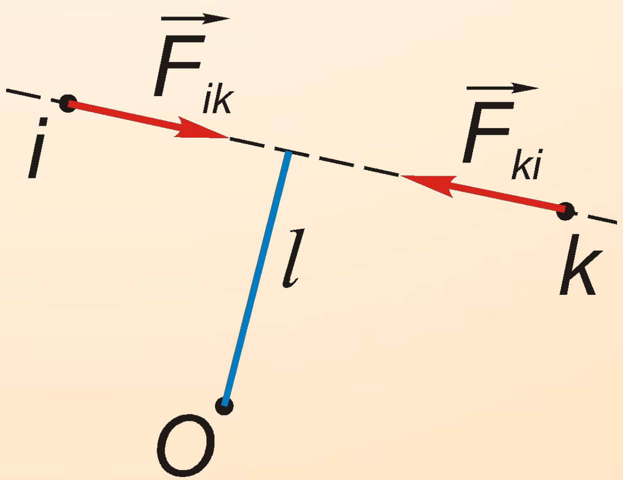
$$\boxed{M_z = r_\perp F_\varphi}$$

6.3. Закон сохранения момента импульса.

- Моментом импульса системы тел или частиц называется векторная сумма моментов импульсов всех тел, образующих систему.

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i \qquad (6.11)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внутр}} + \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}}$$



$$\vec{M}_{ik} = -\vec{M}_{ki}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}} \qquad (6.12)$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}_{внеш}(t)dt \qquad (6.13)$$

Если система замкнутая, то на неё внешние силы не действуют, и их момент равен нулю.

Поэтому справедлив:

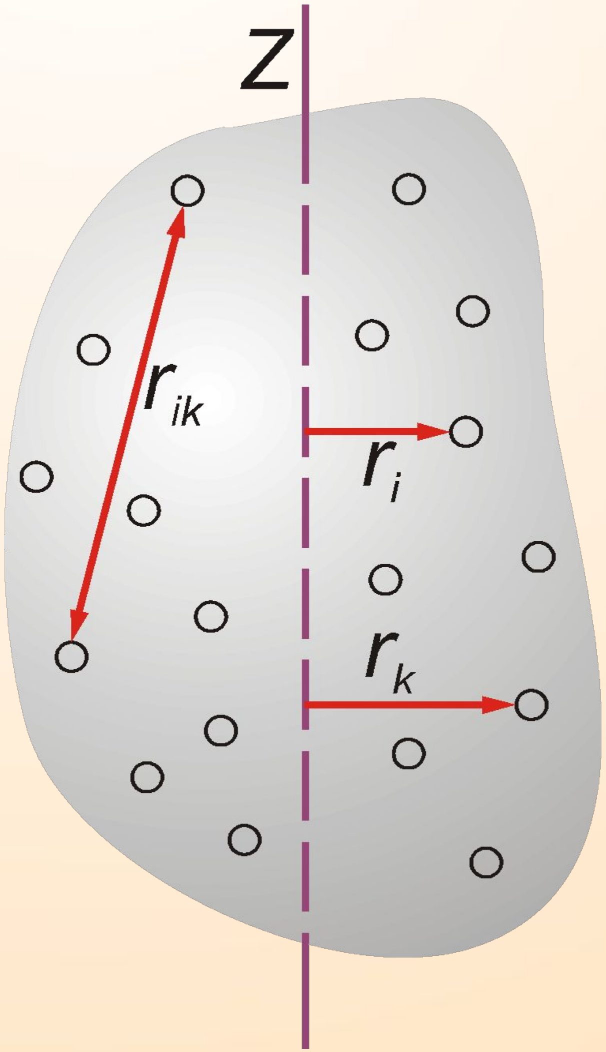
Закон сохранения момента импульса.

Момент импульса замкнутой системы тел не меняется с течением времени.

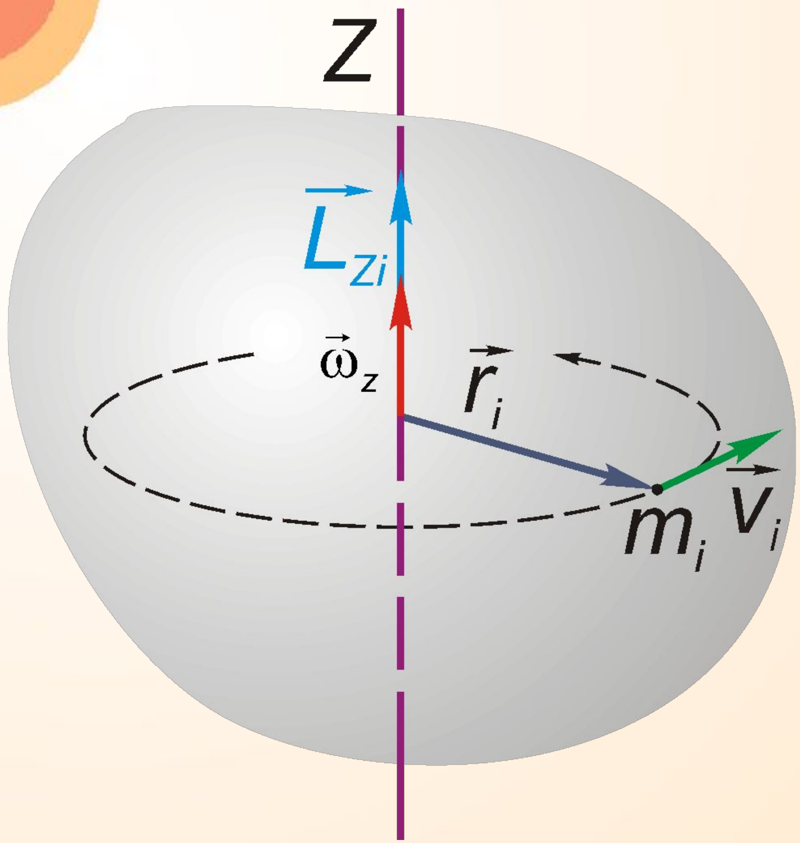
$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i(t) = const$$

6.4. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

- Абсолютно твердое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется при движении.



$$\frac{dL_Z}{dt} = M_{внешZ} \qquad (6.14)$$



$$L_Z = \sum L_{iZ} = \left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \omega_z$$

Момент инерции тела относительно оси Z –

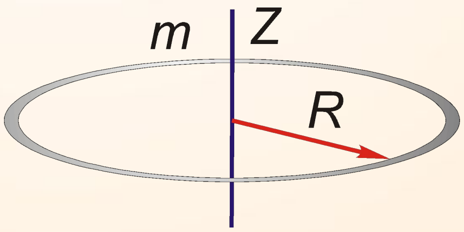
$$I_Z = \sum m_i r_i^2$$

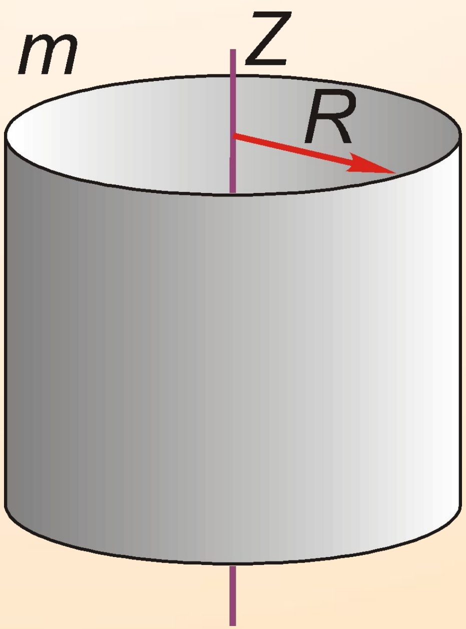
$$L_Z = I_Z \cdot \omega_z \qquad (6.15)$$

6.4.1. Моменты инерции некоторых тел.

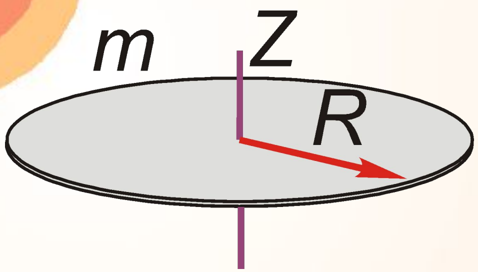
$$I_Z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv$$

<u>Единицы системы СИ:</u>
момент инерции – 1 кг·м^2



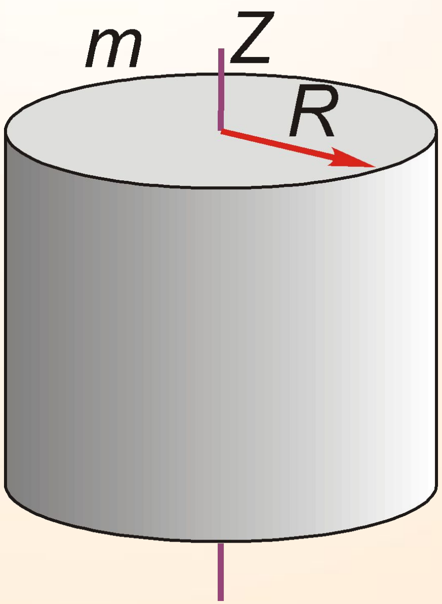


$$I_Z = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{mR^2}$$



$$I_Z = \int \rho r^2 dV$$

$$dV = zr \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$$

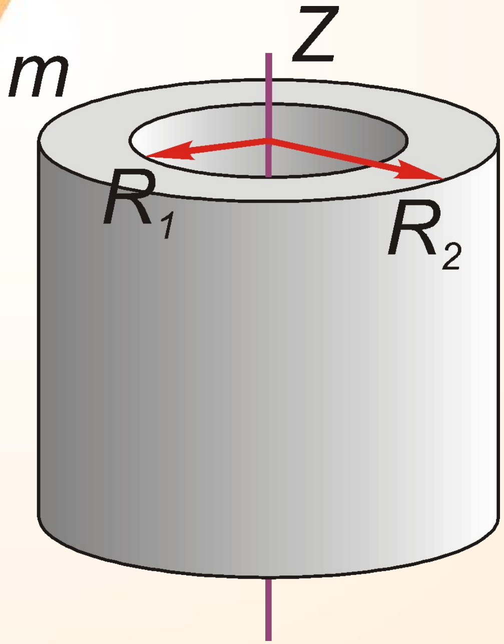


$$I_Z = \iiint \rho r^3 z \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \rho \int_0^h dz \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \rho \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \rho\left(\pi R^2 h\right)\frac{R^2}{2} = \rho V \frac{R^2}{2}$$

$$\rho V = m$$

$$\boxed{I_Z = \frac{mR^2}{2}}$$



$$I_{Z2} = I_{Z1} + I_Z$$

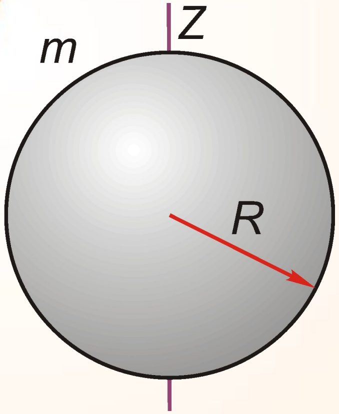
$$I_{Z1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R_1^2 h R_1^2$$

$$I_{Z2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R_2^2 h R_2^2$$

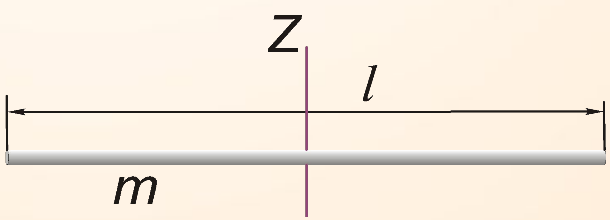
$$I_Z = I_{Z2} - I_{Z1} = \frac{1}{2} \rho \pi h \left(R_2^4 - R_1^4\right) = \frac{1}{2} \rho \pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

$$\rho \pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right) = m$$

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{2} m \left(R_2^2 + R_1^2\right)}$$



$$\boxed{I_Z = \frac{2}{5} mR^2}$$



$$I_Z = \int \rho r^2 dV$$

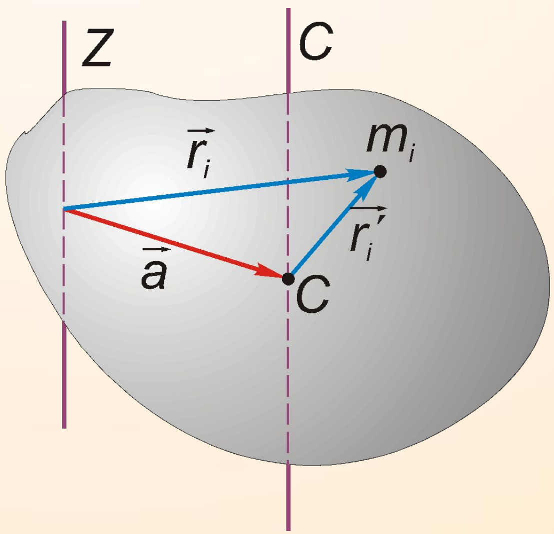
$$I_Z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho r^2 \cdot S dr = \rho S \left(\frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right)$$

$$= (\rho S l)\frac{l^2}{12}$$

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{12} ml^2}$$

Теорема Штайнера:

Момент инерции I_Z относительно произвольной оси Z равен моменту инерции I_C относительно оси C, параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями.



$$\boxed{I_Z = I_C + ma^2} \tag{6.16}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$$

$$I_Z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i \left(\vec{r}_i' + \vec{a}\right)^2$$

$$I_Z = \sum m_i r_i'^2 + 2\vec{a} \sum m_i \vec{r}_i' + \sum m_i a^2 \tag{6.17}$$

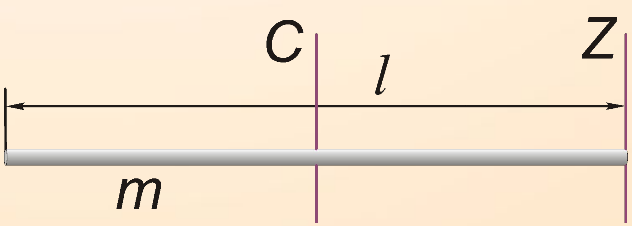
$$I_z = \sum m_i r_i'^2 + 2\vec{a}\sum m_i \vec{r}_i' + \sum m_i a^2$$

$$\sum m_i r_i'^2 = I_C$$

$$\sum m_i \vec{r}_i' = m\vec{r}_C' = 0$$

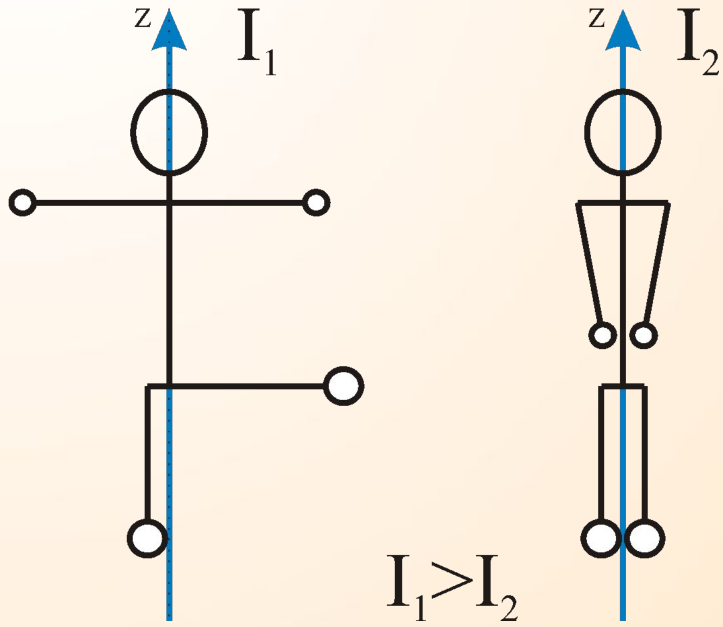
$$\sum m_i a^2 = ma^2$$

$$\boxed{I_z = I_C + ma^2}$$



$$I_z = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ml^2}$$

$$I_Z \cdot \omega_Z = const \qquad (6.18)$$



$$I_{Z1} \cdot \omega_1 = I_{Z2} \cdot \omega_2$$

$$\omega_1 < \omega_2$$

Задача 6.2

Стержень длиной 1,2 м и массой 1 кг закреплен на вертикальной оси, проходящей через его центр перпендикулярно длине стержня. В конец стержня попадает пуля массой 8 г, летящая горизонтально со скоростью 100 м/с, и застревает в стержне. С какой угловой скоростью начнет вращаться стержень?

Дано:

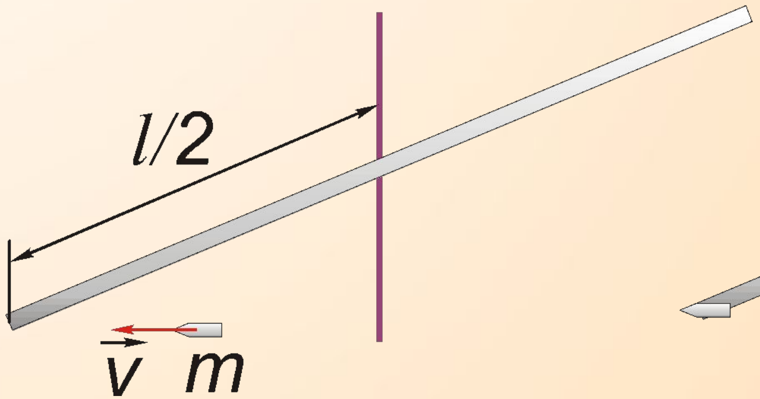
l = 1,2 м

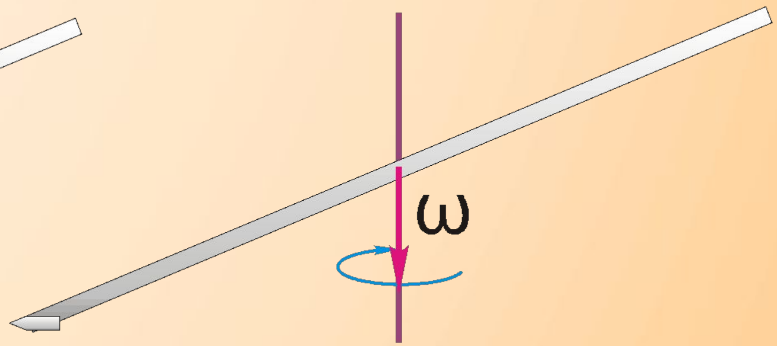
M = 1 кг

m = 8 г = $8\cdot10^{-3}$ кг

v = 100 м/с

ω - ?





$$L_1 = mv\frac{l}{2}$$

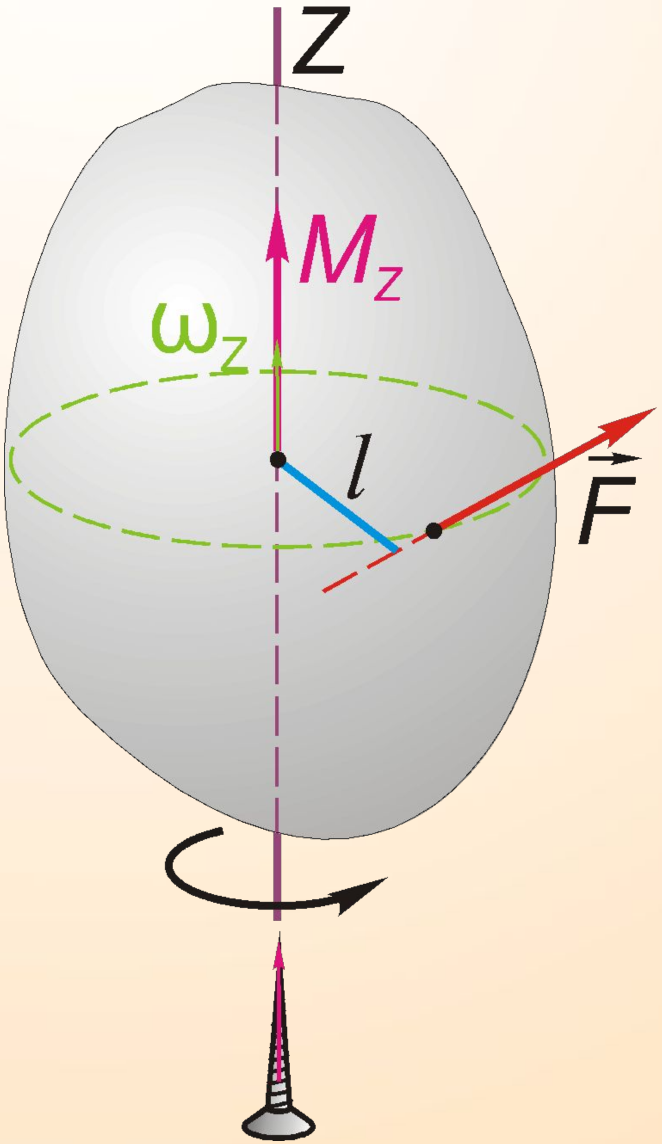
$$L_2 = \left(I_{ст} + I_{п}\right)\cdot\omega$$

$$L_2 = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\cdot\omega = \frac{l^2\omega}{12}(M+3m)$$

$$L_1 = L_2 \qquad mv\frac{l}{2} = \frac{l^2\omega}{12}(M+3m)$$

$$\omega = \frac{6mv}{l(M+3m)} = \frac{6\cdot 8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot 100\ \text{м/с}}{1{,}2\ \text{м}\cdot\left(1\text{кг} + 3\cdot 8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\right)} = \underline{3{,}9\ \text{рад/с}}$$

6.5. Основное уравнение динамики вращательного движения.



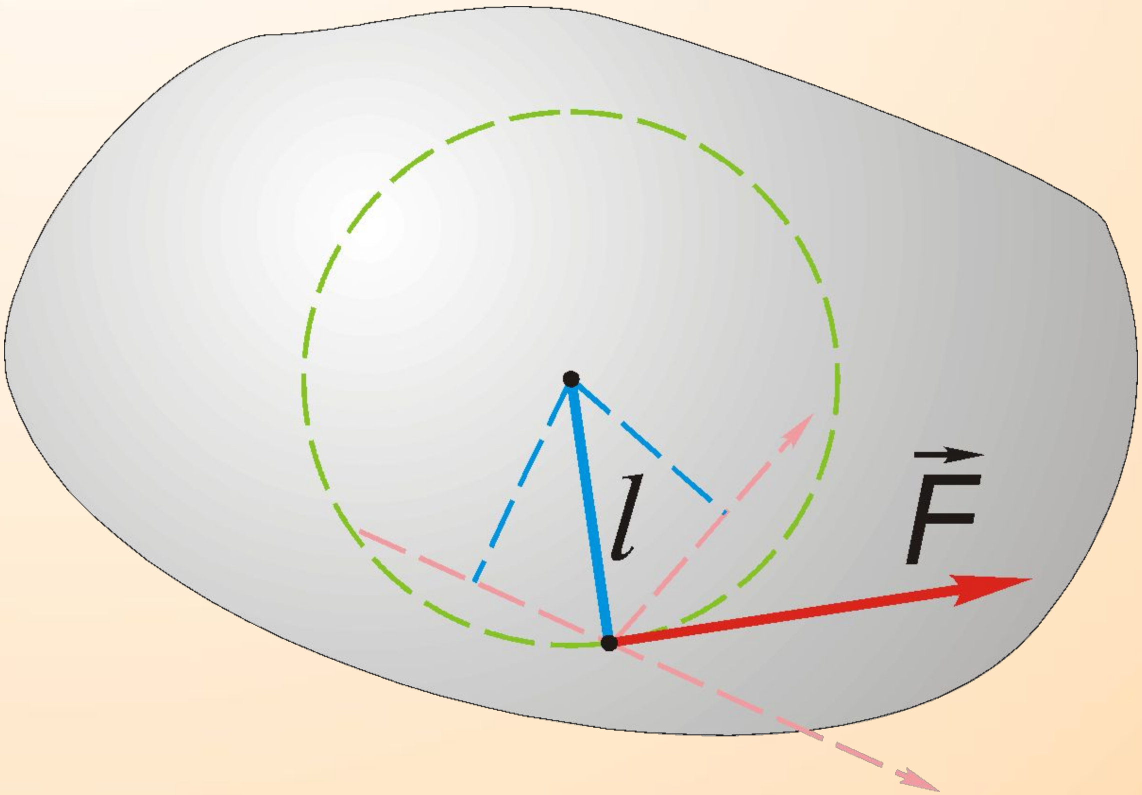
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

$$L_z = I_z \cdot \omega_z$$

$$M_z = \frac{d(I_z \cdot \omega_z)}{dt} = I_z \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \beta_z$$

$$\boxed{M_z = I_z \cdot \beta_z} \qquad (6.22)$$



$$M_z = F \cdot l$$

Задача 6.3

Однородный диск массой 5 кг и радиусом 0,2 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени задана уравнением $\omega = A+Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

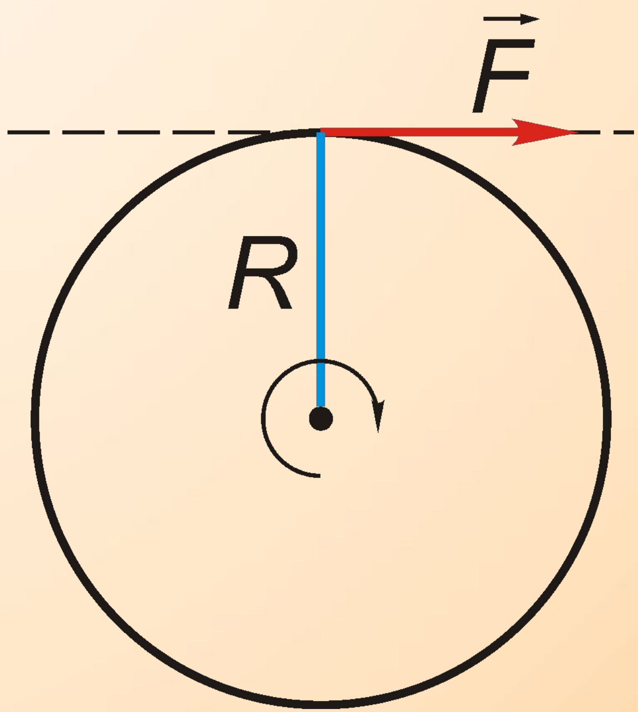
Дано:

m = 5 кг

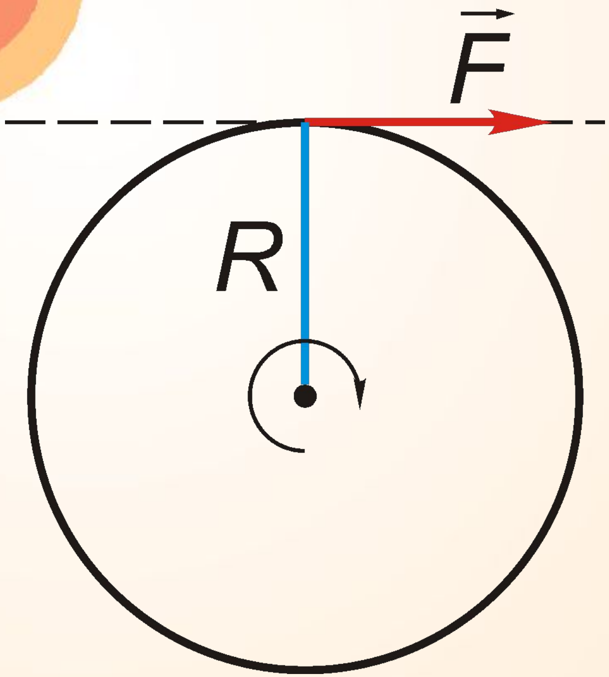
R = 0,2 м

B = 8 рад/с^2

F - ?



$$M_z = I_z \cdot \beta_z$$



$$M_z = F \cdot l = F \cdot R$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d(A+Bt)}{dt} = B$$

$$F \cdot R = \frac{mR^2 B}{2}$$

$$F = \frac{mRB}{2} = \frac{5\,\text{кг} \cdot 0{,}2\,\text{м} \cdot 8\,\text{рад}/\text{с}^2}{2} = 4\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \underline{4\text{Н}}$$

Задача 6.4

На барабан диаметром 0,8 м намотан трос с закрепленным на конце грузом массой в 3 кг. Вращаясь равноускоренно под действием силы натяжения троса, барабан за 4 секунды приобрел угловую скорость 16 рад/с. Определить момент инерции барабана.

<u>Дано:</u>

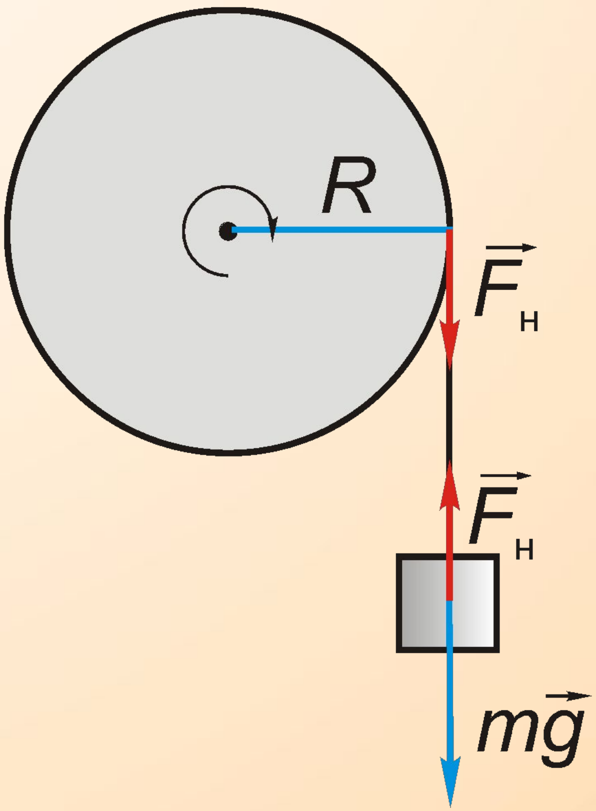
$D = 0{,}8$ м

$m = 3$ кг

$\Delta t = 4$ с

$\omega = 16$ рад/с

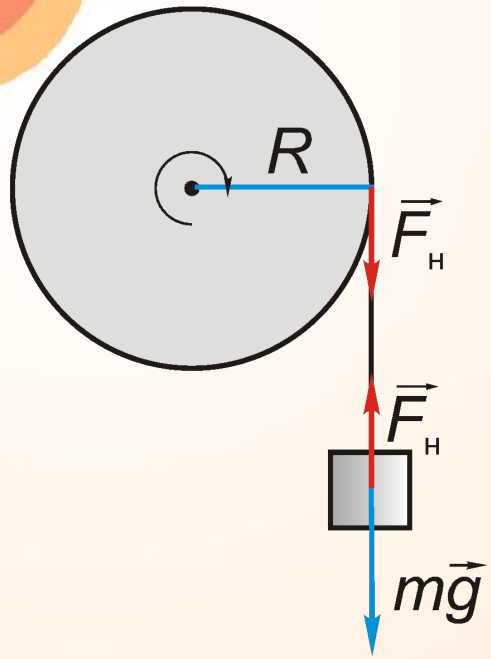
I_z - ?



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

$$ma = mg - F_н$$

$$a = a_\tau \quad \Rightarrow \quad F_н = m(g - a_\tau) \qquad (6.23)$$



$$I_Z \cdot \beta_Z = M_Z = F_н \cdot R = m(g - a_\tau)R$$

$$a_\tau = \beta_Z \cdot R$$

$$I_Z = \frac{m(g - \beta_Z R)R}{\beta_Z}$$

$$\beta_Z = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t}$$

$$I_z = \frac{m\left(g - \frac{\omega}{\Delta t}\frac{D}{2}\right)D}{2\frac{\omega}{\Delta t}} = \frac{m(2g\Delta t - \omega D)D}{4\omega}$$

$$I_z = \frac{3кг\left(2 \cdot 9{,}81 м/с^2 \cdot 4с - 16 рад/с \cdot 0{,}8м\right)0{,}8м}{4 \cdot 16 рад/с} =$$

$$= 2{,}46\,\frac{кг(м/с - м/с)м}{1/с} = \underline{2{,}46\,кг \cdot м^2}$$

Задача 6.5

Однородный шар массы m=4,0 кг движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы , приложенной, как показано на рисунке, где угол α=30º. Коэффициент трения между шаром и столом k=0,20. Найти силу F .

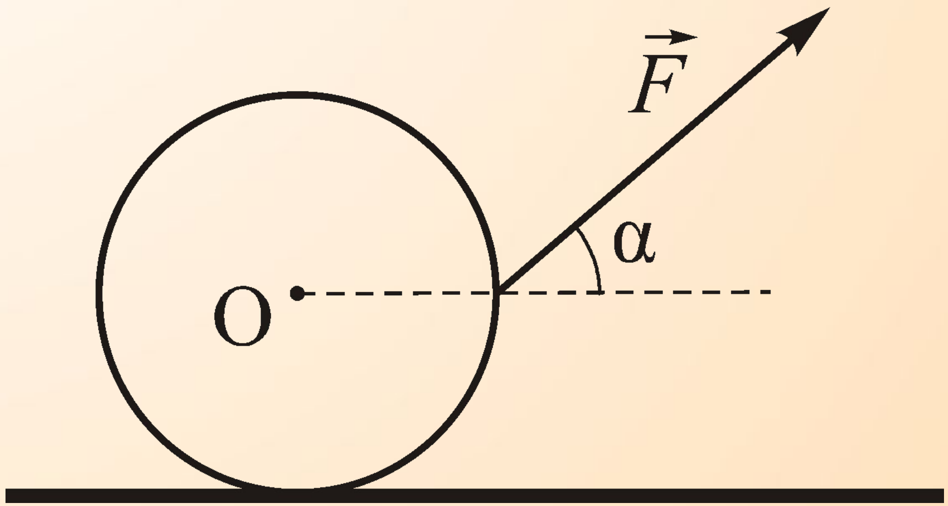
Дано:

m = 4 кг

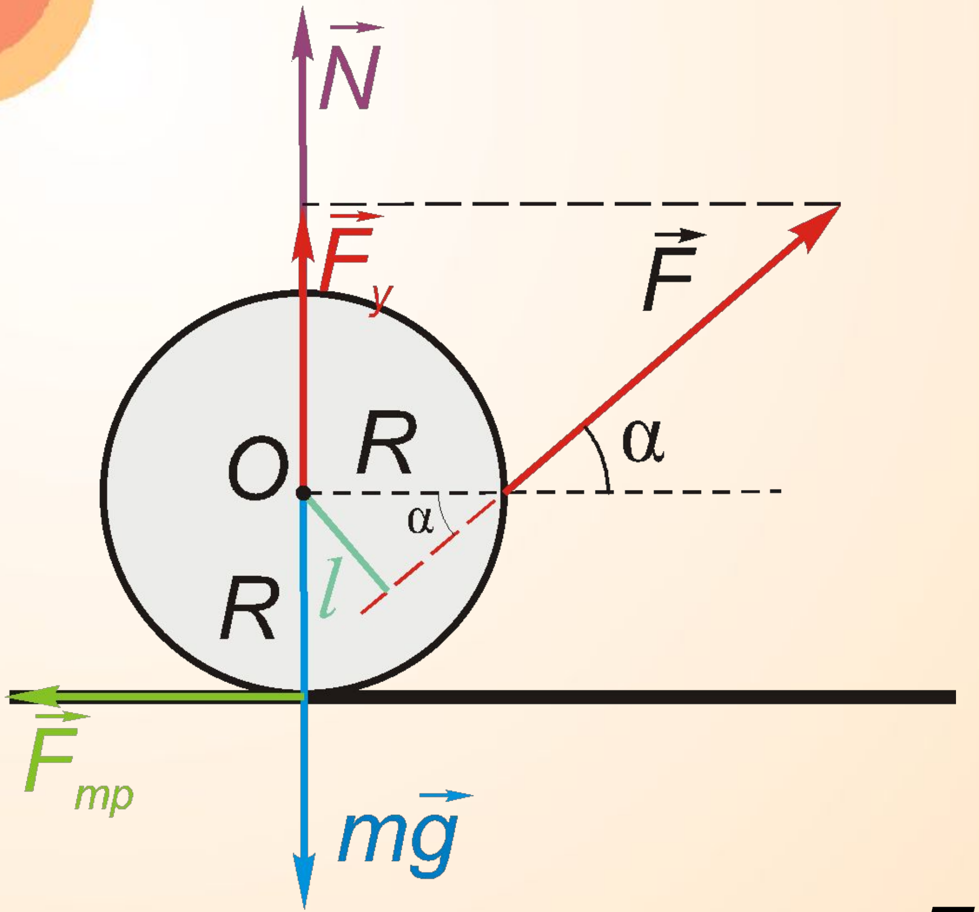
α = 30°

k = 0,2

F - ?



$$\vec{M}_{тр} + \vec{M}_F = 0$$



$$M_{тр} = -F_{тр} \cdot R$$

$$M_F = F \cdot l = F \cdot R \cdot sin\,\alpha$$

$$-F_{тр} \cdot R + F \cdot R \cdot sin\,\alpha = 0$$

$$N + F_y = mg$$

$$N = mg - F \cdot sin\,\alpha$$

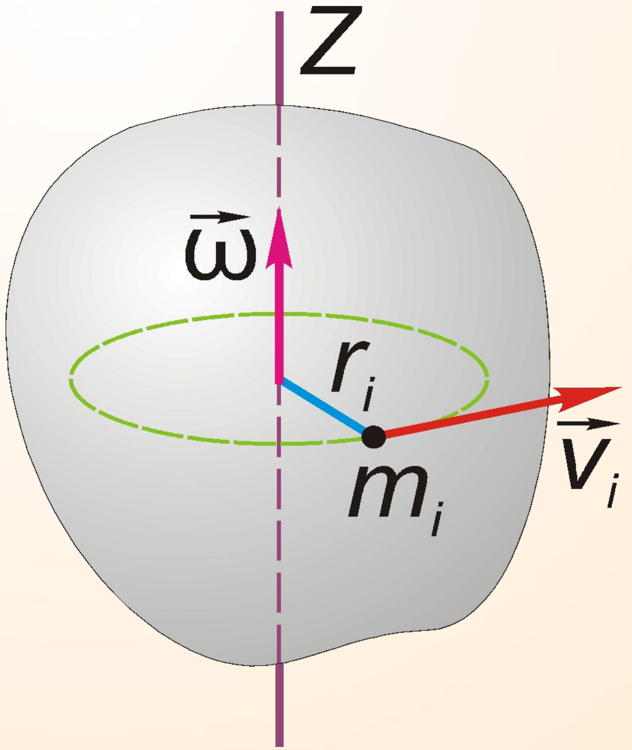
$$F_{\text{тр}} = kN = k(mg - F \cdot \sin\alpha)$$

$$F \cdot \sin\alpha = F_{\text{тр}} = kmg - kF \cdot \sin\alpha$$

$$F(1 + k)\sin\alpha = kmg$$

$$F = \frac{kmg}{(1 + k)\sin\alpha} = \frac{0{,}2 \cdot 4 \cdot 9{,}8}{1{,}2 \cdot 0{,}5} = \underline{13\,\text{Н}}$$

6.7. Кинетическая энергия вращающегося тела.



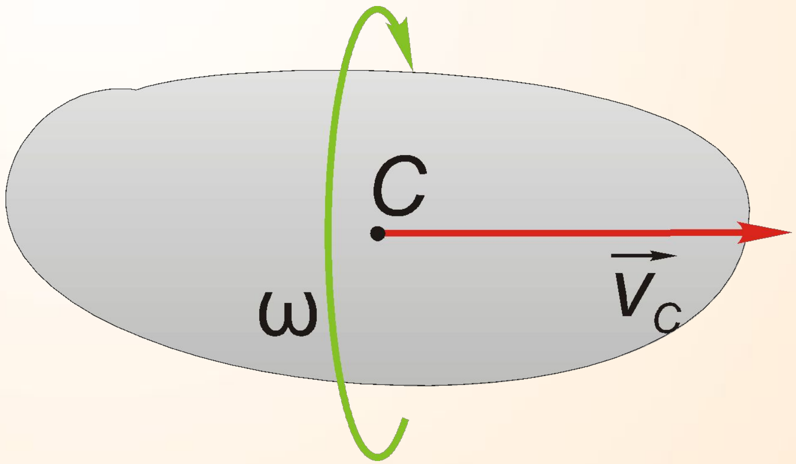
$$W_{\text{к}i} = \frac{m_i v_i^2}{2} \qquad W_{\text{к}} = \sum W_{\text{к}i}$$

$$v_i = r_i \cdot \omega$$

$$W_{\text{к}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$$

$$I_Z = \sum m_i r_i^2$$

$$\boxed{W_к = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}} \qquad (6.24)$$



$$W_к = \tilde{W}_к + \frac{mv_c^2}{2}$$

$$\tilde{W}_к = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}$$

$$\boxed{W_к = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2}} \qquad (6.25)$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r} d\varphi = M_Z d\varphi$$

$$M_Z = \frac{dL_Z}{dt} = I_Z \frac{d\omega}{dt}$$

$$dA = I_Z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I_Z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_Z \omega d\omega = I_Z d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I_Z \cdot \omega^2}{2}\right)$$

$$A_{1\to 2} = \frac{I_Z \cdot \omega_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{I_Z \cdot \omega_{\text{нач}}^2}{2} \qquad (6.26)$$

Задача 6.6

К ободу диска массой 5 кг приложена постоянная касательная сила 2 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через 5 секунд после начала действия силы?

<u>Дано:</u>

$m = 5$ кг

$F = 2$ Н

$t_0 = 5$ с

$W_к$ - ?

$$W_к = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \qquad \beta = \frac{\omega_к - \omega_н}{\Delta t} = \frac{\omega}{t_0} \qquad \omega = \beta t_0$$

$$M_z = FR = I_z\beta \qquad \beta = \frac{FR}{I_z} \qquad \omega = \frac{FRt_0}{I_z}$$

$$W_к = \frac{I_z F^2 R^2 t_0^2}{2I_z^2} = \frac{F^2 R^2 t_0^2}{2 \cdot \frac{1}{2} mR^2} = \frac{F^2 t_0^2}{m}$$

$$W_к = \frac{4\,Н^2 \cdot 25\,с^2}{5\,кг} = 20\frac{Н \cdot Н \cdot м}{кг\,\frac{м}{с^2}} = 20\,Н \cdot м = \underline{20\,Дж}$$

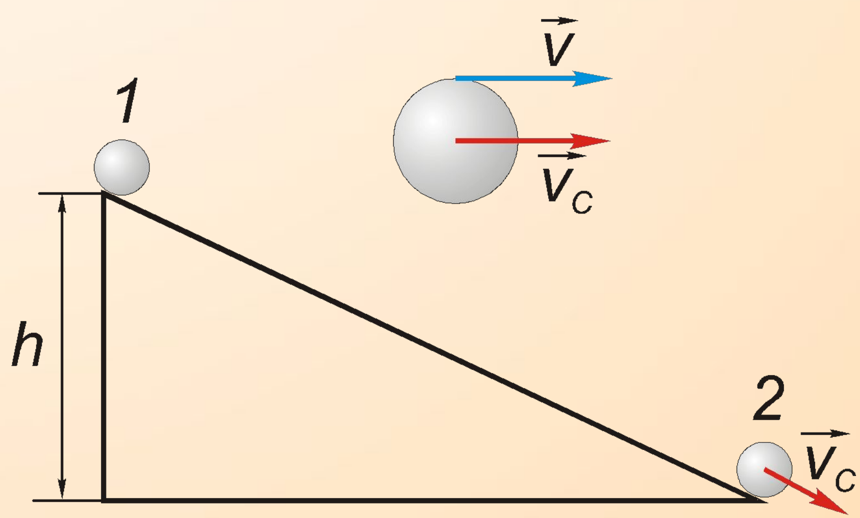
Задача 6.7

С наклонной плоскости скатывается без скольжения диск. Высота наклонной плоскости 5 м. Найти скорость центра тяжести диска у основания наклонной плоскости, если его начальная скорость равна нулю.

<u>Дано:</u>

h = 5 м

v_C - ?



$$W_{П1} = W_{К2}$$

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_Z \cdot \omega^2}{2}$$

$$\omega \cdot R = v = v_C$$

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR^2 \cdot v_C^2}{2R^2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3mv_C^2}{4}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{3}} = \underline{8{,}1 \text{м/с}}$$