

## ***Лекция 2***

***1.Задача об использовании ресурсов***

***2.Геометрический метод решения задачи об использовании ресурсов***

***3.Симплексный метод***

***4.Транспортная задача. Экономико-математическая модель задачи***

***5.Метод потенциалов***

## 1. Задача об использовании ресурсов

**Задача 1.** *Предприятие производит изделия двух типов **A** и **B** из трех видов сырья **I**, **II**, **III**. Расход сырья на одно изделие каждого типа задан в условных единицах следующей таблицей:*

Изделия	Сырье		
	I ( $S_1$ )	II ( $S_2$ )	III ( $S_3$ )
<b>A</b>	3	1	1
<b>B</b>	2	2	1

**Запасов сырья имеется:** вида **I** – 27 ед., вида **II** – 18 ед., вида **III** – 10 ед.  
**Изделие типа A приносит прибыль 3 ден. ед., типа B – 1 ден. ед.**  
**Составить план выпуска изделий, при котором предприятие будет иметь наибольшую прибыль. Решить задачу графически и симплексным методом.**

**Решение.** 1. Составим математическую модель задачи. Обозначим:  $x_1$  – количество выпускаемых изделий типа **A**,  $x_2$  – количество выпускаемых изделий типа **B**. Тогда с учетом расходов сырья на изготовление изделия каждого типа получим следующие ограничения на  $x_1$  и  $x_2$ , учитывающие запасы сырья каждого вида:

$3x_1 + 2x_2$  - расход сырья  $S_1$

$x_1 + 2x_2$  - расход сырья  $S_2$

$x_1 + x_2$  - расход сырья  $S_3$

Изделия	Сырье		
	I ( $S_1$ )	II ( $S_2$ )	
<i>A</i>	3	1	
<i>B</i>	2	2	

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 27, \\ x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases} \quad (2.1)$$

По смыслу задачи  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$  (2.2)

Прибыль предприятия при плане  $x_1, x_2$  равна  $F = 3x_1 + x_2$  (2.3)

**Необходимо найти значения  $x_1, x_2$ , удовлетворяющие неравенствам (2.1), (2.2), для которых функция (2.3) достигает наибольшего значения.**

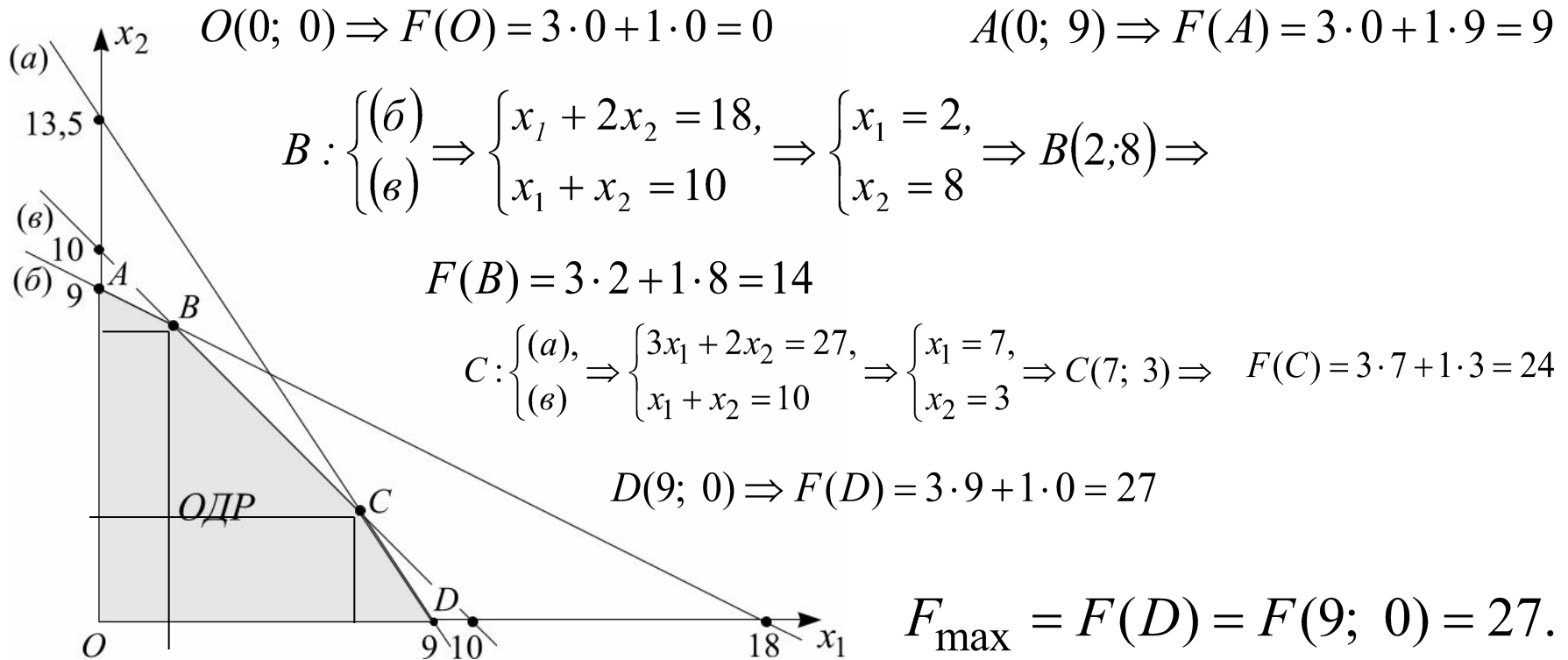
## **2. Геометрический метод решения задачи**

Введем систему координат на плоскости и изобразим в ней множество решений систем неравенств (2.1), (2.2) (область допустимых решений – *ОДР*) в виде множества точек плоскости.

Условию (2.2) удовлетворяют точки первой четверти. Для получения полуплоскостей, соответствующих неравенствам системы (2.1), построим их границы, т.е. прямые линии:

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 2x_2 = 27 & \quad (\text{а}) & \text{Пересечение построенных} \\
 x_1 + 2x_2 = 18 & \quad (\text{б}) & \text{полуплоскостей с первой четвертью –} \\
 x_1 + x_2 = 10 & \quad (\text{в}) & \text{искомая ОДР (многоугольник } OABCD\text{).}
 \end{aligned}$$

Ищем координаты вершин *ОДР* и значения целевой функции *F* в этих вершинах:



**Замечание**

$F = 3x_1 + x_2$  - функция двух переменных

Вектор  $grad F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \bar{j}$  в каждой точке плоскости

перпендикулярен к линии уровня  $F(x_1, x_2) = C$

и направлен в сторону наибольшего роста функции

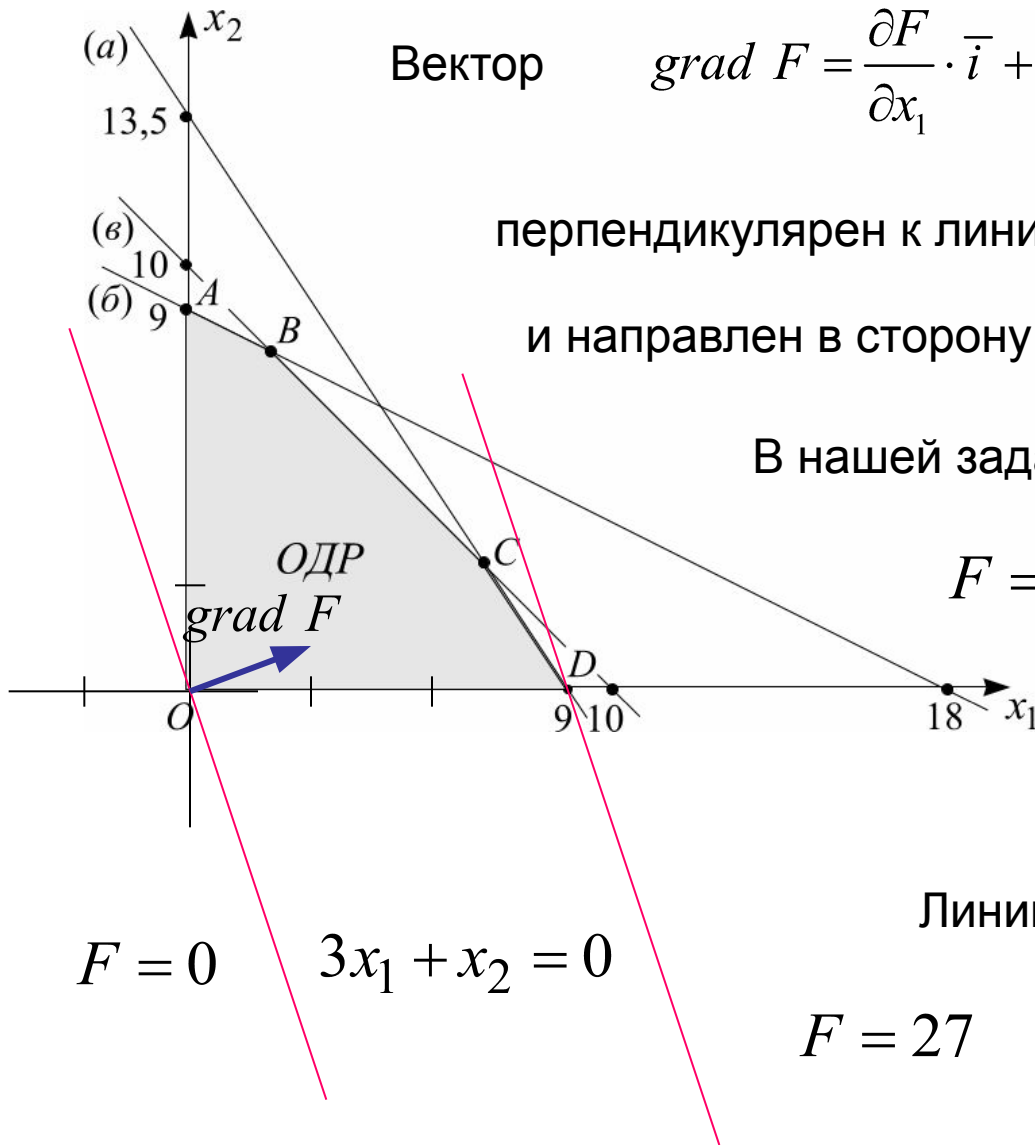
В нашей задаче

$F = 3x_1 + x_2 = 0$

$grad F = 3 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j}$

Линии уровня функции

$F = 27 \quad 3x_1 + x_2 = 27$



$F = 0 \quad 3x_1 + x_2 = 0$

**Вывод:** предприятию выгодно выпустить только 9 изделий типа А и не выпускать изделия типа В. При этом его прибыль будет наибольшая и составит 27 ден. ед.

### 3. Симплексный метод

Приведем стандартную задачу к каноническому виду, добавив в левые части неравенств (2.1) дополнительные неотрицательные переменные.

$$F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 27, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0. \quad (2.6)$$

Выбираем в качестве базисных добавленные переменные  $x_3, x_4, x_5$ . Тогда оставшиеся переменные  $x_1, x_2$  будут свободными. Положим  $x_1=0$  и  $x_2=0$ . Тогда  $x_3=27, x_4=18, x_5=10$ , т.е. получаем первое базисное решение

$$X_B^{(1)} = (0; 0; 27; 18; 10)$$

При этом

$$F^{(1)} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Структура целевой функции позволяет утверждать, что ее **значения могут быть увеличены** за счет увеличения значений как свободной переменной  $x_1$ , так и свободной переменной  $x_2$  (коэффициенты при этих переменных положительные). **Отсюда следует, что найденное базисное решение оптимальным не является.**

Назначим другой набор базисных переменных, который обеспечит увеличение значений целевой функции. С этой целью будем увеличивать значения свободной переменной  $x_1$ , оставляя  $x_2=0$ , и определим из системы (2.5), какая из базисных переменных первой станет отрицательной.

Перепишав систему (2.5) в более удобном для анализа виде

$$\begin{cases} x_3 = 27 - 3x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 18 - x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 10 - x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x_3 = 27 - 3x_1, \\ 0 \leq x_4 = 18 - x_1, \\ 0 \leq x_5 = 10 - x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 \leq 27, \\ x_1 \leq 18, \\ x_1 \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 9, \\ x_1 \leq 18, \\ x_1 \leq 10 \end{cases}$$

заключаем, что проблемной является **базисная переменная  $x_3$**  из первого равенства системы. Выводим ее из состава базисных и обмениваем на свободную переменную  $x_1$ :

В результате новыми базисными переменными стали  $x_1, x_4, x_5$ , а новыми свободными -  $x_3, x_2$ . Выражаем в системе (2.5) новые базисные переменные через новые свободные, начиная с ее проблемного первого равенства:

$$x_1 = 9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

$$x_4 = 18 - \left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) - 2x_2 = 9 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

$$x_5 = 10 - \left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) - x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

Через эти же свободные переменные выражаем целевую функцию (2.4):

(2.4')

$$F = 3 \left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) + x_2 = 27 - x_2 - x_3$$

В результате получаем:

$$F = 27 - x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 9 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ x_5 = 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3; \end{cases} \quad (2.5')$$



Полагаем свободные переменные

$$x_2 = x_3 = 0$$

Тогда базисные переменные согласно системе (2.5') принимают значения  $x_1=9$ ,  $x_4=9$ ,  $x_5=1$ , т.е. получаем второе базисное решение

$$X_B^{(2)} = (9; 0; 0; 9; 1)$$

$$F^{(2)} = 27 - 0 - 0 = 27$$

Структура целевой функции из условия (2.4') позволяет утверждать, что **ее значения не могут быть увеличены за счет увеличения значений как свободной переменной  $x_2$ , так и свободной переменной  $x_3$  (коэффициенты при этих переменных в  $F$  отрицательные).**

Отсюда следует, что **найденное базисное решение является оптимальным . При этом**

$$X_{opt} = (9; 0; 0; 9; 1)$$

$$F_{max} = 27$$

**Ответ.** Для получения максимальной прибыли в количестве 27 ден. ед. предприятие должно выпустить 9 изделий типа А и не выпускать изделия типа В. При этом сырье вида I будет израсходовано полностью, а сырье видов II и III останется в количествах 9 и 1 усл. ед. соответственно.

## 4. Транспортная задача. Экономико-математическая модель задачи

**Задача.** Поставщики  $A_1, A_2, A_3$  имеют некоторую продукцию в количествах  $a_1=100, a_2=120, a_3=180$  единиц соответственно. Потребители  $B_1, B_2, B_3, B_4$  нуждаются в этой продукции в количествах  $b_1=50, b_2=120, b_3=100, b_4=130$  единиц соответственно. Стоимости (ден. ед.) перевозки единицы продукции  $C_{ij}$  от  $i$ -го поставщика к  $j$ -у потребителю, значения  $a_i$  и  $b_j$  даны в следующей таблице:

$a_i$	$b_j$	50 ( $b_1$ )	120 ( $b_2$ )	100 ( $b_3$ )	130 ( $b_4$ )
100 ( $a_1$ )		4 $x_{11}$	5 $x_{12}$	5 $x_{13}$	6 $x_{14}$
120 ( $a_2$ )		3 $x_{21}$	4 $x_{22}$	6 $x_{23}$	5 $x_{24}$
180 ( $a_3$ )		3 $x_{31}$	5 $x_{32}$	3 $x_{33}$	6 $x_{34}$

**Требуется составить план перевозок всей продукции от поставщиков потребителям, при котором суммарные затраты на перевозки минимальны.**

**Решение.** Эта задача является закрытой транспортной задачей, так как  $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4=400$ . Для ее решения воспользуемся таблицей, в которой будем составлять последовательно планы перевозок.

Пусть  $x_{ij}$  - объем перевозки от  $i$ -го поставщика к  $j$ -у потребителю

**Мощности поставщиков  
должны быть реализованы**

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 120 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 180 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$a_i$	$b_j$	50	120	100	130
100	4	5	5	6	
		$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
120	3	4	6	5	
		$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$
180	3	5	3	6	
		$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$

**Спросы всех потребителей должны быть  
удовлетворены**

(2.8)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

**Суммарные затраты на перевозки должны быть минимальными**

$$\begin{aligned} F = & 4x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} + 6x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} + \\ & + 3x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \end{aligned} \quad (2.9)$$

## **Математическая формулировка задачи**

На множестве неотрицательных решений системы уравнений (2.7)-(2.8) найти такое решение

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \quad \text{при котором функция (2.9) принимает наименьшее значение}$$

**Замечание.** Мы имеем задачу линейного программирования в канонической форме. В этой системе 6 линейно независимых уравнений (т.е. ранг системы равен 6). Это означает, что число базисных переменных равно 6.

**Составим первый план перевозок. В этом плане отличными от нуля перевозками могут быть лишь  $m+n-1=3+4-1=6$  значений (базисные переменные), где  $m$  – число поставщиков,  $n$  – число потребителей. Остальные значения заведомо равны нулю (свободные переменные). Будем их в таблице помечать прочерком .**

Для составления плана последовательно заполняют клетки таблицы так, чтобы на каждом шаге исчерпывалась или потребность какого-либо потребителя, или возможность какого-либо поставщика. В соответствующем столбце или строке ставят в остальных пустых клетках прочерки. Если при этом одновременно исчерпывается и потребность и возможность, то вычеркивается что-то одно (столбец или строка). При таком построении плана перевозок заполненными окажутся ровно  $(m+n-1)$  клетки, а остальные прочеркнутся.

$a_i \backslash b_j$	50	120	100	130	
100	4 —	5	5	6	
120	3 50	4	6	4	5
180	3 —	5	3	6	

Заполняем клетку (21), так как  $-C_{21} = 3$  наименьшее, значением  $x_{21} = 50$ .

**При этом вычеркивается первый столбец.**

$a_i \backslash b_j$	50	120	100	130	
100	4 —	5 50	5 —	6 50	
120	3 50	4 70	6 —	4 5 —	
180	3 —	5 —	3 100	6 80	

На втором шаге заполняем клетку (33)  $x_{33}=100$ , т.к.  $C_{33}=3$  – наименьшее, значением. При этом вычеркивается третий столбец.

В оставшихся клетках наименьшее  $C_{22}=4$ , поэтому заполняем клетку (22) значением  $x_{22}=70$ . При этом вычеркивается вторая строка.

Теперь остаётся наименьшее  $C_{12}=5$ . Берём  $x_{12}=50$ , вычеркивая второй столбец.

Остаётся клетка (14) с  $x_{14}=50$  (исчерпалась первая строка) и клетка (34) с  $x_{34}=80$ . Число заполненных клеток при этом составляет  $m+n-1=3+4-1=6$ .

Стоимость перевозок  $F$  при данном плане

$$F = 5 \cdot 50 + 6 \cdot 50 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 70 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 80 = 1760 \text{ (ден. ед.)}$$

$a_i \backslash b_j$	50	120	100	130	$v_i$
100	4 -	5 50	5 -	6 50	
120	3 50	4 70	6 -	5 -	-3
180	3 -	5 -	3 100	6 80	
$u_j$	0				

Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся методом потенциалов. Введём строку потенциалов  $U_i$  и столбец потенциалов  $V_j$ . Полагаем  $U_1=0$ , а остальные  $U_i$  и  $V_j$  найдём так, чтобы для **заполненных клеток** выполнялись равенства

$$c_{ij} + v_i + u_j = 0$$

Вычисляем оценки **прочеркнутых клеток по формулам**

$$\delta_{ij} = c_{ij} + v_i + u_j$$

$a_i \backslash b_j$	50	120	100	130	$v_i$
100	4 -	5 0 50 -	5 2 -	6 0 50 +	-4
120	3 -	0 4 50 +	70 0 -	6 4 5 -	-3
180	3 +	-1 -	5 0 -	3 0 100 -	6 0 80 -
$u_j$	0	-1	1	-2	

Таблица 2

Оценки клеток будем записывать в правых верхних углах клеток. Для оптимального плана должно выполняться условие

$$\delta_{ij} \geq 0$$

$$\delta_{11} = 4 + (-4) + 0 = 0 \quad \delta_{24} = 5 + (-3) + (-2) = 0$$

$$\delta_{13} = 5 + (-4) + 1 = 2 \quad \delta_{31} = 3 + (-4) + 0 = -1$$

$$\delta_{23} = 6 + (-3) + 1 = 4 \quad \delta_{32} = 5 + (-4) + (-1) = 0$$

У нас,  $\delta_{31} = -1 < 0$  следовательно, **план не оптимален**. Уменьшить стоимость перевозок можно, заполнив клетку (31)



(на каждой единице, проставленной в клетку (31), стоимость перевозок уменьшится на 1 ден. ед.). Для заполнения клетки (31) составим цикл пересчёта (в таблице 2 обозначен пунктиром), по которому переместим в клетку (31) 50 единиц. При этом клетки (12) и (21) опустошаются. В одну из них поставим 0, в другую – прочерк, так как количество прочерков и заполненных клеток должно остаться прежним. При пересчете в клетках с (+) добавляется 50 ед., в клетках с (-) вычитается 50 ед. Имеем новый план (таблица 3)

$a_i \backslash b_j$	50	120	100	130	$v_i$	
100	4 -	5 0 50	5 2 -	6 0 50	-4	
120	3 -	0 4 50	0 6 70	4 5 -	-3	
180	3 +	-1 -	5 0 -	3 0 100	6 - 80	-4
$u_j$	0	-1	1	-2		

Уменьшить стоимость перевозок можно, заполнив клетку (31) (на каждой единице, проставленной в клетку (31), стоимость перевозок уменьшится на 1 ден. ед.). Для заполнения клетки (31) составим цикл пересчёта (в таблице 2 обозначен пунктиром), по которому переместим в клетку (31) 50 единиц. При этом клетки (12) и (21) опустошаются. В одну из них поставим 0, в другую – прочерк, так как количество прочерков и заполненных клеток должно остаться прежним. При пересчете в клетках с (+) добавляется 50 ед., в клетках с (-) вычитается 50 ед.

Таблица 3

$a_i \backslash b_j$	50		120		100		130		$v_i$
100	4	1	5	1	5	2	6	0	-3
	-		-		-		100		
120	3	0	4	0	6	3	5	-1	-3
	0		120		-		-		
180	3	0	5	1	3	0	6	0	-3
	50		-		100		30		
$u_j$	0		-1		0		-3		

Имеем новый план (таблица 3). Найдём для него потенциалы и вычислим

Таблица 3

$a_i \backslash b_j$	50		120		100		130		$v_i$
100	4	1	5	1	5	2	6	0	-3
	-		-		-		100		
120	3	0	4	0	6	3	5	-1	-3
	0		120		-		-		
180	3	0	5	1	3	0	6	0	-3
	50		-		100		30		
$u_j$	0		-1		0		-3		

$$\delta_{11} = 4 + (-3) + 0 = 1 \quad \delta_{12} = 5 + (-3) + (-1) = 1 \quad \delta_{13} = 5 + (-3) + 0 = 2$$

$$\delta_{23} = 6 + (-3) + 0 = 3 \quad \delta_{24} = 5 + (-3) + (-3) = -1 \quad \delta_{32} = 5 + (-3) + (-1) = 1$$

$$\delta_{24} = -1 < 0$$

Составим цикл для клетки (24). В этом цикле перемещается 0 единиц (фактически из клетки (21) в клетку (24)); клетка (21) станет прочёркнутой.

Так как , то составим цикл для клетки (24). В этом цикле перемещается 0 единиц (фактически из клетки (21) в клетку (24)); клетка (21) станет прочёркнутой.

Перейдем к следующему плану (таблица 4).

Таблица 4

$a_i \backslash b_j$	50		120		100		130		$v_i$
100	4	1	5	0	5	2	6	0	-3
	-		-		-		<b>100</b>		
120	3	1	4	0	6	4	5	0	-2
	-		<b>120</b>		-		0		
180	3	0	5	0	3	0	6	0	-3
	<b>50</b>		-		<b>100</b>		<b>30</b>		
$u_j$	<b>0</b>		<b>-2</b>		<b>0</b>		<b>-3</b>		

Перейдем к следующему плану (таблица 4).

Вычислим потенциалы, а затем оценки. Получили все  $\delta_{ij} \geq 0$ , следовательно, полученный план оптимален. Стоимость перевозок при этом плане

$$F = 6 \cdot 100 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 30 = 1710 \text{ (ден. ед.)}$$

По этому плану поставщик перевозит 100 ед. потребителю, поставщик – 120 ед. потребителю, поставщик А3 – 50 ед. потребителю, 100 ед. потребителю и 30 ед. потребителю. Так как среди оценок в прочеркнутых клетках есть нули, это говорит о том, что оптимальный план не единственный.

Таблица 4

$a_i \backslash b_j$	50		120		100		130		$v_i$
100	4	1	5	0	5	2	6	0	-3
	-		-		-		100		
120	3	1	4	0	6	4	5	0	-2
	-		120		-		0		
180	3	0	5	0	3	0	6	0	-3
	50		-		100		30		
$u_j$	0		-2		0		-3		