ДИСЦИПЛИНА

«ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ИНЖЕНЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ»

Материалы практического занятия 2.1

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Систематические погрешности измерений связаны с ограниченной точностью прибора и метода измерений, а также округлением при считывании со шкалы.

В зависимости от причин возникновения рассматриваются четыре вида систематических погрешностей.

1. *Погрешности метода, или теоретические погрешности.*

2. Инструментальные погрешности.

3. Погрешности, обусловленные неправильной установкой и взаимным расположением средств измерения.

4. Личные погрешности.

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

Чем больше число измерений, тем ближе среднее арифметическое значение к истинному.

Погрешность измерений $\Delta x^{изм}$ *оценивается следующим образом.*

1. Вычисляются частные отклонения отдельных измерений Δx_i **:**

Среднее арифметическое результатов измерений

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle .$$

Иногда эту величину также называют ***абсолютной погрешностью*** отдельного измерения.

2. Оценивается абсолютная погрешность измерений $\Delta x^{изм}$:

$$\Delta x^{\text{изм}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta x_i\right|.$$

3. Определяется также ***относительная погрешность измерений*** $\varepsilon_x^{изм}$:

$$\varepsilon_x^{\text{изм}} = \frac{\Delta x^{\text{изм}}}{\langle x \rangle}$$

Абсолютная погрешность измерений

Среднее арифметическое результатов измерений

Пример.

Допустим, в результате многократных измерений длины некоторого предмета получено среднее арифметическое значение l = *23,4 см* и погрешность измерения Δl *изм* = *1,4 см.*

Знания одной только величины Δl *изм* = 1,4 см недостаточно для понимания, большой или маленькой является погрешность.

Зато величина относительной погрешности

$$\varepsilon_l = 1{,}4/23{,}4 = 0{,}06 = 6\%$$

даёт нам информацию о качестве измерения без непосредственного указания на значение искомой величины.

2. Приближенные вычисления. Общие принципы

Приближенные вычисления следует вести с соблюдением нескольких правил.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых.

Например, при сложении чисел

$$4,462 + 2,38 + 1,17273 + 1,0262 = 9,04093$$

следует сумму округлить до сотых долей, т.е. принять ее равной 9,04, так как слагаемое 2,38 задано с точностью до сотых долей.

2. При умножении следует округлить сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

Например, вместо вычисления выражения

$$3{,}723 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1846$$

следует вычислять выражение

$$3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2 .$$

3. При возведении в квадрат или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

Например, $1{,}32^2 \approx 1{,}\ 74$.

4. При извлечении квадратного или кубического корня в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

Например, $\sqrt{1,17} \approx 1,08$.

Если абсолютная погрешность приближенного числа (Δ_a^*) не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют ***верными*** ***(****или* ***точными).***

По умолчанию десятичная запись приближенного числа должна содержать только верные цифры, и тогда по записи числа сразу можно узнать предельную абсолютную погрешность, с которой оно известно.

Цифры, не являющиеся верными, называются **сомнительными.**

***Пример*.**

Даны приближенные числа $a = 8.6$, $b = 8.60$, $c = 3200$, $d = 3.2 \cdot 10^3$. Указать предельную абсолютную погрешность для каждого числа.

***Решение*.**

Для числа a *предельная абсолютная погрешность* $\Delta_a^* \le 0.1$,

для числа b $\Delta_b^* \le 0.01$,

для числа c $\Delta_c^* \le 1$,

для числа d $\Delta_d^* \le 0.1 \cdot 10^3 = 100$.

Значащими цифрами приближенного числа называются все цифры его десятичной записи, кроме нулей, находящихся левее первой отличной от нуля цифры.

Пример 1.

а) Определить, какое равенство точнее.

$$9/19 = 0.474; \qquad \sqrt{103} = 10.149 .$$

Найдем значения этих выражений с бо́льшим числом десятичных знаков: $a = 9/19 = 0.47368...$, $b = \sqrt{103} = 10.14889...$

Вычислим предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta_a = 0.47368 - 0.474 = 3.2 \cdot 10^{-4} \leq 0.0004,$$

$$\Delta_b = 10.14889 - 10.149 = 1.1 \cdot 10^{-4} \leq 0.0002.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0.0004}{0.474} \approx 8 \cdot 10^{-4} = 0.08\,\%,$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.0002}{10.149} \approx 2 \cdot 10^{-5} = 0.002\,\%.$$

Поскольку $\boldsymbol{\delta_b}$ *много меньше, чем* $\boldsymbol{\delta_a}$ *,* *равенство* $\sqrt{103}$ *=10.149 является* гораздо более точным.