

«РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ С МОДУЛЯМИ», 9 КЛАСС

Ситникова Елена Григорьевна

- Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера».

- Это многозначное слово (омоним), которое имеет множество значений и применяется не только в математике, но и в архитектуре, физике, технике, программировании и других точных науках.
- В архитектуре – это исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения и служащая для выражения кратных соотношений его составных элементов.
- В технике – это термин, применяемый в различных областях техники, не имеющий универсального значения и служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например, модуль зацепления, модуль упругости и т.д.
- Модуль объемного сжатия (в физике) – отношение нормального напряжения в материале к относительному удлинению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Модулем действительного числа a называется само это число, если оно неотрицательное, и противоположное ему число, если данное число отрицательно.

Из определения модуля следует:

- 1) $|a| \geq 0$
- 2) $|a| = |-a|$

ПРИМЕРЫ:

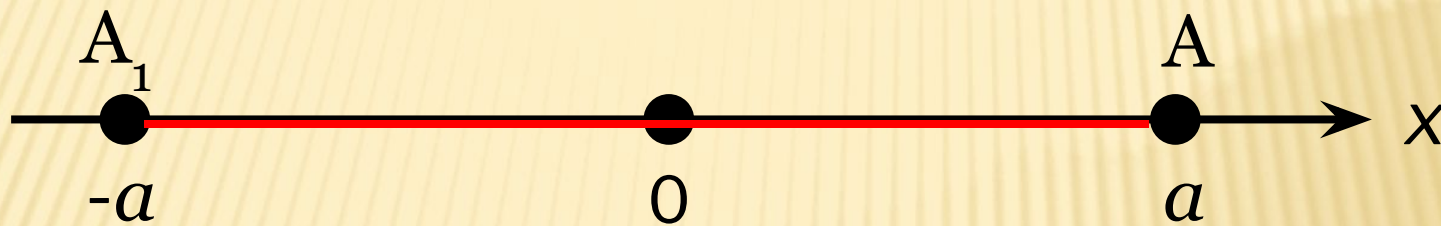
$$|-8| = 8$$

$$|5| = 5$$

$$|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$$

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ , так как } -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ



$$OA = OA_1$$

$$|a| = |-a|$$

Модуль – расстояние от начала отсчета на координатной прямой до точки, изображающей число.

УСТНАЯ РАБОТА

1. Найдите модуль каждого из чисел:

81; 2,1; -3,6; 0; -7,4

1. Назовите модуль какого числа равен:

7; 2,1; 0,5; 6

2. Решите уравнения:

1. $|x|=3$

2. $|x|=0$

3. $|x|=-3$

4. $|x|=x$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. $|x|=2,6$

$x=2,6$ или $x=-2,6$

Ответ: $-2,6; 2,6$

2. $|x+5|=3$

$x+5=3$ или $x+5=-3$

$x=3-5$ $x=-3-5$

$x=-2$ $x=-8$

Ответ: $-8; -2$

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ:

$$|x+2| = |x-1| + x-3$$

Решение:

$$|x+2| = |x-1| + x-3$$

2

1

=0 при $x = -2$

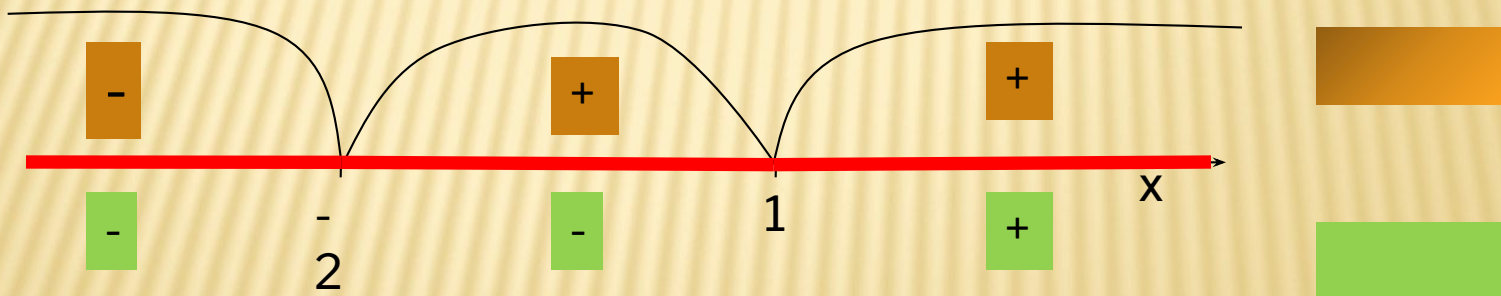
2

=0 при $x = 1$



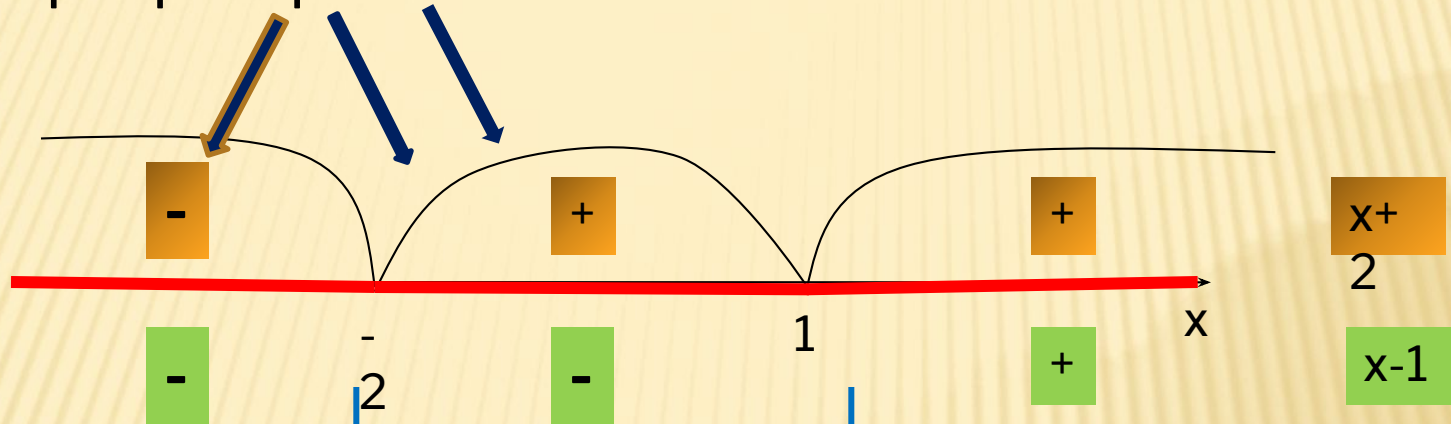
Решение:

$$\frac{|x+2|}{2} = \frac{|x-1|}{1} + x-3$$



Решение:

$$|x+2| = |x-1| + x - 3$$



Если $x < -2$,

то

$$-(x+2) = -(x-1) +$$

$$x-3$$
$$-x-2 = -x+1+x-3$$

$$x=2 - \text{не}$$

*удовлетворяет
условию $x < -2$*

решений нет

Если $-2 \leq x < 1$, то

$$x+2 = -(x-1) + x - 3$$

$$x+2 = -x+1+x-3$$

$$x = -4 - \text{не}$$

удовлетворяет

условию

$-2 \leq x < 1$

Если $x \geq 1$, то

$$x+2 = x-1 + x-3$$

$$\underline{x=6}$$

решений

нет



решений

нет



~~x=6~~



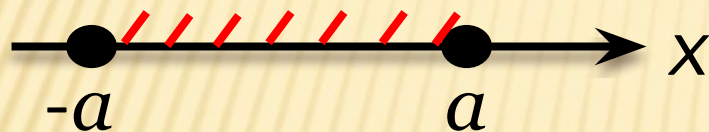
Ответ:

x=6

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$$x \leq |a|$$

Решение:



$$-a \leq x \leq a$$

$$x \in [-a; a]$$

$$x \geq |a|$$

Решение:



$$x \leq -a ; x \geq a$$

$$x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$$

РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВА:

1. $|x| < 7$

2. $|x| > 6$

3. $|x-6| < 5$

4. $|x+5| \geq 2$

5. $|x+1| \leq 2$

ПРОВЕРКА

1. $-7 < x < 7$

2. $x < -6; x > 6$

3. $|x-6| < 5$

□ Решение:

$$-5 < x-6 < 5$$

$$1 < x-6 < 11$$

$$7 < x < 17$$

4. $|x+5| > 2$

$$x+5 < -2 \quad ; \quad x+5 > 2$$

$$x < -2 - 5 \quad x > 2 - 5$$

$$x < -7 \quad x > -3$$

5. $|6x+1| < 2$

$$-2 < 6x+1 < 2$$

$$-3 < 6x < 1$$

$$-1/2 < x < 1/6$$

ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОДУЛЯ

$$|f(x)| < a$$



$$|3x-1| < 7$$

$$-7 < 3x-1 < 7$$

$$-6 < 3x < 8$$

$$-2 < x < \frac{8}{3}$$

$$\text{Ответ: } \left(-2; \frac{8}{3}\right)$$

$$|f(x)| > a$$



$$|5x-2| > 4$$

$$\begin{cases} 5x-2 > 4 \\ 5x-2 < -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$$

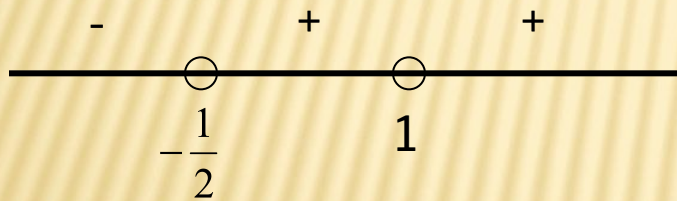
ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ В КВАДРАТ

$$|x^2-1| > |x^2-x|$$

$(x^2-1)^2 > (x^2-x)^2$ - равносильность не нарушена

$(x^2-1+x^2-x)(x^2-1-x^2+x) > 0$ – разность квадратов

$$(2x^2-x-1)(x-1) > 0$$



$$x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

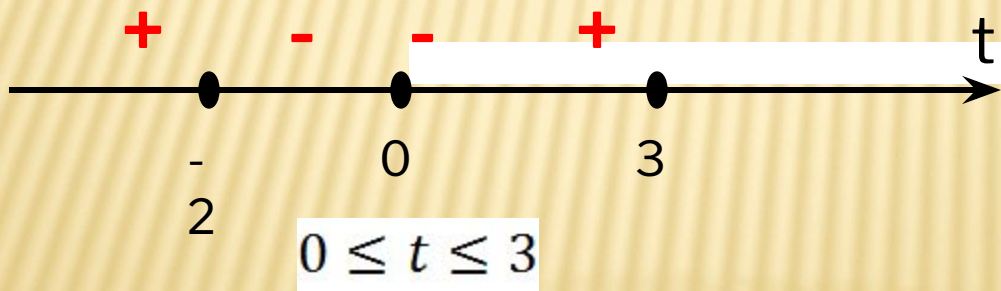
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

$$x^2 - |x| - 6 \leq 0$$

$$|x| = t; t \geq 0$$

$$t^2 - t - 6 \leq 0$$

$$(t + 2)(t - 3) \leq 0 \quad \text{учитывая условие } t \geq 0, \text{ получим}$$



$$|x| \leq 3 \iff x \in [-3; 3]$$

Ответ: $[-3; 3]$

РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО:

$$|x-1| + |x-3| > 4$$

Решение:

$$|x-1| + |x-3| > 4$$

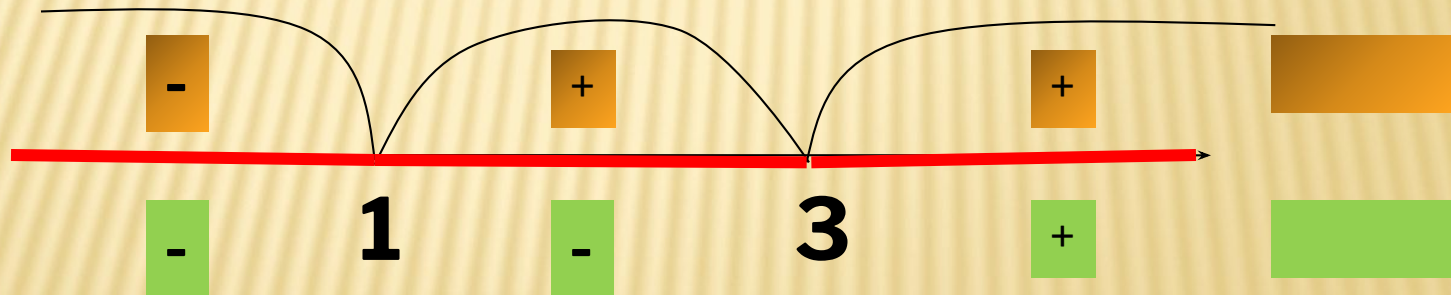
= 0 при $x=1$

= 0 при $x=3$

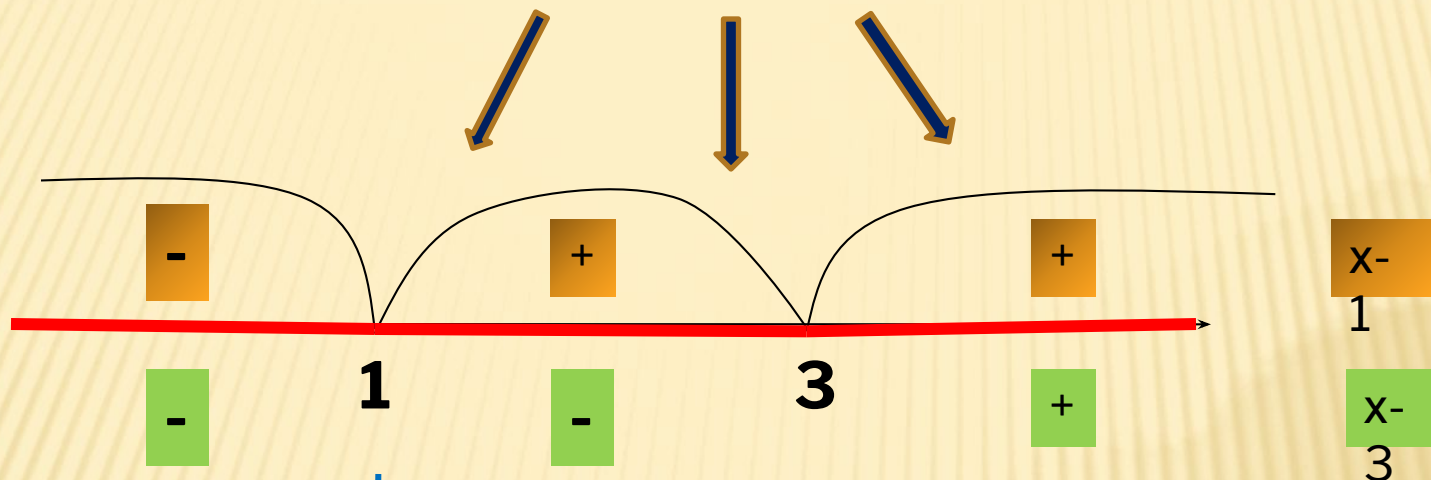


Решение:

$$|x-1| + |x-3| > 4$$



Решение: $|x-1| + |x-3| > 4$



Если $x < 1$, то

$$\begin{aligned} -(x-1) - (x-3) &> 4 \\ -x+1 -x+3 &> 4 \\ -2x &> 0 \\ \underline{x < 0} \end{aligned}$$

Если $1 \leq x < 3$, то

$$\begin{aligned} x-1 - (x-3) &> 4 \\ x-1-x+3 &> 4 \\ 2 &> 4 - \text{не} \\ &\text{верно} \end{aligned}$$

решений нет

Если $x \geq 3$, то

$$\begin{aligned} x-1+x-3 &> 4 \\ 2x &> 8 \\ \underline{x > 4} \end{aligned}$$

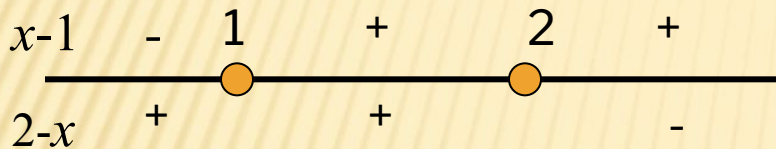
Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

Общий алгоритм

- ✓ найти нули подмодульных выражений и отметить их на числовой прямой
- ✓ определить знаки подмодульных выражений на полученных промежутках
- ✓ на каждом промежутке решить уравнение (неравенство)
- ✓ объединить полученные решения

РАСКРЫТИЕ МОДУЛЯ НА ПРОМЕЖУТКАХ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА

$|x-1| + |2-x| > 3$ Нули подмодульных выражений: $x = 1$ и $x = 2$



а)

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -(x-1) + 2 - x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 0)$$

б)

$$\begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x + 1 - x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ 1 > 3 - \text{неверное} \end{cases}$$

\emptyset

в)

$$\begin{cases} x > 2 \\ x - 3 + x > 3 \end{cases}$$

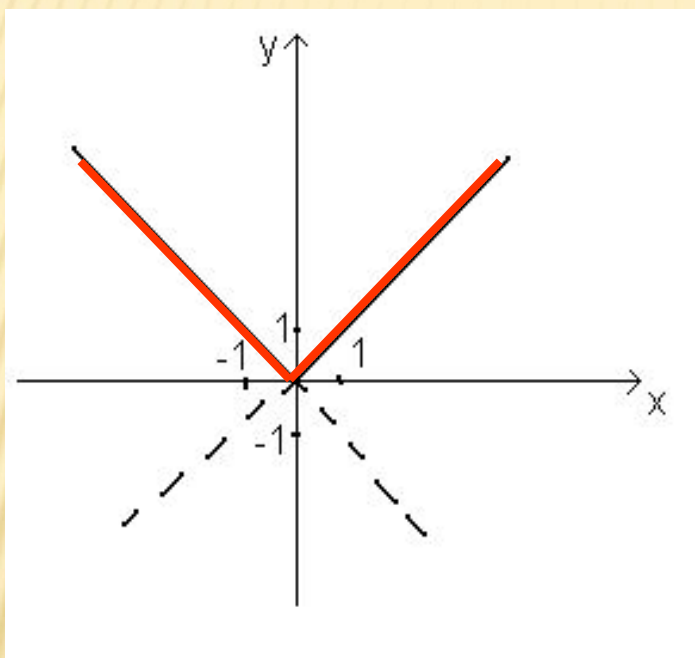
$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$



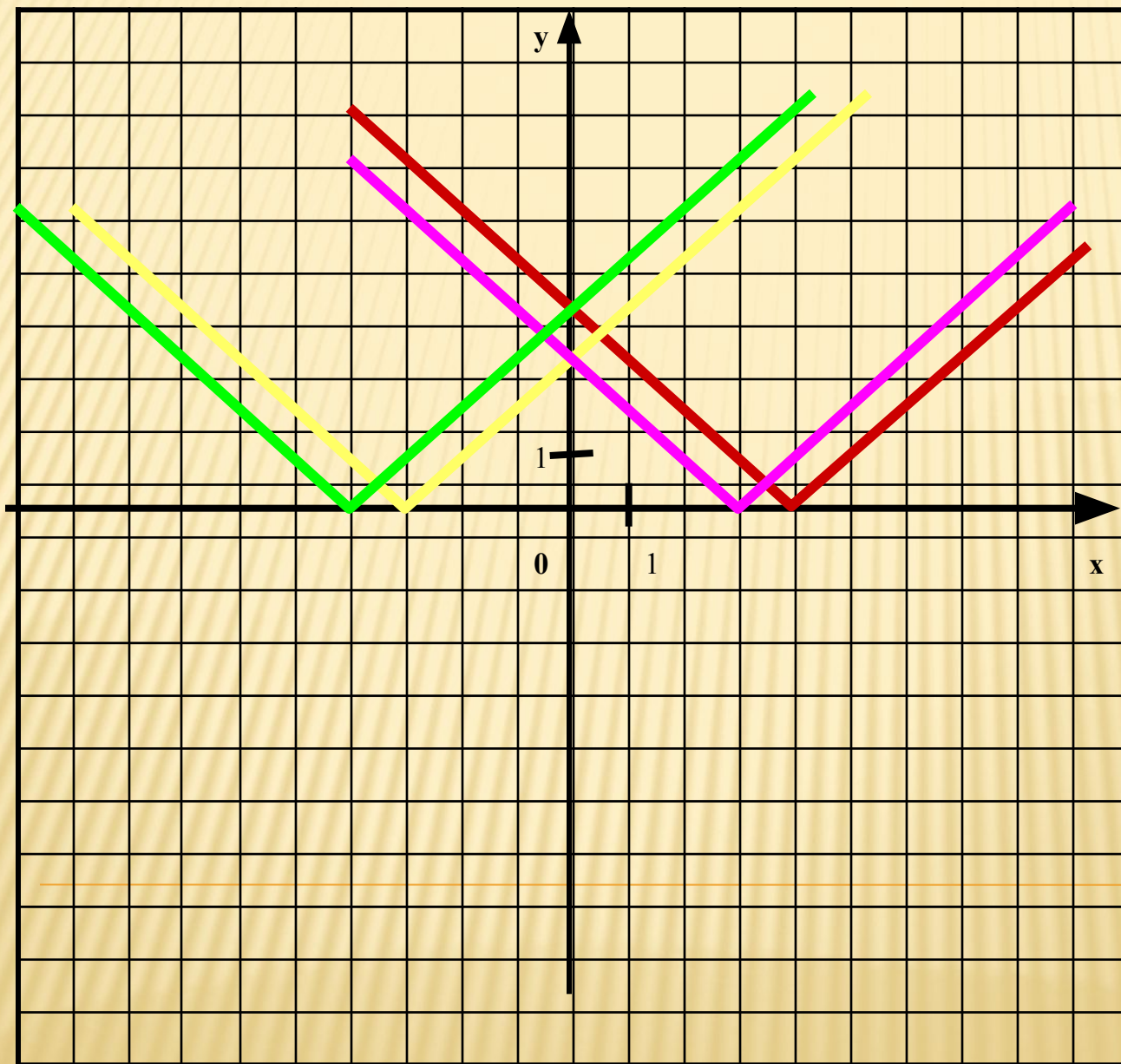
$$x \in (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

Рассмотрим функцию $y = |x|$ и построим её график



$$y = x, \text{ если } x > 0$$
$$y = 0, \text{ если } x = 0$$
$$y = -x, \text{ если } x < 0$$



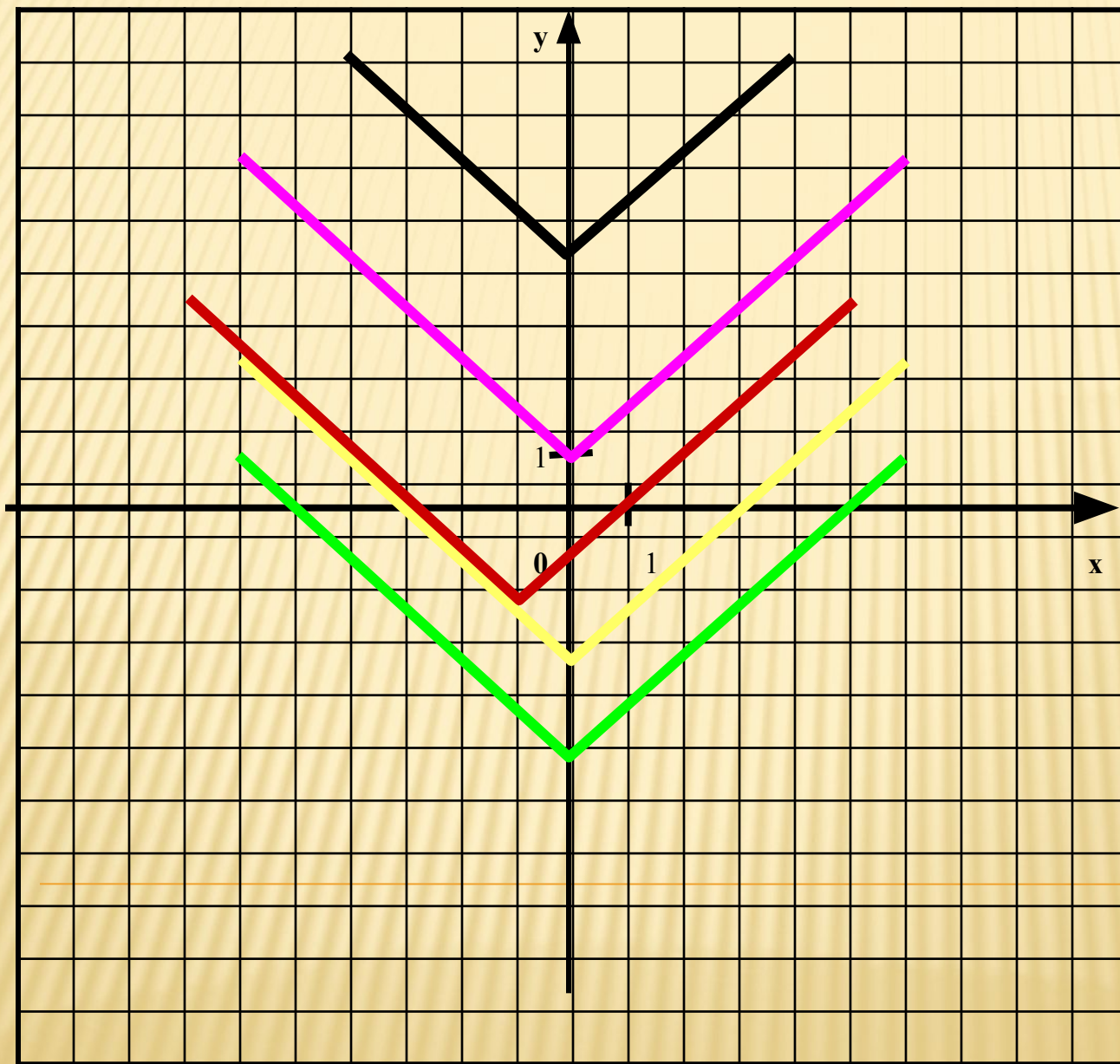
$$y = |x - 4|$$

$$y = |x + 3|$$

Установив
закономерность,
постройте
графики функций:

$$y = |x - 3|$$

$$y = |x + 4|$$



$$y = |x| + 1$$

$$y = |x| - 3$$

$$y = |x| - 5$$

$$y = |x| + 5$$

Установив
закономерность,
постройте графики
функций

$$y = |x + 1| - 2$$

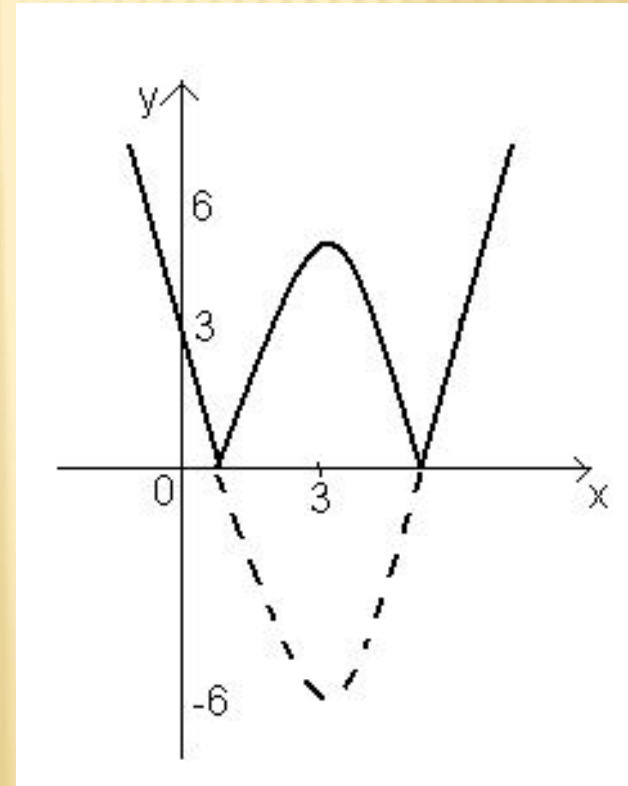
Построить график функции $y = |x^2 - 6x + 3|$

При построении этого графика можно использовать принцип «зеркального отражения». Строим параболу $y = x^2 - 6x + 3$ по всем правилам:

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 9 - 18 + 3 = -6,$$

А (3; -6) — вершина параболы, ветви направлены вверх.

Строим параболу и отображаем часть графика, расположенного ниже оси Ox , в верхнюю полуплоскость.



РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Способы решения:

- По определению модуля
- Метод интервалов
- Замена равносильной системой
- Метод подстановки

РЕШИТЬ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

1. по определению модуля:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2|x| + y = 1 \end{cases}$$

1 случай $x \geq 0$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 3$$

$$x = 1 \text{ удовл.}$$

$$\begin{cases} y = -1 \end{cases}$$

2 случай $x < 0$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

$$-x = 3$$

$$x = -3 \text{ удовл.}$$

$$\begin{cases} y = -5 \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1); (-3; -5)$

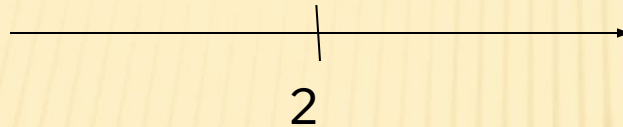
РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

2. метод интервалов

$$\begin{cases} |2-x| + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$2 - x = 0$$

$$x = 2$$



1 случай $x < 2$

$$\begin{cases} 2 - x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 2 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$x = 12$ не удовл.

2 случай $x \geq 2$

$$\begin{cases} -2 + x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$x = 4$ удовл.

$$y = 0,5$$

Ответ: (4; 0,5)

РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

3. Замена равносильной системой:

$$\begin{cases} |2-x| + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2-x| = 3 - 2y \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-x = 3-2y \\ 2-x = -3+2y \\ 3-2y \geq 0 \\ 3x-4y = 10 \end{cases}$$

$$2-x = 3-2y \quad \text{или} \quad 2-x = -3+2y$$

$$\begin{cases} 3-2y \geq 0 \\ 3x-4y = 10 \\ -x+2y = 1 \\ 3x-4y = 10 \\ 3-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-2y \geq 0 \\ 3x-4y = 10 \\ -x-2y = -5 \\ 3x-4y = 10 \\ 3-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 10 \\ 3 - 2y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - 2y = -5 \\ 3x - 4y = 10 \\ 3 - 2y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 6,5 \text{ не удовл.} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0,5 \text{ удовл.} \end{cases}$$

Ответ: нет решений

РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

Метод подстановки. Указать целые решения

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| = 5 \\ y - x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 + x \\ |x| + |6 + x - 1| = 5 \\ |x| + |5 + x| = 5 \\ x = 0 \quad x = -5 \end{cases}$$



1 сл. $x < -5$

$$-x - 5 - x = 5$$

$$-2x = 10$$

$x = -5$ не корень

2 сл. $-5 \leq x < 0$

$$-x + 5 + x = 5$$

$$0 = 0$$

$x \in [-5; 0)$

-6

3 сл. $x \geq 0$

$$x + 5 + x = 5$$

$$x = 0$$

$y = 6$

$y \in [1; 6)$

Ответ: $(-5; 1), (-4; 2), (-3; 3), (-2; 4), (-1; 5), (0; 6)$

ТЕСТ:

1. ВЕРНО ЛИ, ЧТО $|a| = a$ ТОЛЬКО ПРИ $a = 0$?

~~ДА~~

НЕТ

2. УРАВНЕНИЕ $|x^2 - 3x - 4| = x - 3$
УРАВНЕНИЙ

РАВНОСИЛЬНО СОВОКУПНОСТИ

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = x - 3, \\ x^2 - 3x - 4 = -(x - 3). \end{cases}$$

ДА

НЕТ

3. РАВЕНСТВО $|a| = -a$ ВЕРНО ТОЛЬКО ПРИ $a \leq 0$?

ДА

НЕТ

4. ВЕРНО ЛИ, ЧТО $|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5}$?

ДА

НЕТ

5. УРАВНЕНИЕ $|x - 2| = |x|$ РАВНОСИЛЬНО СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} x - 2 = x, \\ x - 2 = -x. \end{cases}$$

~~ДА~~

НЕТ

ТЕСТ:

1. ВЕРНО ЛИ, ЧТО $|A|=A$ ТОЛЬКО ПРИ $A=0$?

~~ДА~~

НЕТ

2. УРАВНЕНИЕ $|x^2 - 3x - 4| = x - 3$
УРАВНЕНИЙ

РАВНОСИЛЬНО СОВОКУПНОСТИ

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = x - 3, \\ x^2 - 3x - 4 = -(x - 3). \end{cases}$$

ДА

НЕТ

3. РАВЕНСТВО $|A| = -A$ ВЕРНО ТОЛЬКО ПРИ $A \leq 0$?

ДА

НЕТ

4. ВЕРНО ЛИ, ЧТО $|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5}$?

ДА

НЕТ

5. УРАВНЕНИЕ $|x - 2| = |x|$ РАВНОСИЛЬНО СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} x - 2 = x, \\ x - 2 = -x. \end{cases}$$

ДА

НЕТ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Ответы:

1. 4; $-\frac{2}{3}$

2. -1; 7

3. -3

4. нет решений

* нет решений

Решите самостоятельно:

1. $|3x-5|=7$

2. $|6-2x|=8$

3. $|x+3|=0$

4. $|3x+2|=-3$

* $|x+3|+|x+1|=-5$

Спасибо за внимание!!!