



# Дискретная

ВЫПОЛНИЛ: ПОРЫВКИН А.Е.  
ПМ-18Д

# МАТЕМАТИКА

# Дискретная математика

- ▶ **Дискрётная матемáтика** — область математики, занимающаяся изучением дискретных структур, которые возникают как в пределах самой математики, так и в её приложениях.
- ▶ К числу таких структур могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, а также некоторые математические модели преобразователей информации, конечные автоматы, машины Тьюринга и так далее. Раздел дискретной математики, изучающий их, называется **конечной математикой**. Иногда само это понятие расширяют до дискретной математики. Помимо указанных конечных структур, дискретная математика изучает некоторые алгебраические системы, бесконечные графы, вычислительные схемы определённого вида, клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима иногда употребляется термин **«дискретный анализ»**

# История развития

- ▶ Возникновение дискретной математики относят к глубокой древности. С незапамятных времен известны комбинаторно-логические задачи, решение которых связано с перебором комбинаций дискретных объектов и логическим анализом возникающих вариантов. Когда число возникающих вариантов велико, а перебор сократить не удастся, решение задачи становится затруднительным.
- ▶ Такие задачи в общем виде по сию пору относятся к числу труднейших в математике. Дискретные системы с древнейших времен применяются в вычислительной практике.

# История развития

- ▶ Широко известны изобретенные в древности различные системы представления чисел, включая позиционную, и связанные с ними алгоритмы выполнения арифметических операций, решения уравнений и т.д. В древнем мире и средневековье (да и в совсем недалекие от нас времена) повсеместно были распространены дискретные вычислительные приспособления: абак, различные виды счетов.

# Темы в дискретной математике

- ▶ Теоретическая информатика
- ▶ Теоретическая информатика включает области дискретной математики, относящейся к вычислению. Это тянет в большой степени на теории графов и математической логике. Включенный в пределах теоретической информатики исследование алгоритмов для вычисления математических результатов. Исчисляемость изучает то, что может быть вычислено в принципе и имеет тесную связь с логикой, в то время как сложность изучает время, потраченное вычислениями. Теория автоматов и формальная языковая теория тесно связаны с исчисляемостью. Сети Petri и алгебра процесса привыкли к образцовым компьютерным системам, и методы от дискретной математики используются в анализе электронных схем VLSI. Вычислительная геометрия применяет алгоритмы к геометрическим проблемам, в то время как компьютерный анализ изображения применяет их к представлениям изображений. Теоретическая информатика также включает исследование различных непрерывных вычислительных тем.


▶

# Информационная теория

- ▶ Информационная теория включает определение количества информации. Тесно связанный кодирует теорию, которая используется, чтобы проектировать эффективную и надежную передачу данных и методы хранения. Информационная теория также включает непрерывные темы, такие как: аналоговые сигналы, кодирование аналога, аналоговое шифрование

# ЛОГИКА

- ▶ Логика - исследование принципов действительного рассуждения и вывода, а также последовательности, разумности и полноты. Например, в большинстве систем логики (но не в intuitionistic логике) закон Пирса  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  является теоремой. Для классической логики это может быть легко проверено с таблицей истинности. Исследование математического доказательства особенно важно в логике и имеет применения к автоматизированному доказательству теоремы и формальной проверке программного обеспечения.



Логические формулы - дискретные структуры, как доказательства, которые формируют конечные деревья или, более широко, направили нециклические структуры графа (с каждым шагом вывода), объединяющим одно или более отделений предпосылки, чтобы дать единственное заключение). Ценности правды логических формул обычно формируют конечное множество, обычно ограничиваемое двумя ценностями: *верный* и *ложный*, но логика может также быть с непрерывным знаком, например, нечеткая логика. Понятия, такие как бесконечные деревья доказательства или бесконечные деревья происхождения были также изучены, например, infinitary логика.



# Теория множеств

- ▶ Теория множеств - отрасль математики, которая изучает наборы, которые являются коллекциями объектов, такой как {синий, белый, красный} или (бесконечный) набор всех простых чисел. У частично заказанных наборов и наборов с другими отношениями есть применения в нескольких областях.
- ▶ В дискретной математике исчисляемые наборы (включая конечные множества) являются главным центром. Начало теории множеств как отрасли математики обычно отмечается работой Георга Кантора, различающей различные виды бесконечного набора, мотивированного исследованием тригонометрического ряда, и дальнейшее развитие теории бесконечных наборов выходит за рамки дискретной математики. Действительно, современная работа в описательной теории множеств делает широкое применение традиционной непрерывной математики.
- ▶

# Комбинаторика

- ▶ Комбинаторика изучает путь, которым дискретные структуры могут быть объединены или устроены.
- ▶ Исчисляющие концентраты комбинаторики при подсчете числа определенных комбинаторных объектов - например, *twelvefold* путь служат объединенной основой для подсчета перестановок, комбинаций и разделения.
- ▶ Аналитическая комбинаторика касается перечисления (т.е., определяя число) комбинаторных инструментов использования структур от сложного анализа и теории вероятности. В отличие от исчисляющей комбинаторики, которая использует явные комбинаторные формулы и производящие функции, чтобы описать результаты, аналитическая комбинаторика стремится получить асимптотические формулы.
- ▶ Теория дизайна - исследование комбинаторных проектов, которые являются коллекциями подмножеств с определенными свойствами пересечения.
- ▶ Теория разделения изучает различное перечисление и асимптотические проблемы, связанные с разделением целого числа, и тесно связана с  $q$ -рядом, специальными функциями и ортогональными полиномами. Первоначально часть теории чисел и анализа, теорию разделения теперь считают частью комбинаторики или независимой областью.
- ▶ Теория заказа - исследование частично заказанных наборов, и конечных и бесконечных.

# Теория графов

- ▶ Теорию графов, исследование графов и сетей, часто считают частью комбинаторики, но стала достаточно большой и достаточно отличной, с его собственным видом проблем, чтобы быть расцененной как предмет самостоятельно. Графы - один из главных объектов исследования в дискретной математике. Они среди самых повсеместных моделей и естественных и сделанных человеком структур. Они могут смоделировать много типов отношений и обработать динамику в физических, биологических и социальных системах. В информатике они могут представлять сети коммуникации, организации данных, вычислительных устройств, потока вычисления, и т.д. В математике они полезны в геометрии и определенных частях топологии, например, связывают теорию узлов. У алгебраической теории графов есть тесные связи с теорией группы. Есть также непрерывные графы, однако по большей части исследование в теории графов находится в пределах области дискретной математики.

▶

# Вероятность

- ▶ Дискретная теория вероятности имеет дело с событиями, которые происходят в исчисляемых типовых местах. Например, наблюдения количества, такие как числа птиц в скоплениях включают только ценности натурального числа  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . С другой стороны, непрерывные наблюдения, такие как веса птиц включают ценности действительного числа и как правило моделировались бы непрерывным распределением вероятности такой как нормальное. Дискретные распределения вероятности могут использоваться, чтобы приблизить непрерывные и наоборот. Для очень ограниченных ситуаций, таких как бросок игры в кости или экспериментов с палубами карт, вычисляя вероятность событий в основном исчисляющая комбинаторика.



# Теория чисел

- ▶ Теория чисел касается свойств чисел в целом, особенно целые числа. У этого есть применения к криптографии, криптоанализу и криптологии, особенно относительно модульной арифметики, диофантовых уравнений, линейных и квадратных соответствий, простых чисел и тестирования простоты чисел. Другие дискретные аспекты теории чисел включают геометрию чисел. В аналитической теории чисел также используются методы от непрерывной математики. Темы, которые идут вне дискретных объектов, включают трансцендентные числа, диофантовое приближение,  $p$ -adic области функции и анализ.

# Алгебра

- ▶ Алгеброические структуры происходят и как дискретные примеры и как непрерывные примеры. Дискретная алгебра включает: булева алгебра, используемая в логических воротах и программировании; относительная алгебра используется в базах данных; дискретные и конечные версии групп, колец и областей важны в алгебраической кодирующей теории; дискретные полугруппы и моноиды появляются в теории формальных языков.



# Исчисление конечных разностей, дискретное исчисление или дискретный анализ

- ▶ Функция, определенная на интервале целых чисел, обычно вызывается последовательность. Последовательность могла быть конечной последовательностью от источника данных или бесконечной последовательностью от дискретной динамической системы. Такая дискретная функция могла быть определена явно списком (если его область конечна), или формулой для его общего термина, или она могла быть дана неявно отношением повторения или разностным уравнением. Разностные уравнения подобны отличительные уравнения, но заменяют дифференцирование, беря различие между смежными терминами; они могут использоваться, чтобы приблизить отличительные уравнения или (чаще) изучаться самостоятельно. У многих вопросов и методов относительно отличительных уравнений есть копии для разностных уравнений. Например, то, где там являются неотъемлемой частью, преобразовывает в гармонический анализ для изучения непрерывных функций или аналоговых сигналов, есть дискретные преобразования для дискретных функций или цифровых сигналов. А также дискретная метрика там - более общие дискретные или конечные метрические пространства и конечные топологические места.

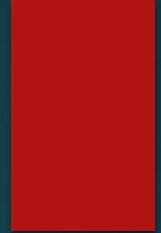
# Геометрия



- ▶ Дискретная геометрия и комбинаторная геометрия о комбинаторных свойствах *дискретных коллекций* геометрических объектов. Давняя тема в дискретной геометрии кроет черепицей самолета. Вычислительная геометрия применяет алгоритмы к геометрическим проблемам.



# Топология



- ▶ Хотя топология - область математики, которая формализует и обобщает интуитивное понятие «непрерывной деформации» объектов, это дает начало многим дискретным темам; это может быть приписано частично вниманию на топологические инварианты, которые сами обычно берут дискретные ценности.
- ▶ Посмотрите комбинаторную топологию, топологическую теорию графов, топологическую комбинаторику, вычислительную топологию, дискретное топологическое пространство, конечное топологическое пространство, топология (химия).



# Операционное ИССЛЕДОВАНИЕ

- ▶ Операционное исследование обеспечивает методы для решения практических проблем в бизнесе и других областях — проблемы, такие как распределение ресурсов, чтобы максимизировать прибыль или планирование деятельности по осуществлению проекта, чтобы минимизировать риск. Операционные методы исследования включают линейное программирование и другие области оптимизации, стоящей в очереди теории, намечая теорию, сетевую теорию. Операционное исследование также включает непрерывные темы, такие как непрерывно-разовый процесс Маркова, непрерывно-разовые мартингалы, оптимизация процесса и непрерывная и гибридная теория контроля.

▶

# Теория игр, теория решения, сервисная

## теория, социальная теория

- ▶ Теория решения касается идентификации ценностей, неуверенности и других проблем, релевантных в данном решении, его рациональности и получающемся оптимальном решении.
- ▶ Сервисная теория о мерах относительного экономического удовлетворения от, или желательность, потребление различных товаров и услуг.
- ▶ Социальная теория выбора о голосовании. Более основанный на загадке подход к голосованию - теория избирательного бюллетеня.
- ▶ Теория игр справляется с ситуациями, где успех зависит от выбора других, который делает выбор лучшего плана действий более сложным. Есть даже непрерывные игры, видят отличительную игру. Темы включают аукционную теорию и справедливое подразделение.

# Дискретизация



- ▶ Дискретизация касается процесса передачи непрерывных моделей и уравнений в дискретные копии, часто в целях сделать вычисления легче при помощи приближений. Числовой анализ обеспечивает важный пример.
- ▶

# Дискретные аналоги непрерывной математики

- ▶ Есть много понятий в непрерывной математике, у которых есть дискретные версии, такие как дискретное исчисление, дискретные распределения вероятности, дискретный Фурье преобразовывает, дискретная геометрия, дискретные логарифмы, дискретная отличительная геометрия, дискретное внешнее исчисление, дискретная теория Морзе, разностные уравнения, дискретные динамические системы и дискретные векторные меры.
- ▶ В прикладной математике дискретное моделирование - дискретный аналог непрерывного моделирования. В дискретном моделировании дискретные формулы пригодны к данным. Общепринятая методика в этой форме моделирования должна использовать отношение повторения.
- ▶ В алгебраической геометрии понятие кривой может быть расширено на дискретные конфигурации, беря спектры многочленных колец по конечным областям, чтобы быть моделями аффинных мест по той области и позволяя подвариантам, или спектры других колец обеспечивают кривые, которые лежат в том космосе. Хотя у пространства, в котором появляются кривые, есть конечное число очков, кривые не так множества точек как аналоги кривых в непрерывных параметрах настройки. Например, каждый пункт формы для области может быть изучен или как, пункт, или как спектр местного кольца в  $(x-c)$ , вопрос вместе с районом вокруг этого. У алгебраических вариантов также есть четко определенное понятие пространства тангенса, названного пространством тангенса Зариского, делая много особенностей исчисления применимыми даже в конечных параметрах настройки.

▶

# Гибридная дискретная и непрерывная математика

- ▶ Исчисление временных рамок - объединение теории разностных уравнений с тем из отличительных уравнений, у которого есть применения к областям, требующим одновременного моделирования дискретных и непрерывных данных. Другим способом смоделировать такую ситуацию является понятие гибридной динамической системы.

# ВЫВОД

- ▶ Сегодня дискретная математика является не только фундаментом математической кибернетики, но и важным звеном математического образования. Она является одной из основных дисциплин в программах вузов для специальностей, имеющих отношение к математике, кибернетике, вычислительной технике и многим другим областям современной науки и техники. Применение дискретной математики составляют основу современных компьютерных наук и информатики. Теперь для того, чтобы быть современным человеком, способным существовать в «компьютерном» мире, в котором придется искать лучшие решения и кратчайшие пути в лабиринте возможностей, выпускник вуза должен не только знать элементы дискретной математики, но и уметь думать на языке дискретных моделей. С вычислительной техникой практически связан любой человек XXI века: либо как создатель новых ЭВМ и их математического обеспечения, либо как разработчик алгоритмов и программ, либо как обычный пользователь стандартных пакетов на своем рабочем месте или в быту. Хорошее знание дискретной математики облегчит любому человеку освоение компьютера и применение его для решения практических задач.

# Основные свойства операций

Взаимнооднозначное соответствие			
Множества подмножеств	объединение	пересечение	дополнение
↕	↕	↕	↕
Множества двоичных векторов	Дизъюнкция	Конъюнкция	Инверсия
↕	↕	↕	↕
Множества переменных логических ф-ий	Дизъюнкция	Конъюнкция	Инверсия



Операции над множествами	Операции над переменными Логических ф-ий

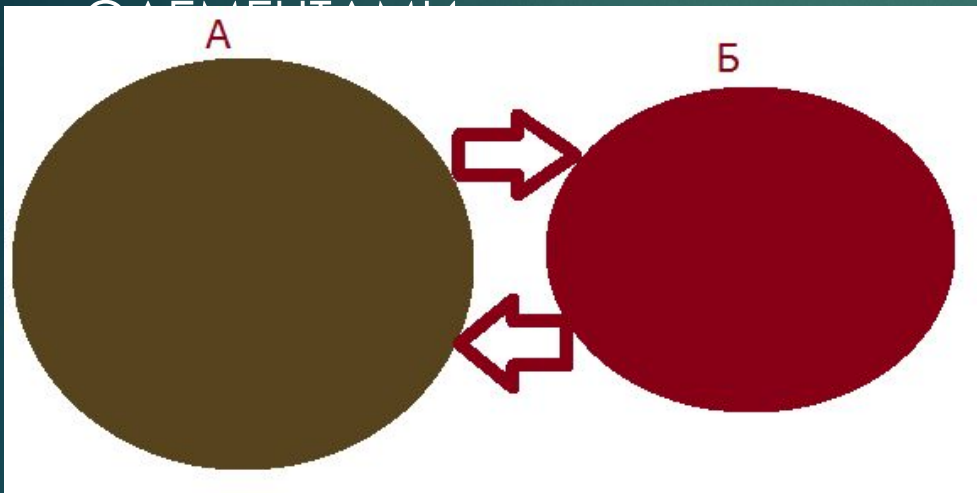
	<pre>x + 0 = x; x &amp; 0 = 0;</pre>
	<pre>x + 1 = 1; x &amp; 1 = x;</pre>

# Контрольная работа № 2

1. ВЫУЧИТЬ НАИЗУСТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ (ЗАДАНИЕ НА ЭКЗАМЕНЕ)
2. ДОКАЗАТЬ, ДИСТРИБУТИВНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
3. ИСПОЛЬЗОВАТЬ МНОЖЕСТВА, ЗАДААННЫЕ В КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1.

# Relation(Отношение) - R

-R – ЭТО МНОЖЕСТВО ОБОЗНАЧАЕТ ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ



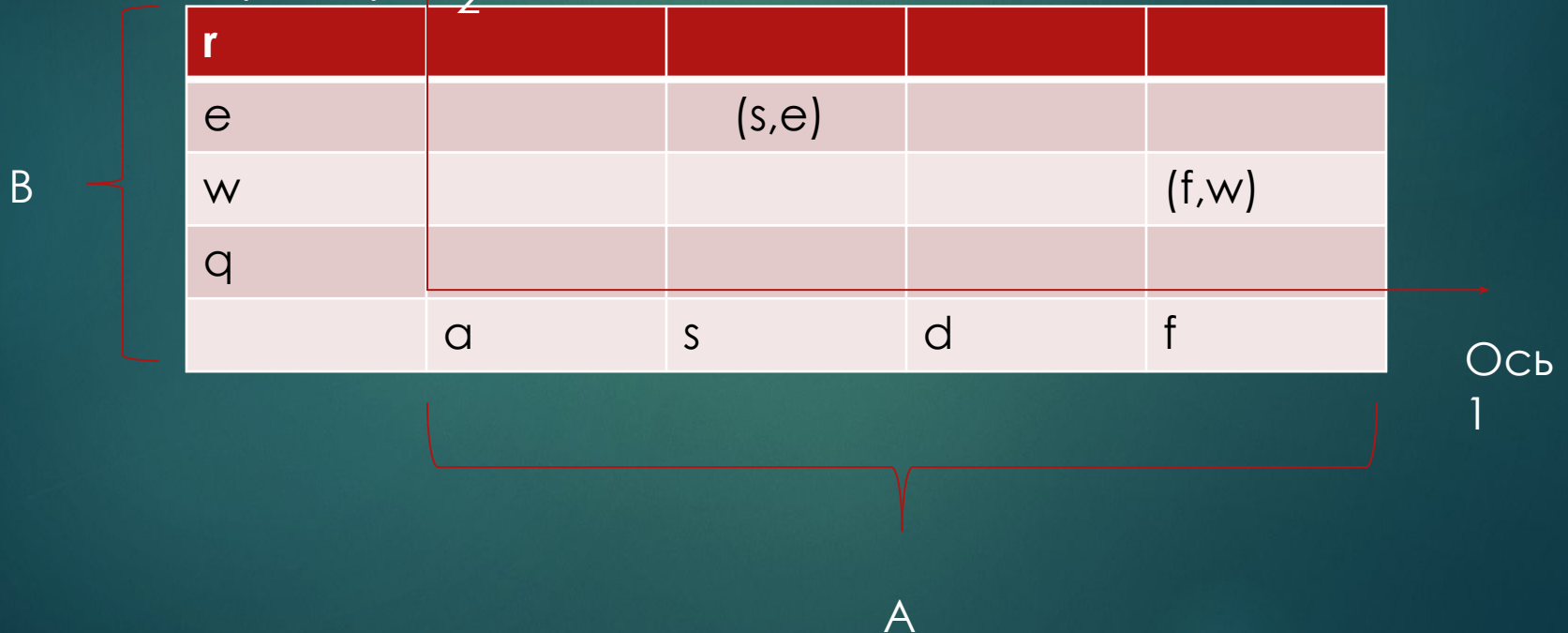
$aRb$  (R может обозначать:  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$ , делится, произведение, сумма и т. д.);



# AxВ-прямое произведение МНОЖЕСТВ

$A=\{a,s,d,f\}$ -располагается на оси абцисс  
(ось 1)

$B=\{q,w,e,r\}$ -располагается на оси  
ординат (ось 2)

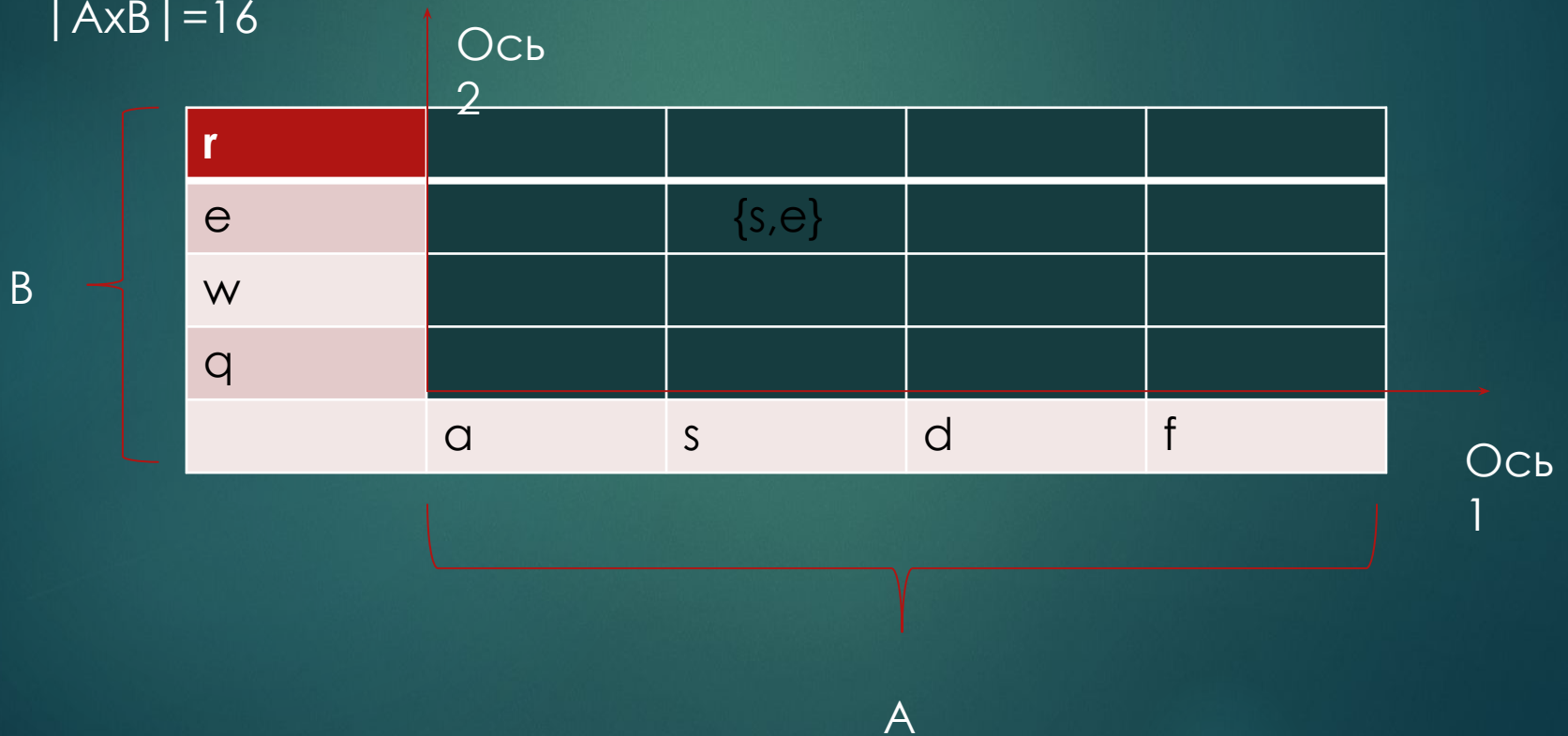




# AxB-прямое произведение МНОЖЕСТВ

$A \times B = \{ \{a,q\}, \{a,w\}, \{a,e\}, \{a,r\}, \{s,q\}, \{s,w\}, \{s,e\}, \{s,r\}, \{d,q\}, \{d,w\}, \{d,e\}, \{d,r\}, \{f,q\}, \{f,w\}, \{f,e\}, \{f,r\} \}$

$|A \times B| = 16$



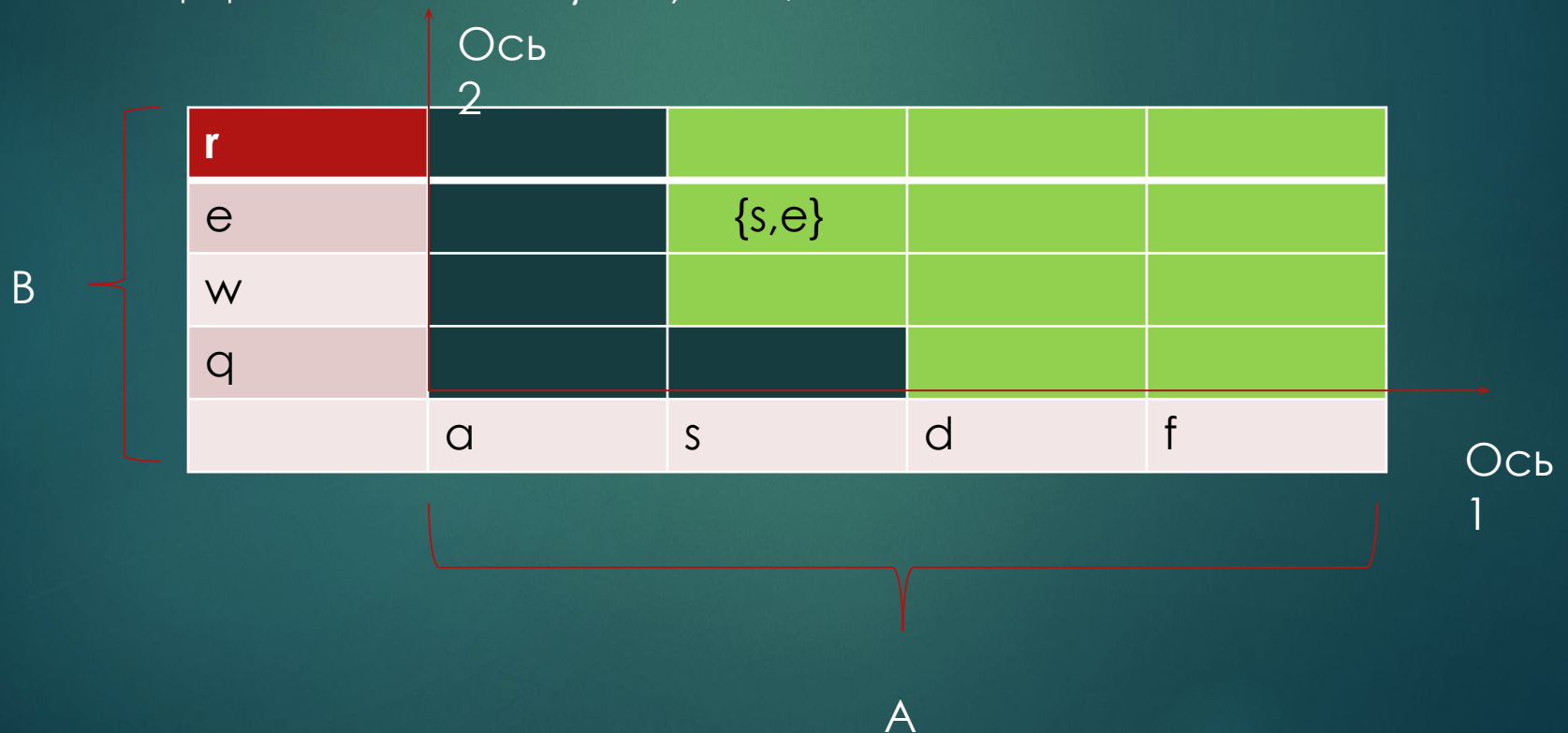
# Бинарное отношение

$R = \{ \{s,w\}, \{s,e\}, \{s,r\}, \{d,q\}, \{d,w\}, \{d,e\}, \{d,r\}, \{f,q\}, \{f,w\}, \{f,e\}, \{f,r\} \}$

$|A \times B| = 16$

Если  $|R| = |A \times B|$  - отношение полное

Если  $|R| = 0$  - отношение пустое, есть  $\emptyset$

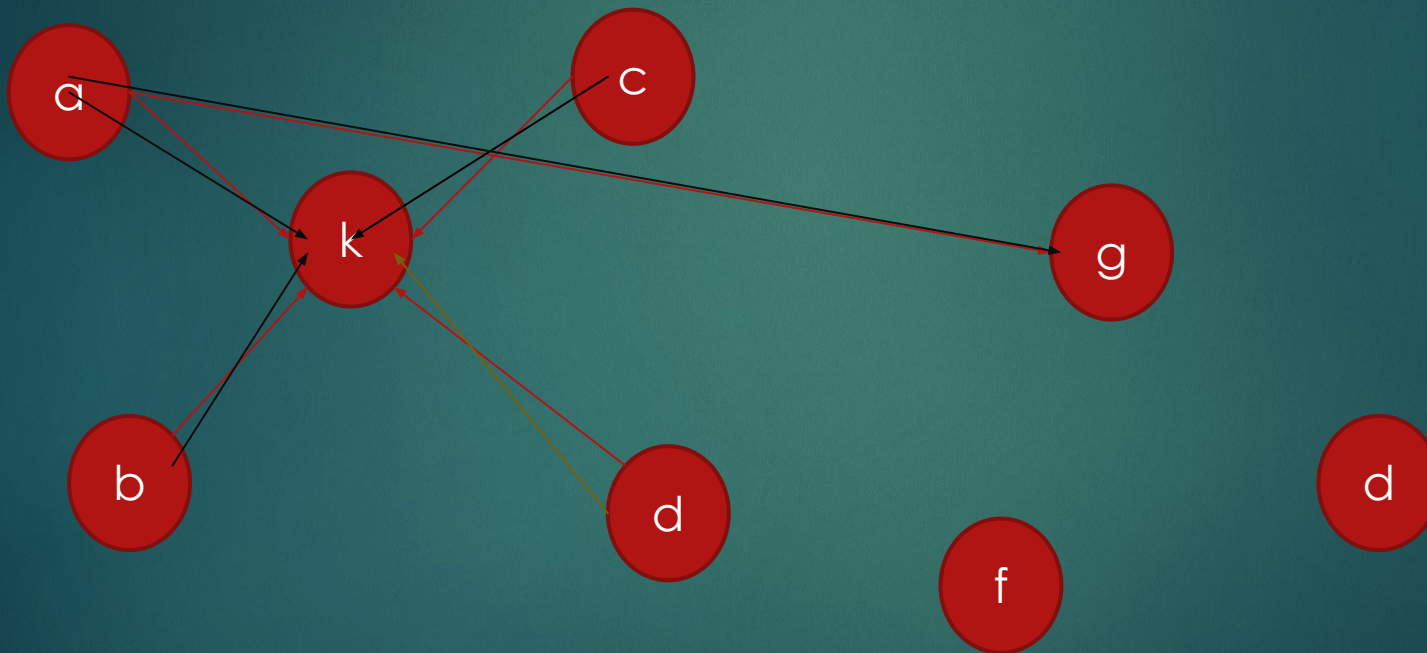


$|R| = 5; R = \{(a,k), (b,k), (c,k), (d,k), (a,g)\}$

Отношение  $R$  является Бинарным, т.к его элементами являются вектора длины 2.

Это отношение задано перечислением элементов.

Зададим это отношение графически (граф)





Бинарное отношение  $R$  можно задать так-же таблицей (Матрицей)  
множество из оси 1 располагается Вертикально  
множество из оси 2 располагается Горизонтально

<b>R</b>	<b>d</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>k</b>
a	0	0	1	1
b	0	0	0	1
c	0	0	0	1
d	0	0	0	1

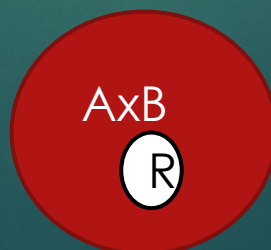
1 - есть элемент

0 – элемент отсутствует

Расположение  $R$  на прямом произведении множеств ( Универсуме ) обозначается через Включение  $\subseteq$

$R \subseteq A \times B$

Включение показывает два варианта:



1 - есть элемент

0 – элемент отсутствует

Расположение  $R$  на прямом произведении множеств (

Универсуме ) обозначается через Включение  $\subseteq$

$R \subseteq A \times B$

Включение показывает два варианта:

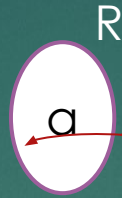


Если Строгое включение  $R \subset A \times B$  – то выполняется один вариант

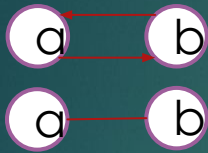


# ОТНОШЕНИЙ

1. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ. ЭЛЕМЕНТ ИМЕЕТ ОТНОШЕНИЕ R САМ К СЕБЕ:  $aRa$



2. СИММЕТРИЧНОСТЬ. ЕСЛИ  $aRb$ , ТО  $bRa$



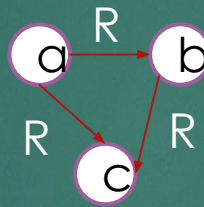
3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ. ЕСЛИ  $aRb$  И  $bRc$ , ТО  $aRc$

ПРИМЕР: ( ИЗ АРИФМЕТИКИ )  $a+b=c$ .

ЕСЛИ  $a/d$  И  $b/d$  — ТО  $c/d$

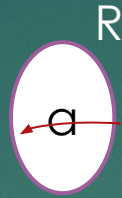
ПРИМЕР СИММЕТРИЧНОСТИ И РЕФЛЕКСИВНОСТИ:

$R \in A \times A$ , ГДЕ  $A$  — ЭТО МНОЖЕСТВО НУЛЕЙ.  $R$  — ОБЩЕНИЕ В СОЦ. СЕТИ.  $R \in K$

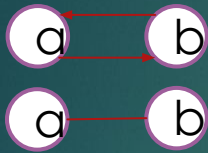


# ОТНОШЕНИЙ

1. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ. ЭЛЕМЕНТ ИМЕЕТ ОТНОШЕНИЕ R САМ К СЕБЕ:  $aRa$



2. СИММЕТРИЧНОСТЬ. ЕСЛИ  $aRb$ , ТО  $bRa$



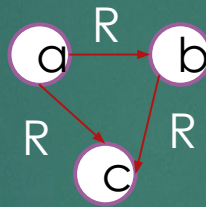
3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ. ЕСЛИ  $aRb$  И  $bRc$ , ТО  $aRc$

ПРИМЕР: ( ИЗ АРИФМЕТИКИ )  $a+b=c$ .

ЕСЛИ  $a/d$  И  $b/d$  — ТО  $c/d$

ПРИМЕР СИММЕТРИЧНОСТИ И РЕФЛЕКСИВНОСТИ:

$R \in A \times A$ , ГДЕ  $A$  — ЭТО МНОЖЕСТВО НУЛЕЙ.  $R$  — ОБЩЕНИЕ В СОЦ. СЕТИ.  $R \in K$



Пример симметричности и рефлексивности:

$R \subseteq A \times A$ , где  $A$  – это множество нулей; R-Общение в соц.сети ВК

## ПРЕДСТАВИМ ДАННЫЕ ОТНОШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ

R	a1	a2	a3	...	...	an
a1	1					
a2		1	1			
a3		1	1			
...				1		
...					1	
an						1

В данной матрице по диагонали будут располагаться 1  
Также матрица будет симметрична относительно данной диагонали

Отношения  $R$  также могут располагаться на многомерным пространствах.

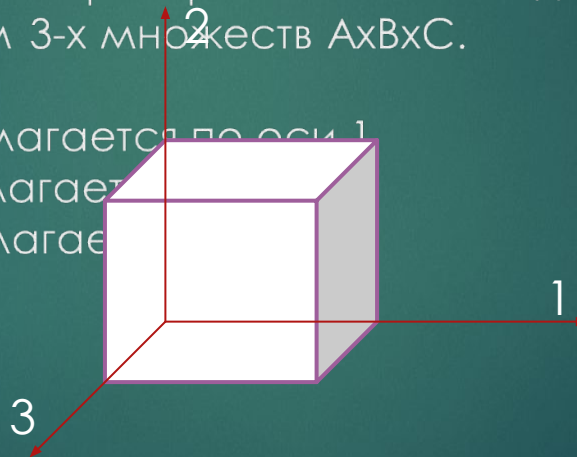
Рассмотрим трёхмерное пространство. Оно задаётся прямым произведением 3-х множеств  $A \times B \times C$ .

Допустим  $|A|=|B|=|C|=5$

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  располагается по оси 1

$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$  располагается по оси 2

$C=\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$  располагается по оси 3



$$|A \times B \times C| = 125$$

Допустим  $|R| = 6; R \subseteq A \times B \times C$

$R = \{(a_1, b_2, c_1), (a_2, b_3, c_5), (a_3, b_4, c_2), (a_4, b_1, c_3), (a_5, b_5, c_4), (a_2, b_1, c_5)\}$

Операции над отношениями

Дано:

$$R_1 \subseteq A \times B$$

$$R_2 \subseteq A \times B$$

$$|A| = |B| = 7$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$$

$$|R_1| = 12$$

$$|R_2| = 10$$

Выполнить  $R_1 \cap R_2$

# Пересечени

R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R2	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	0	0	0	0	0
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	0	0	0	1	0
a4	1	0	0	1	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	1	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	0	0	0	0	0
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	0	0	0	1	0
a4	0	0	0	0	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

Реальные данные имеют большой объём  
Например  $|R_1|=1000000$ ; поэтому операции  
необходимо выполнять в автоматическом режиме  
Используя вычислительные мощности компьютера.  
Уходим в Excel



# Объединение

R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R2	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	0	0	0	0	0
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	0	0	0	1	0
a4	1	0	0	1	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	1	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	1	0	0	1	0
a4	1	1	0	1	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	1	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

Реальные данные имеют большой объём  
Например  $|R_1|=1000000$ ; поэтому операции  
необходимо выполнять в автоматическом режиме  
Используя вычислительные мощности компьютера.  
Уходим в Excel

# Дополнение

R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R2	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	0	0	0	0	0
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	0	0	0	1	0
a4	1	0	0	1	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	1	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	0	1	0	1	0	1	0
a2	1	1	1	1	0	1	1
a3	1	1	0	1	1	0	1
a4	1	0	1	1	1	1	1
A5	1	1	0	1	1	1	0
a6	0	1	1	1	0	1	1
a7	1	1	1	1	1	0	1

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	0	1	1	1	1	1	1
a2	1	0	1	0	1	0	1
a3	0	1	1	1	1	0	1
a4	0	1	1	0	1	1	1
a5	1	1	1	1	1	1	1
a6	1	1	0	1	0	1	1
a7	1	1	1	1	1	1	1

Реальные данные имеют большой объём

Например

$|R_1|=1000000$ ; поэтому операции необходимо выполнять в автоматическом режиме  
Используя вычислительные мощности компьютера.

Уходим в Excel

# Разность

ь

R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R2	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	0	0	0	0	0
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	0	0	0	1	0
a4	1	0	0	1	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	1	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

R1\R2	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	0	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	0	0
a4	0	0	0	0	0	0	0
A5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	0	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R2\R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	0	0	0	0	0	0	0
a2	0	1	0	1	0	1	0
a3	1	0	0	0	0	0	0
a4	1	0	0	1	0	0	0
a5	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	1	0	0	0	0
a7	0	0	0	0	0	0	0

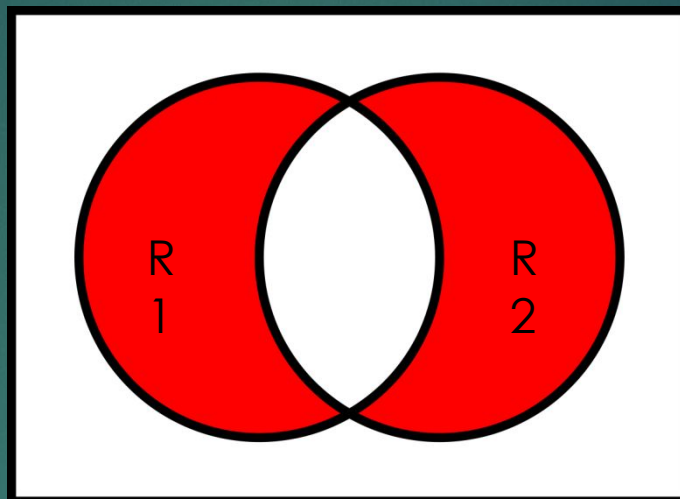
Реальные данные имеют большой объём

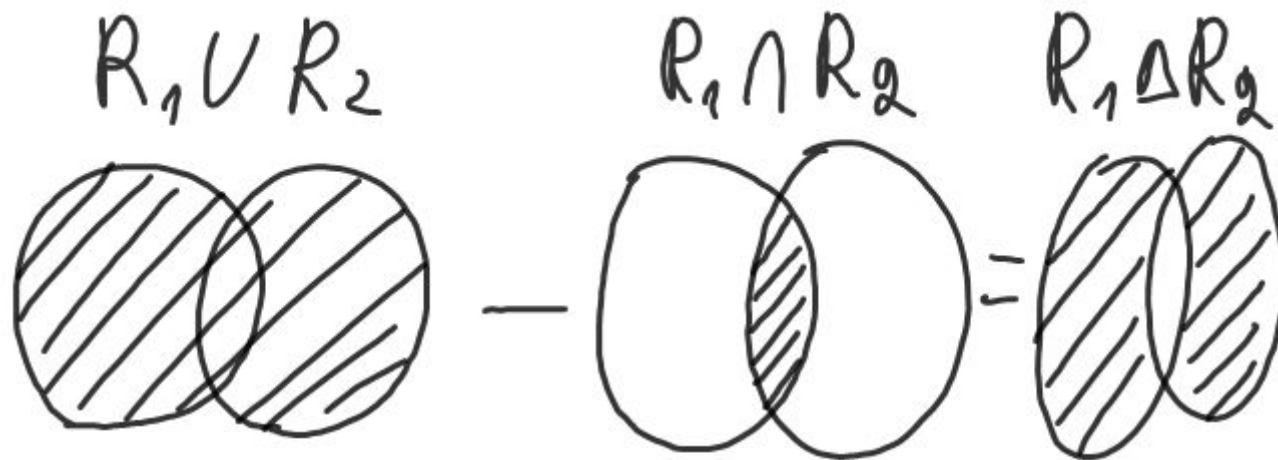
Например

$|R_1|=1000000$ ; поэтому операции необходимо выполнять в автоматическом режиме  
Используя вычислительные мощности компьютера.

Уходим в Excel

Симметрическая разность





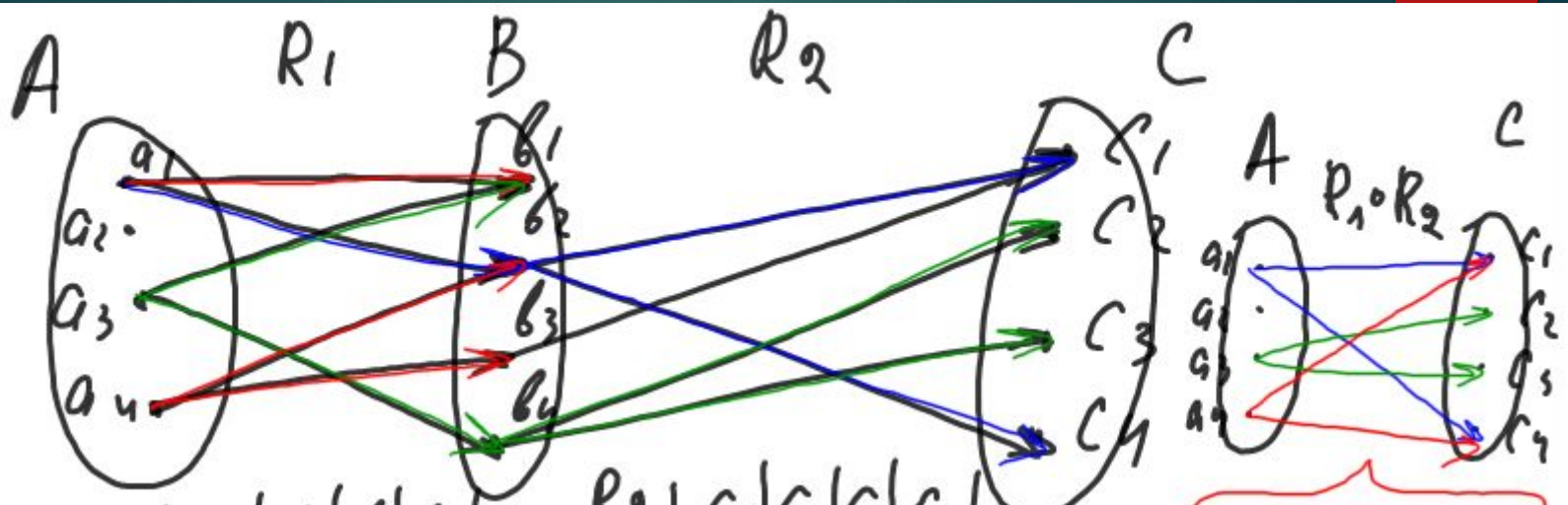
$$|R_1 \cup R_2| - |R_1 \cap R_2| = |R_1 \Delta R_2|$$

## Композиция отношений

ПОЗВОЛЯЕТ ВЫПОЛНИТЬ ПЕРЕХОД ИЗ ОДНОГО УНИВЕРСУМА В ДРУГОЙ

ДЛЯ ЭТОГО ПЕРЕХОДА НЕОБХОДИМО ИМЕТЬ ОБЩЕЕ МНОЖЕСТВО В ДВУХ УНИВЕРСУМАХ ( СТУПЕНЬ ПЕРЕХОДА )



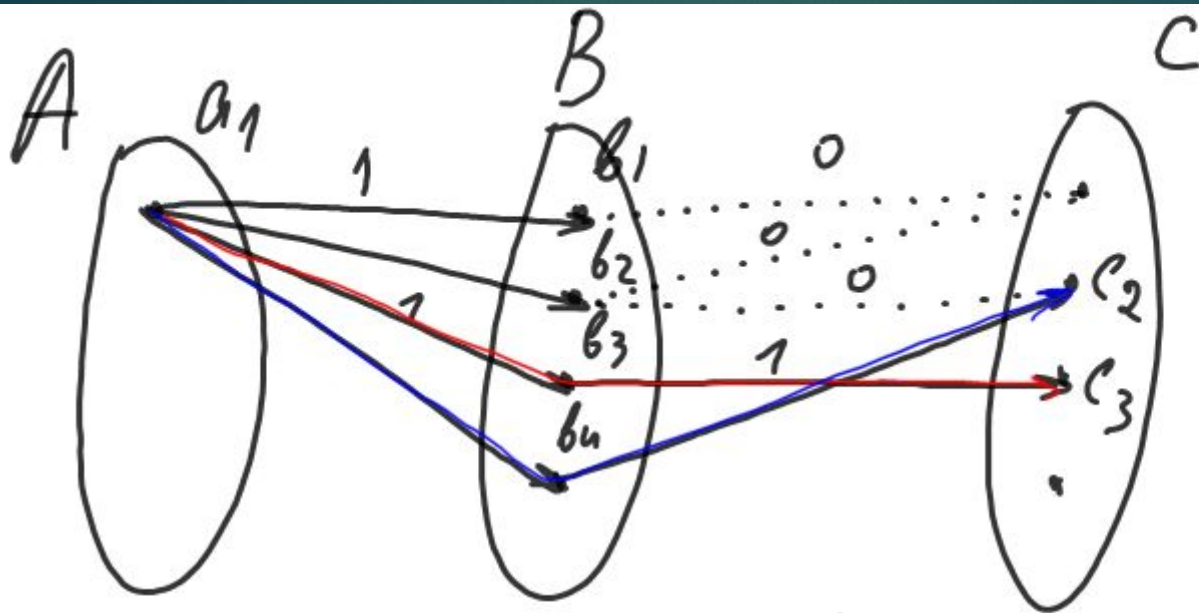


$R_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	1	1	0	0
$a_2$	0	0	0	0
$a_3$	1	0	0	1
$a_4$	0	1	1	0

$R_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$b_1$	0	0	0	0
$b_2$	1	0	0	1
$b_3$	1	0	0	0
$b_4$	0	1	1	0

Результат комп.

$R_1 \circ R_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$a_1$	1	0	0	1
$a_2$	0	0	0	0
$a_3$	0	1	1	0
$a_4$	1	0	0	1

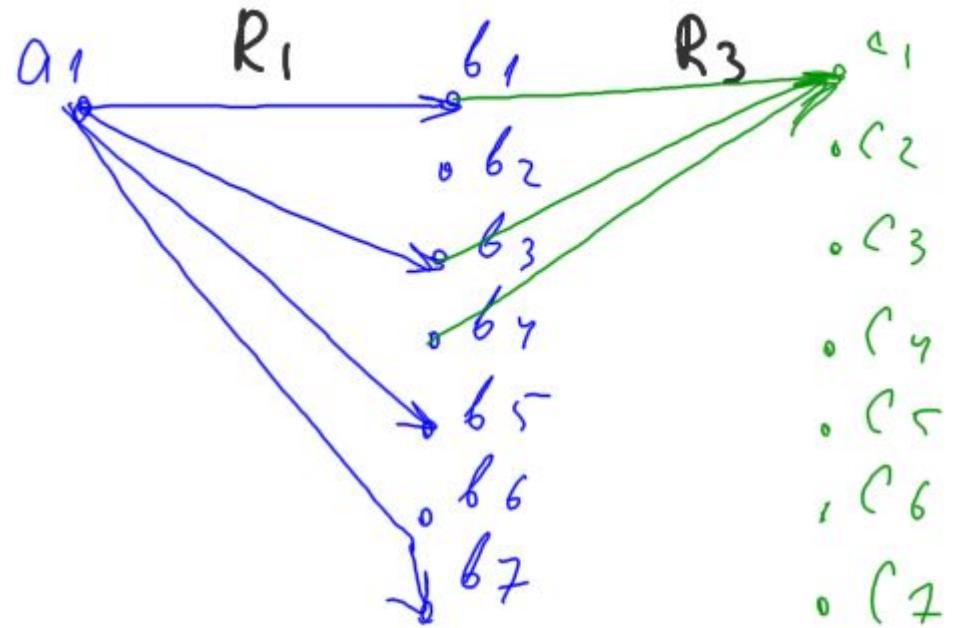


когда пара  $(1; 0)$  по результату  $= 0$  (пути нет)  
 са-мо в пере неох. выбрать  $\min$   
 $\min(1; 1) = 1$ , т.о. в ф-ле неох. взять  
 $\max$  из минимально  $\max(\min(\text{всех возм. пар}))$



R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R3	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
b1	1	0	0	0	0	0	0
b2	0	1	0	1	0	1	0
b3	1	0	0	0	0	1	0
b4	1	0	0	1	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	1	0	1	0	0
b7	0	0	0	0	0	0	0



$$R_1 \circ R_3 = \max(\min(a_1, c_1), \min(a_1, c_2))$$

R1	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	0	1	0	1	0	1
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	1	0	0	1	0
a4	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	1
a6	1	0	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	1	0

R3	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
b1	1	0	0	0	0	0	0
b2	0	1	0	1	0	1	0
b3	1	0	0	0	0	1	0
b4	1	0	0	1	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	1	0	1	0	0
b7	0	0	0	0	0	0	0

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
a1	1	0	0	0	0	1	0
a2	0	0	0	0	0	0	0
a3	1	0	1	0	1	1	0
a4	0	1	0	1	0	1	0
a5	1	0	0	0	0	0	0
a6	1	0	0	0	0	0	0
a7	0	0	1	0	1	0	0

$$|K1| \geq 150$$

$$|R2| \geq 160$$

$$|R3| \geq 170$$

Выполнить операции:

- 1) Пересечение
  - 2) Объединение
  - 3) Разность
  - 4) Симметрическая разность
  - 5) Композиция
- Работа выполняется в Excel

Операции над множествами	Операции над переменными Логических ф-ий

# Операции над переменными логических

Операция	Отрицание операции
Const 0	Const 1
Конъюнкция $xу; x*y; x \wedge y; x\&y;$ МИН( $x;y$ ) (Логическое умножение )	
Дизъюнкция $x+y; x \vee y ;$ МАКС( $x,y$ ) (Логическое сложение)	
Равнозначность, эквивалентность, тождественно равно $x \sim y; x \approx y$	
Импликация $x \rightarrow y$	
Обратная импликация $x \leftarrow y$	
Переменная $x$	
Переменная $y$	

Булевый базис (3 операции: К, Д, И)

Любую операцию в булевом базисе.

# Операции над переменными логических функций

xy	Co nst 0	x* y		x+ y								x		y		co nst 1
00	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
01	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
10	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Отрицание-унарная операция

Все остальные- бинарные

Все операции, кроме констант, можем представить через булевы операции

(конъюнкция, дизъюнкция, отрицание)

# Таблицы истинности , через булео базис

<b>xy</b>	<b><math>x \rightarrow y</math></b>	
00	1	1
01	1	1
10	0	0
11	1	1

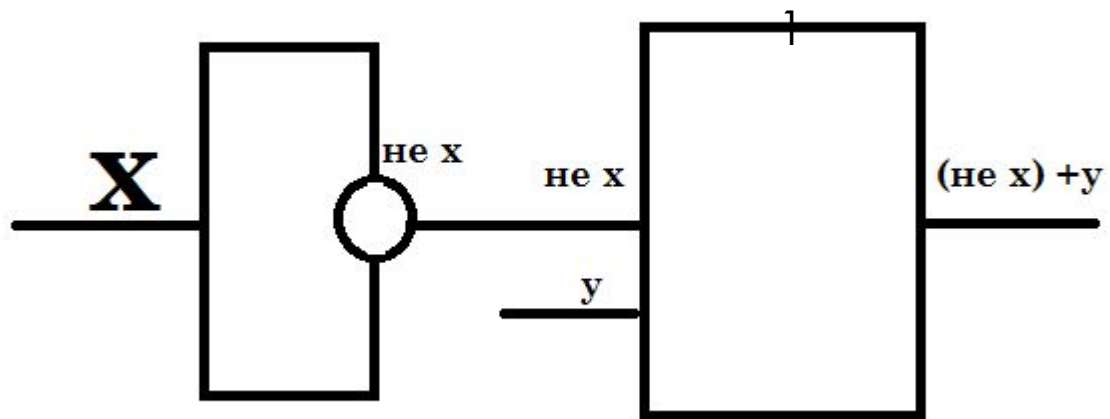
$$x \rightarrow y = \bar{x} + y$$

Результат через логические переменные.

Таким образом, мы выразили операцию импликации через булевы операции

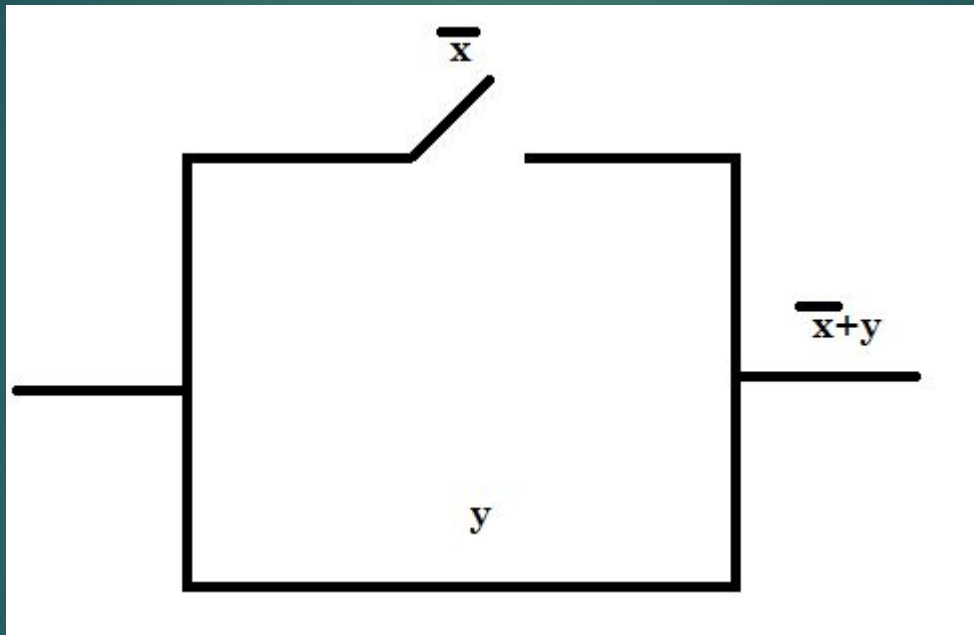


ДИЗЪЮНКЦИ



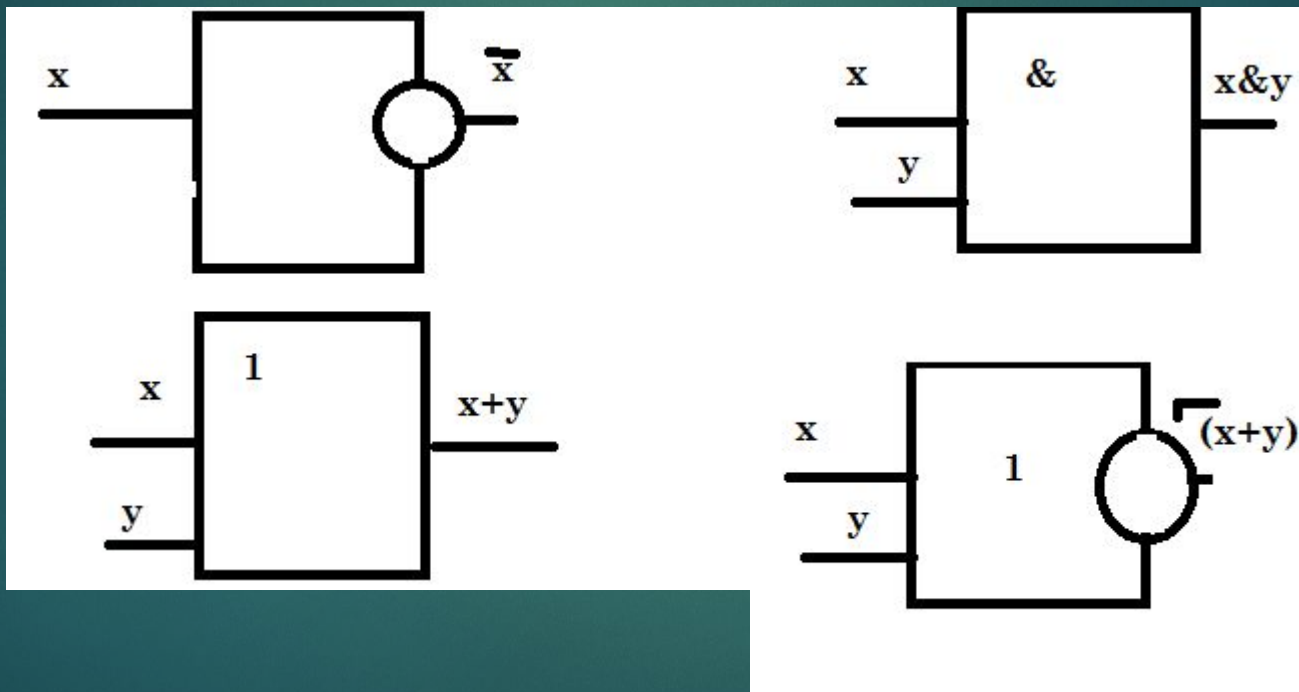


Получим данный результат через  
РКС (релейно-контактную схему)




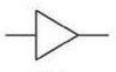



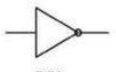



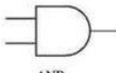



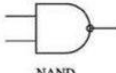




- ▶ Булевый базис реализуется
- ▶ Логические элементы:

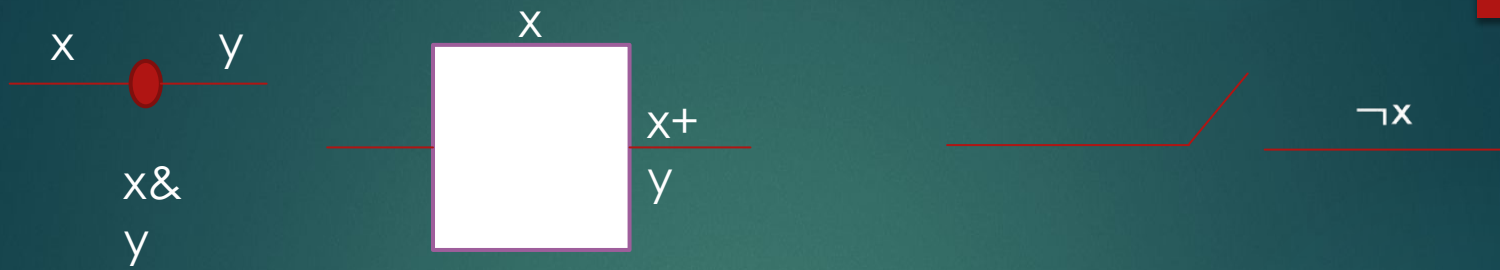


# Логические элементы в Цифровых вычислительных системах

Условные обозначения логических элементов в  
схемах

ГОСТ	ANSI	ГОСТ	ANSI
 Буфер BUF	 BUF	 ИЛИ OR	 OR
 Инвертор INV	 INV	 ИЛИ-НЕ NOR	 NOR
 И AND	 AND	 Исключающее ИЛИ XOR	 XOR
 И-НЕ NAND	 NAND	 Исключающее ИЛИ-НЕ XNOR	 XNOR

# Булевый базис реализуемый с помощью РКС



Построим таблицу истинности для операции сложение по модулю 2. Получим данный результат через булевый базис

<b>x y</b>		<b>?</b>
0 0	0	0
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	0	0

<b>x y</b>		
0 0	1	0
0 1	1	1
1 0	0	0
1 1	0	0

Следовательно  $\neg x \& y \neq x \oplus y$

$x y$		
00	0	0
01	1	1
10	1	1
11	0	0

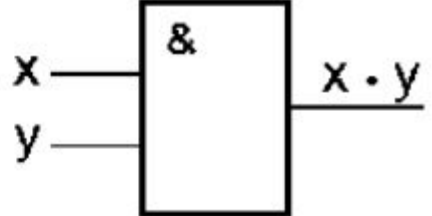
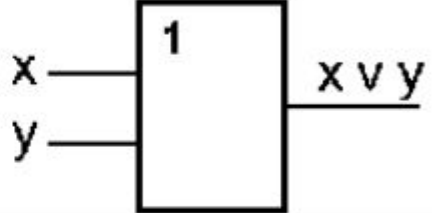
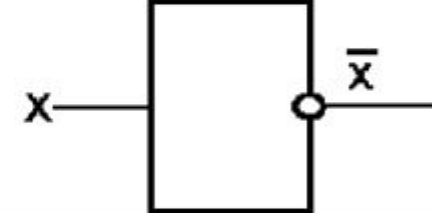
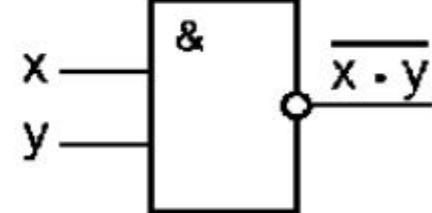
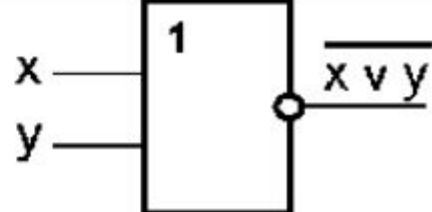
$x y$	$x \& y$		$x + y$	
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
10	0	1	1	1
11	1	0	1	0

$$f(x,y) = \neg(x \& y) \& (x + y)$$

Решим через Логические элементы

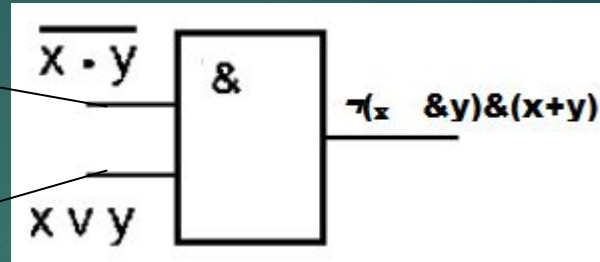
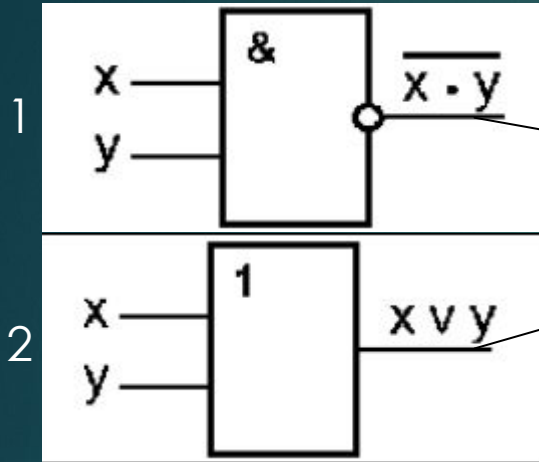
Домашнее  
задание



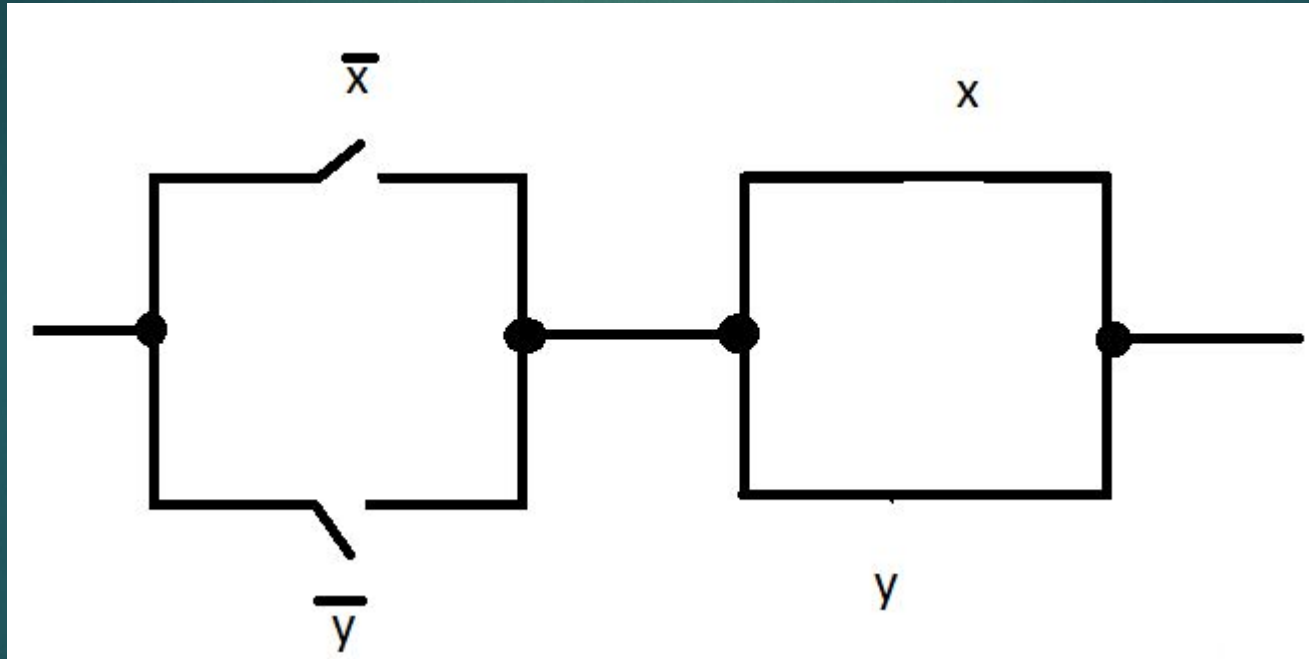
<p><i>Схема И</i> – конъюнкция логических значений.  Единица на выходе схемы И будет только в том случае, когда на всех входах будут единицы.</p>	
<p><i>Схема ИЛИ</i> – дизъюнкция логических значений.  Единица на выходе системы ИЛИ будет в том случае, когда хотя бы на одном ее входе будет единица.</p>	
<p><i>Схема НЕ</i> (инвертор) – операция отрицания.  Единица на выходе системы будет в случае, когда на входе ноль и наоборот.</p>	
<p><i>Схема И-НЕ</i> – отрицание результата схемы И.</p>	
<p><i>Схема ИЛИ-НЕ</i> – отрицание результата схемы ИЛИ.</p>	



$$f(x,y) = \neg(x \& y) \& (x + y)$$



$$f(x,y) = \neg(x \& y) \& (x + y)$$



$$\neg(x \& y) \& (x + y) = x \oplus y$$

•  $\neg(x \& y) \& (x + y) \neq x \sim y$

• Как знак не = превратить в =?

• Необходимо выполнить отрицание

• 1)  $\neg(x \& y) = \neg x + \neg y$

• 2)  $(\neg x + \neg y) \& (x + y) \neq x \sim y$

• 3)  $\neg((\neg x + \neg y) \& (x + y)) = \neg(\neg x + \neg y) + \neg(x + y) =$

•  $(\neg\neg x \& \neg\neg y) \& (\neg x \& \neg y) = (x \& y) \& (\neg x \& \neg y)$




→  $(x \& y) \& (\neg x \& \neg y) = x \sim y$

- Не верю. Доказательство (Таблица истинности )

<b>xy</b>	<b>x~y</b>	<b>Мин(x,y)</b>				
00	1	0	1	1	1	1
01	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	1	0	0
11	1	1	0	0	0	1

- **СОВПАДЕНИЕ**



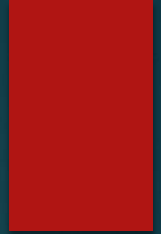
Решим логическую  
функцию для 3-х  
переменных,  
представленной формулой  
с помощью таблицы  
истинности +

Решим логическую функцию для 3-х переменных,  
представленной формулой с помощью таблицы истинности

$$F(x,y,z) = ((x+y) \rightarrow z) \oplus ((z \leftarrow (x \sim y)) \downarrow \bar{z})$$

x y z	x+y						
0 0 0	0	1	1	0	1	0	1
0 0 1	0	1	1	1	0	0	1
0 1 0	1	0	0	1	1	0	0
0 1 1	1	1	0	1	0	0	1
1 0 0	1	0	0	1	1	0	0
1 0 1	1	1	0	1	0	0	1
1 1 0	1	0	1	0	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1	0	0	1

Д/з. Лог. Формулу с  
ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ  
ИСТИННОСТИ .



## Домашнее задание

0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Таблицы

ИСТИННОСТИ ДЛЯ  
 $f(f,r,o,g)=$

0 – ПЕРЕМЕННАЯ;

- ОПЕРАЦИЯ

СОЗДАТЬ ФОРМУЛУ, ВСТАВИТЬ В ТАБЛИЦУ ПЕРЕМЕННЫЕ И ОПЕРАЦИИ. ОПЕРАЦИИ НЕ ДОЛЖНЫ ПОВТОРЯТЬСЯ. РЕШИТЬ ФОРМУЛУ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ. К ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРИМЕНИТЬ –

СКОБКИ РАССТАВИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.





► frog.

- $((f \& r) \oplus \neg o) + ((f \sim r) \rightarrow \neg g)) \downarrow o$

$$(((f \& r) \oplus \neg o) + ((f \sim r) \rightarrow \neg g))) \downarrow o$$

frog	f&r			(f~r)				
0000	0	1	0	1	1	1	1	0
0011	0	0	1	1	0	0	1	1
0101	0	1	0	0	0	1	1	0
0100	0	1	0	0	1	1	1	0
0001	0	1	0	1	0	0	0	0
0010	0	0	1	1	1	1	1	1
0111	0	0	1	0	0	0	1	1
0110	0	0	1	0	1	1	1	1
1010	0	0	1	0	1	1	1	1
1001	0	1	0	0	0	1	1	0
1000	0	1	0	0	1	1	1	0
1011	0	0	1	0	0	1	1	1
1111	1	0	0	1	0	0	0	0
1101	1	1	1	1	0	0	1	0

# СЛНФ (Сопоставления)

frog	f&r			(f~r)				
0000	0	1	0	1	1	1	1	0
0011	0	0	1	1	0	0	1	1
0101	0	1	0	0	0	1	1	0
0100	0	1	0	0	1	1	1	0
0001	0	1	0	1	0	0	0	0
0010	0	0	1	1	1	1	1	1
0111	0	0	1	0	0	0	1	1
0110	0	0	1	0	1	1	1	1
1010	0	0	1	0	1	1	1	1
1001	0	1	0	0	0	1	1	0
1000	0	1	0	0	1	1	1	0
1011	0	0	1	0	0	1	1	1

# СДНФ (Совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

- ▶ С помощью СДНФ мы можем представить результат полученный в таблице истинности.
- ▶ Берутся только те наборы переменных,
- ▶ На которых результат один.
- ▶ Итого имеем 7 наборов,
- ▶ Значит, в СДНФ будет 7
- ▶ конъюнкций, соединённых
- ▶ Дизъюнкцией.



- $1_n = f \& r \& \bar{o} \& \bar{g} = f \wedge r \wedge \bar{o} \wedge \bar{g}$  ... и т. д.; Переменная имеет значение ноль -> берём отрицание.
- $2_n = \bar{f} \& \bar{r} \& o \& \bar{g}$
- Если 1 то отрицание не берем.

$$\overline{f}r\overline{o}g + \overline{f}r\overline{o}g + \overline{f}r\overline{o}g + \overline{f}r\overline{o}g + \overline{f}r\overline{o}g$$

frog	f&r			(f~r)				
0000	0	1	0	1	1	1	1	0
0011	0	0	1	1	0	0	1	1
0101	0	1	0	0	0	1	1	0
0100	0	1	0	0	1	1	1	0
0001	0	1	0	1	0	0	0	0
0010	0	0	1	1	1	1	1	1
0111	0	0	1	0	0	0	1	1
0110	0	0	1	0	1	1	1	1
1010	0	0	1	0	1	1	1	1
1001	0	1	0	0	0	1	1	0
1000	0	1	0	0	1	1	1	0
1011	0	0	1	0	0	1	1	1

# Таблица истинности в

клетке Келле

ку \ ех	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

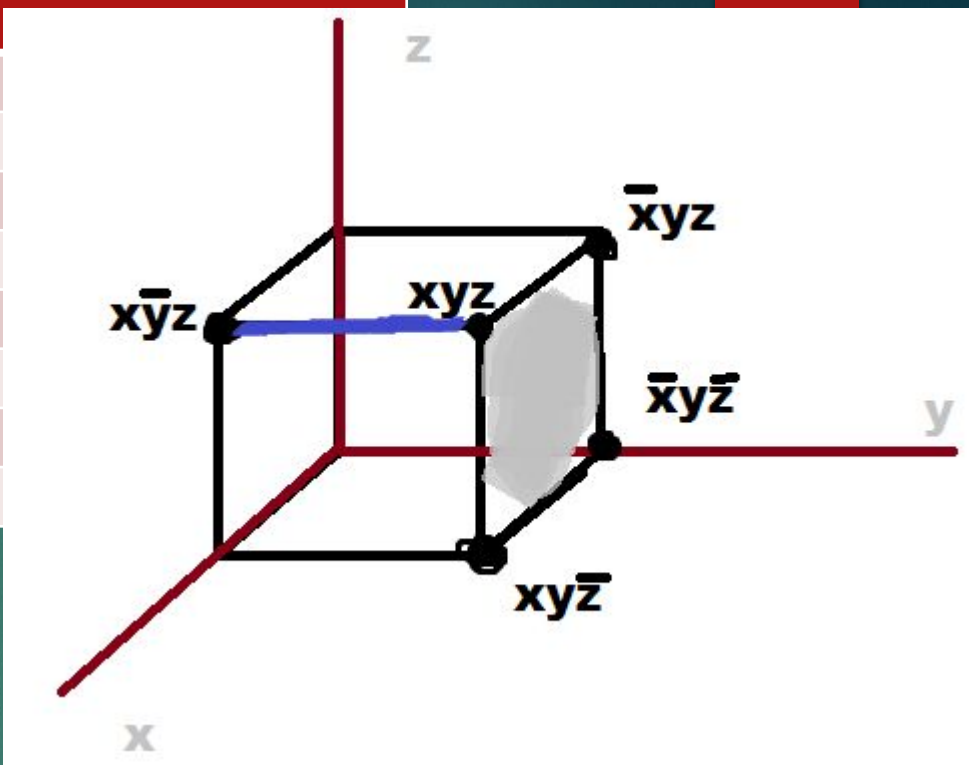
# Таблица истинности по фильму

$$\neg xy\neg z + \neg xyz + x\neg yz + xy\neg z + xyz$$

xyz	Результат:
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1



xyz	Результат:
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1



$$xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = (\bar{x} + x)(\bar{z} + z)y = 1 \cdot 1 \cdot y = y$$

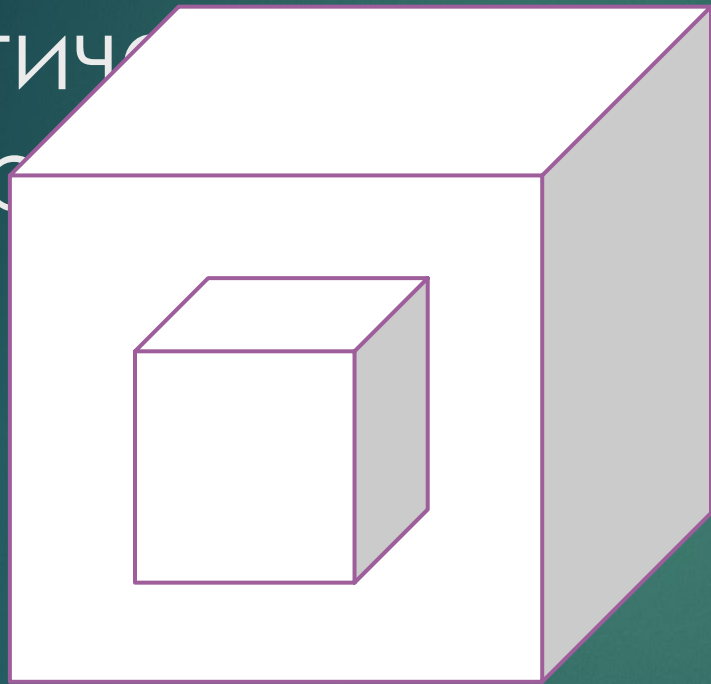
$$x\bar{y}z + xyz = (\bar{y} + y)xz = 1 \cdot x \cdot z = xz$$

$y + xz$  – Минимизированная СДНФ

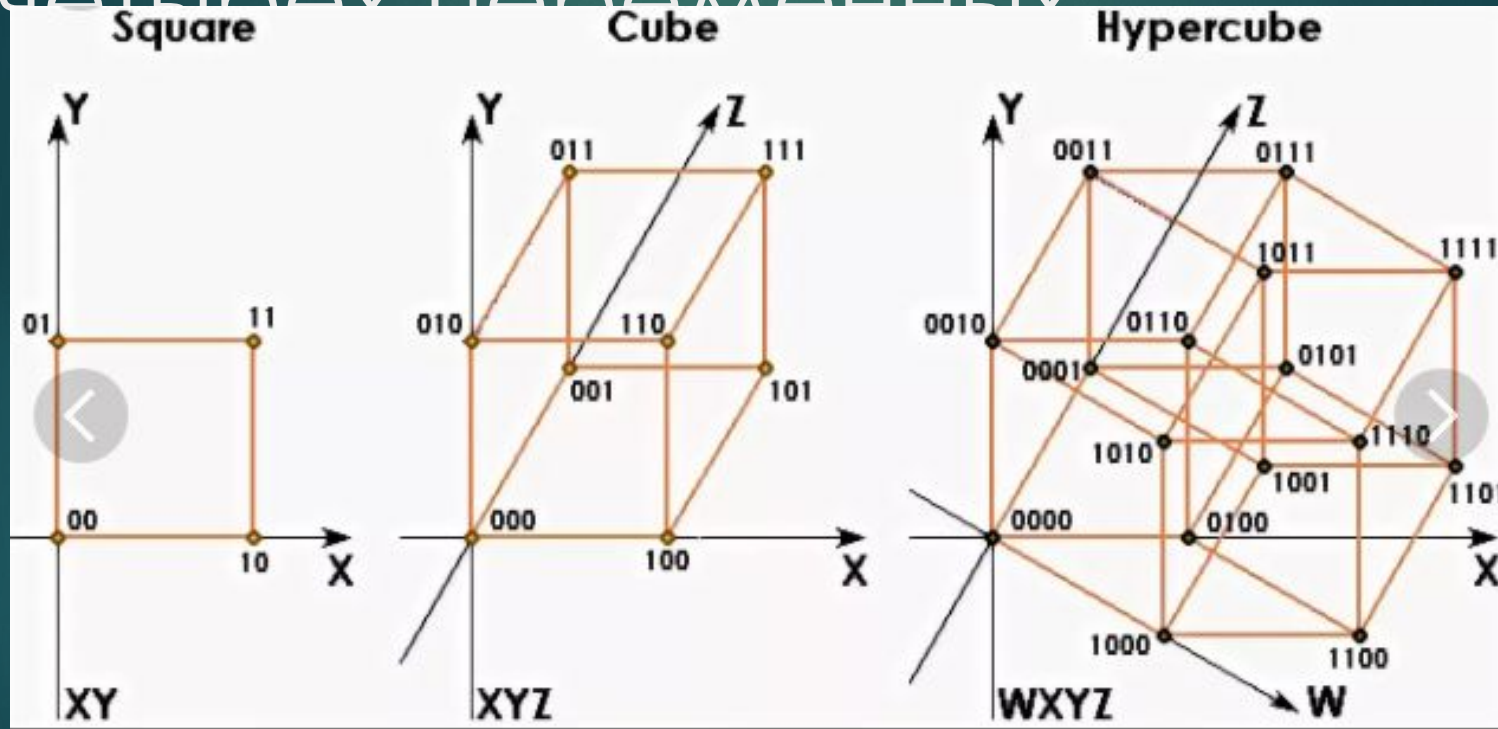


# Геометрическая интерпретация

логической функции для 4-ёх  
переменных



# Геометрическая интерпретация для логической функции для четырёх переменных



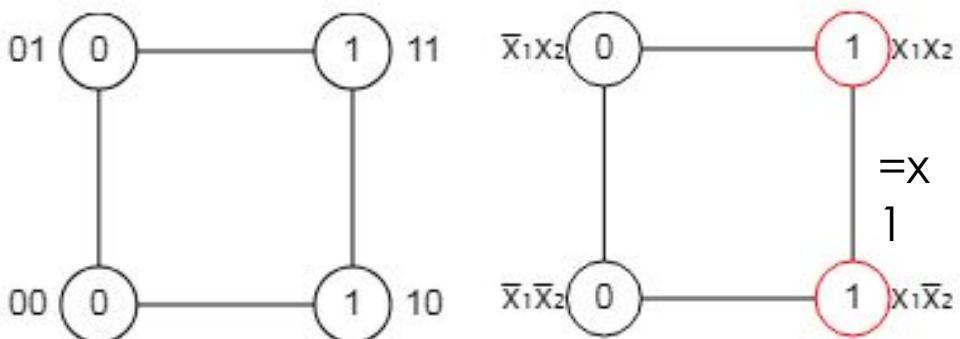
Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя членами, содержащими одинаковые переменные, вхождения которых (с отрицанием и без) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке. Например:

$$\overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 = \overline{x_1} x_2 x_4 (x_3 \vee \overline{x_3}) = \overline{x_1} x_2 x_4 \& 1 = \overline{x_1} x_2 x_4.$$

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

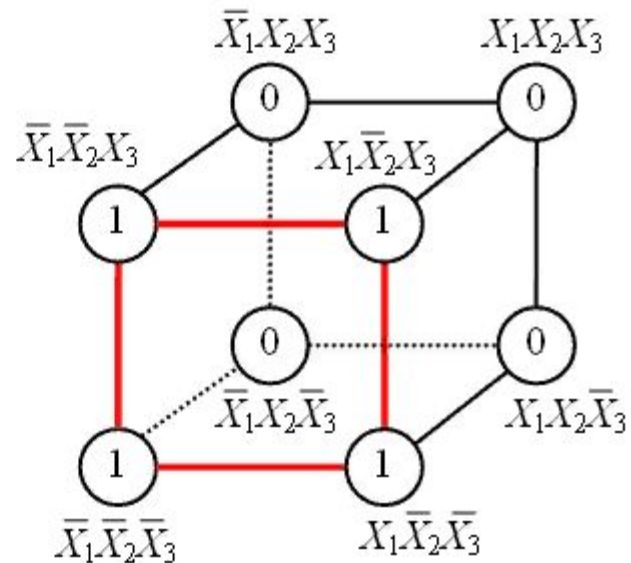
$x_1$	$x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

можно построить эквивалентный ей квадрат:

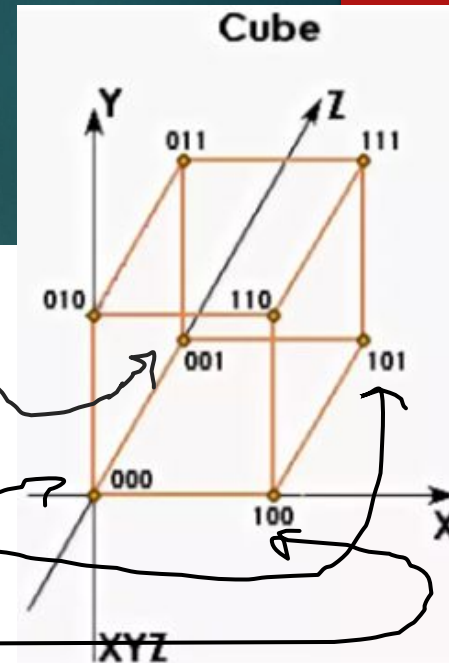
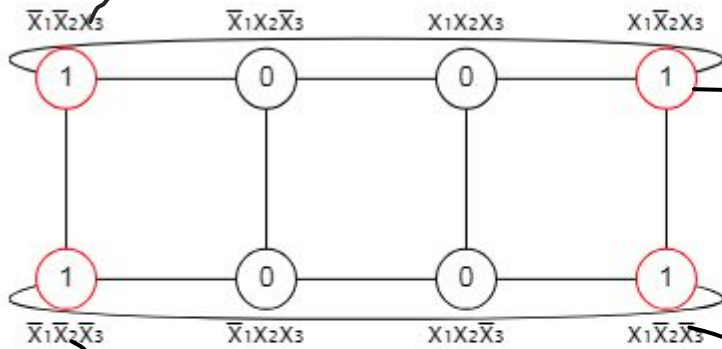


Или, если обозначить вершины соответствующими элементарными конъюнкциями и выделить вершины, конъюнкции которых входят в СДНФ:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$$\begin{aligned}
 & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\
 & = \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3) = \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{x}_2
 \end{aligned}$$

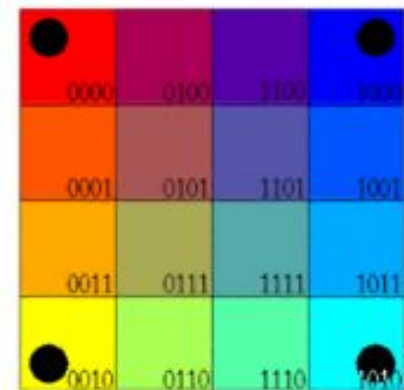
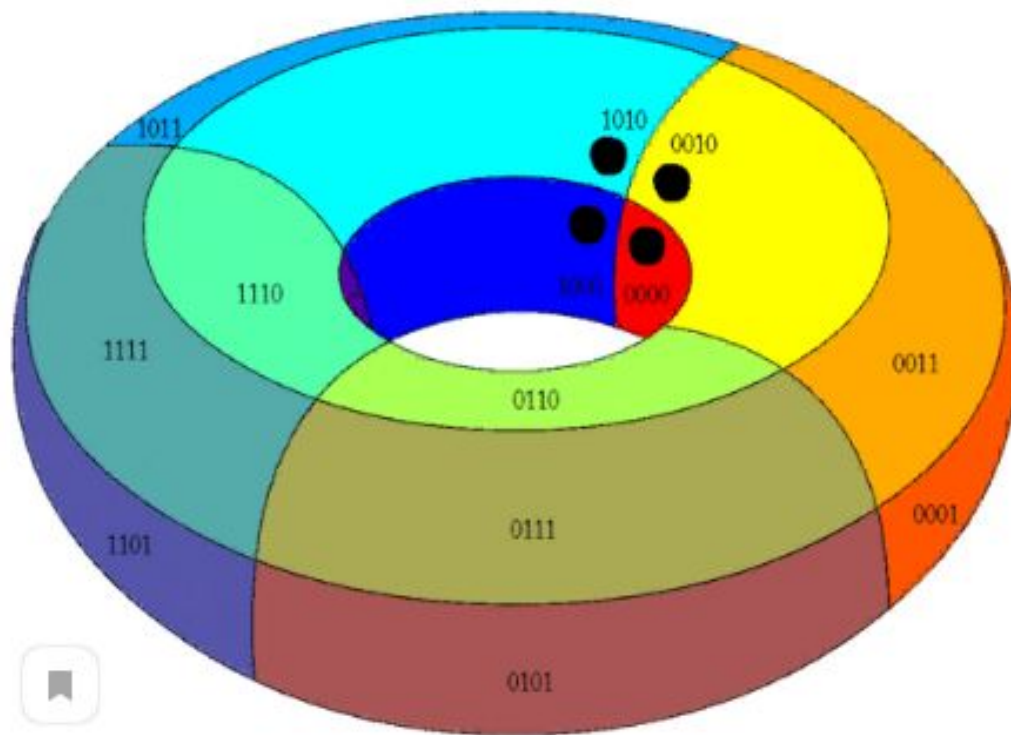


Карта Карно является представлением такой двумерной развертки в виде таблицы.

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

$x_3x_4 \setminus x_1x_2$	00	01	11	10
00	$f(0, 0, 0, 0)$	$f(0, 1, 0, 0)$	$f(1, 1, 0, 0)$	$f(1, 0, 0, 0)$
01	$f(0, 0, 0, 1)$	$f(0, 1, 0, 1)$	$f(1, 1, 0, 1)$	$f(1, 0, 0, 1)$
11	$f(0, 0, 1, 1)$	$f(0, 1, 1, 1)$	$f(1, 1, 1, 1)$	$f(1, 0, 1, 1)$
10	$f(0, 0, 1, 0)$	$f(0, 1, 1, 0)$	$f(1, 1, 1, 0)$	$f(1, 0, 1, 0)$

В данном случае, все крайние ячейки смежны друг другу. Это можно себе представить, натянув эту развертку на тор ("бублик"):





$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

Легко выделяются три группы. Исходя из этого, записывается ДНФ:

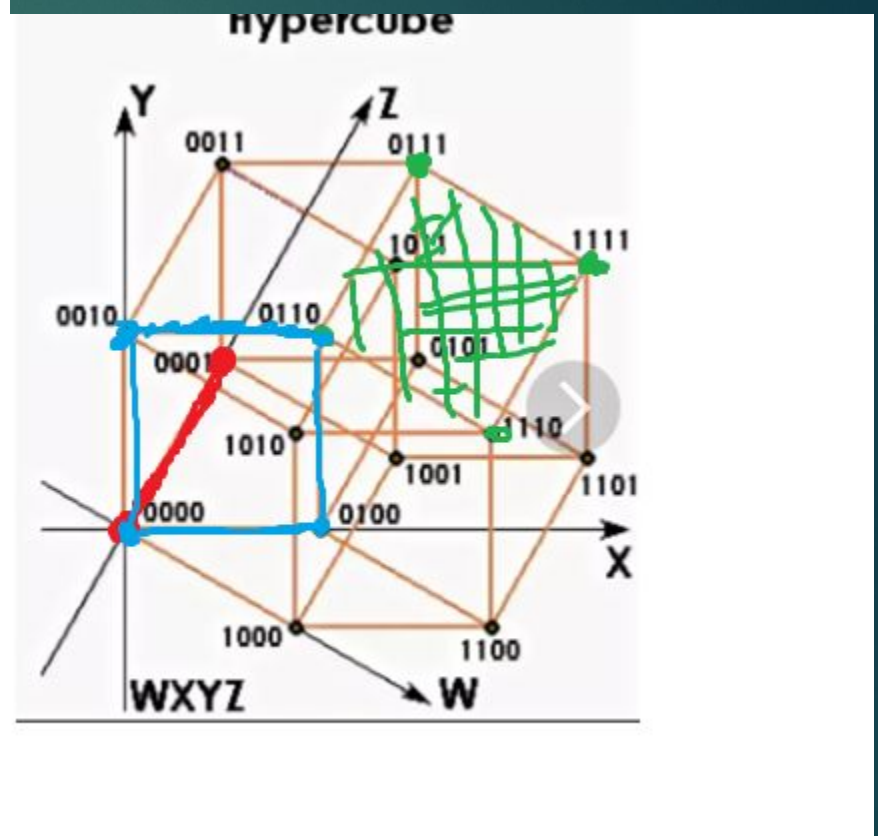
$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_2 x_3$$

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

Легко выделяются три группы. Исходя из этого, записывается ДНФ

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_2 x_3$$



# Контрольная работа №5

Таблица истинности в виде карты Карно 4 кр  
Выделить грани, показать на гиперкубе, Составить  
минимизированную СДНФ .