Алгебра

Лекции – 36часов
Пр. зан. – 36 часов
Зачет
Лектор: доц. Жмурова Ирина Юньевна
Ассистент: ст. пр. Игнатова Анна Васильевна

Балльно-рейтинговая система

Тип	Текущий контроль	Рубежный контроль
1 модуль		
Теор.опросы	9	
Практ.зан.	16	
Коллоквиум		25
2 модуль		
Теор.опросы	9	
Практ.зан.	16	
Коллоквиум		25

Требования

- Опросы на лекциях: 0; 0,25; 0,5; 1
- Отсутствие на лекции: – 1
- Итого (max): 18
- Коллоквиум (max): 2× 25 =50
- Практические занятия: 32
- Бонусные баллы (max): 10

Литература (учебники)

- **А.Г.Курош.** ***Курс высшей алгебры***
- **Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С.** ***Алгебра. Ч. 1.***
- **Кострикин А.И.** ***Введение в алгебру***
- **Б. Ван дер Варден.** ***Алгебра***

Литература
(задачники)

- **Проскуряков И.В.** ***Сборник задач по линейной алгебре***
- **Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С.** ***Задачник-практикум по алгебре и теории чисел***

- Модуль 1. Алгебра матриц
- Модуль 2. Комплексные числа

Модуль *1*. Алгебра матриц

Системы линейных алгебраических уравнений

- ***Def 1.*** Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

- ***Def 2.*** Набор чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называется ***решением*** системы (1), если при подстановке чисел ω_i в каждое уравнение системы (1) получается система верных равенств.
- ***Def 3.*** Две СЛАУ называются ***эквивалентными***, если они имеют одинаковые решения, либо не имеют решений

Системы линейны алгебраических уравнений

- ***Def 4.*** ***Матрицей*** системы (1) называется матрица следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Системы линейны алгебраических уравнений

- ***Def 5.*** ***Расширенной матрицей*** системы (1) называется матрица следующего вида:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Метод Гаусса

- ***Def.*** ***Элементарными преобразованиями*** СЛАУ называются следующие:
- 1. Перемена местами двух уравнений
- 2. Умножение уравнения на число, отличное от нуля
- 3. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число

Метод Гаусса

- ***Теорема 1.*** Если одна СЛАУ получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, то она эквивалентна данной.

Метод Гаусса

- ***Теорема 2.*** Любую СЛАУ с помощью конечного числа элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.
- *NB* Этот алгоритм называют ***алгоритмом Гаусса***

линейных алгебраических

Критерий совместности системы

- ***Теорема 3.*** Для того, чтобы СЛАУ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к ступенчатому виду в ней отсутствовали бы уравнения вида $\boldsymbol{0=b}$, где $\boldsymbol{b\neq 0}$

Решение неопределенной СЛАУ

- *1.* Привести систему (1) к ступенчатому виду.
- *2.* Выделить свободные и главные неизвестные.
- *3.* Свободные неизвестные перенести в правую часть с противоположным знаком.

Решение неопределенной СЛАУ

- *4.* В левой части провести обратный ход метода Гаусса.
- *5.* Записать общее решение системы.
- *6.* При необходимости найти частные решения системы
- *NB 1.* Если система неопределенная, то она имеет бесконечное множество решений.
- *NB 2.* Однородная система всегда совместна.

Примеры решения систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Примеры решения систем

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4 \end{cases}$$

Операции над матрицами

$$M_{m\times n}(R)=\{A-\text{матрица } m\times n\}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A=\left\|a_{ij}\right\|_{i=1}^{m}\,{}_{j=1}^{n} \qquad B=\left\|b_{ij}\right\|_{i=1}^{m}\,{}_{j=1}^{n}$$

$$A,B\in M_{m\times n}(R)$$

Условие равенства матриц

- ***Def.*** Две матрицы из $M_{mxn}(\mathbf{R})$ называются <u>*равными*</u>, если все элементы, стоящие на одних и тех же местах равны

Сложение матриц

- ***Def 1.*** *<u>Суммой</u>* матриц A и B из $M_{mxn}(\mathbf{R})$ называются матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B

Свойства операции сложения

- *1^0.* Коммутативность
- *2^0.* Ассоциативность
- *3^0.* Наличие нейтрального элемента
- *4^0.* Наличие нейтрализующего элемента
- *NB 1.* Матрица $-A$ называется матрицей, противоположной к A, или противоположной матрицей.
- *NB 2.* Алгебраическая структура, обладающая свойствами $1^0 - 4^0$, называется **абелевой (коммутативной) группой.**

Умножение матрицы на число

- ***def.*** Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$. *Произведением* матрицы A и числа λ называется матрица, каждый элемент которой получается произведением элемента матрицы A и числа λ

Свойства операции умножения матрицы на число

- 1^0. $1 \cdot A = A$
- 2^0. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- 3^0. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- 4^0. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- 5^0. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Умножение матриц

R^n – арифметические векторы

$$a = (a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n), a_i \in R$$

$$b = (b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n), b_i \in R$$

(a, b) – скалярное произведение векторов

$$(a,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Свойства скалярного произведения арифметических векторов

- 1^0. Коммутативность
- 2^0. Однородность
- 3^0. Аддитивность
- 4^0. Неотрицательность

Определение произведения квадратных матриц

$$A, B \in M_{2\times 2}(R) = M_2(R)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

Определение произведения матриц

$$A, B \in M_{2\times 2}(R) = M_2(R)$$

$$A_1 = (\alpha, \beta) \quad A_2 = (\gamma, \delta)$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \left(A_1, B^1\right) & \left(A_1, B^2\right) \\ \left(A_2, B^1\right) & \left(A_2, B^2\right) \end{pmatrix}$$

Определение произведения матриц

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i=1\ j=1}^{n\quad n} \qquad\qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{i=1\ j=1}^{n\quad n}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (A_1, B^1) & (A_1, B^2) & \cdots & (A_1, B^n) \\ (A_2, B^1) & (A_2, B^2) & \cdots & (A_2, B^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_n, B^1) & (A_n, B^2) & \cdots & (A_n, B^n) \end{pmatrix}$$

Определение произведения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения квадратных матриц

- 1^0. ~~Коммутативность~~
- 2^0. Ассоциативность
- 3^0. Существование нейтрального элемента
- 4^0. ~~Существование обратного элемента~~

Умножение прямоугольных матриц

- *Условие согласования*
- Число столбцов левой матрицы должно быть равно числу строк правой

Умножение прямоугольных матриц

- ***def.*** Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbf{R})$. ***Произведением*** матриц A и B называется матрица $C \in M_{m\times r}(\mathbf{R})$, вычисляемая по правилу:

Умножение прямоугольных матриц

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{r}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (A_1, B^1) & (A_1, B^2) & \cdots & (A_1, B^r) \\ (A_2, B^1) & (A_2, B^2) & \cdots & (A_2, B^r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_m, B^1) & (A_m, B^2) & \cdots & (A_m, B^r) \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения матриц
(в общем виде)

- *1^0*. ~~Коммутативность~~
- *2^0*. Ассоциативность
- *3^0*. Существование нейтральных элементов: левого и правого
- *4^0*. Дистрибутивность относительно сложения

Операция транспонирования матрицы

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i=1\; j=1}^{m \quad n} \qquad A^{\tau} = \left\| a_{ji} \right\|_{j=1\, i=1}^{n \quad m}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^{\tau} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования

- 1^0. $(A+B)^\tau = A^\tau + B^\tau$
- 2^0. $(\lambda A)^\tau = \lambda A^\tau$
- 3^0. $(A^\tau)^\tau = A$
- 4^0. $(AB)^\tau = B^\tau A^\tau$

Определитель квадратной матрицы

Определителем **<u>квадратной</u>** матрицы $A \in M_n(R)$ называют ее числовую характеристику,

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель квадратной матрицы

Определитель квадратной матрицы $A \in M_n(R)$ – ее числовая характеристика

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель квадратной матрицы

Определитель матрицы второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

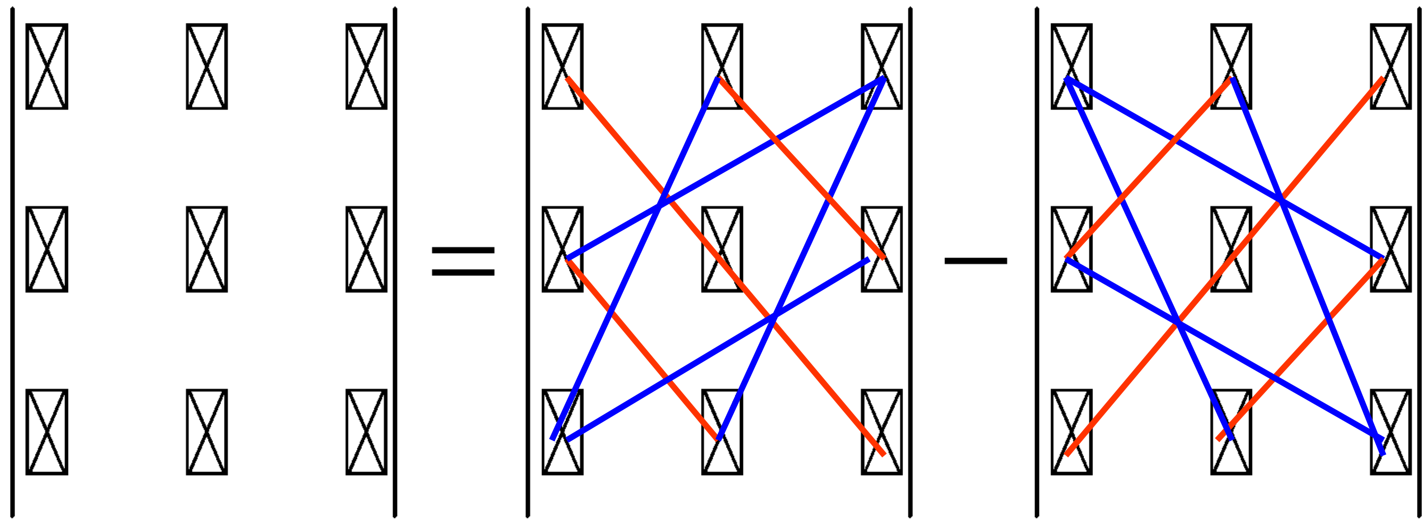
Определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Определитель 3-го порядка: правило Саррюса



Определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \prod_{i=1}^{n} a_{i\varphi(i)} =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi\, a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}$$

Свойства определителей

- 1^0 Определитель n-го порядка содержит $\boldsymbol{n}!$ слагаемых, из которых половина берется со знаком «+», а половина – со знаком «–»

Свойства определителей

- **2^0** При транспонировании определитель матрицы не меняется
- *NB* Из свойства 2^0 следует, что все свойства определителей можно формулировать как для строк, так и для столбцов

Свойства определителей

- **3⁰** Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из нулей, то ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей

- **4⁰** Если матрица ***B*** получена из матрицы ***A*** элементар-ным преобразованием 1 типа, то ***det B* = – *det A***.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

- **5⁰** Если матрица ***B*** получена из матрицы ***A*** элементарным преобразованием 2 типа, то
- $\boldsymbol{det\ B = \lambda\ det\ A}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{im} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

- **6^0** Если строки (столбцы) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей

- 7^0 Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы есть сумма двух арифметических векторов, то ее определитель равен сумме определителей, которые получаются из исходной матрицы заменой на соответствующие строки.

Свойства определителей

$$\begin{vmatrix} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \\ \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \\ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \\ \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

- 8^0 Если матрица B получена из матрицы A элементарным преобразованием 3 типа, то ее определитель не изменится:
  - $\det B = \det A$.

Свойства определителей

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \cdots & a_{jn} + \lambda a_{in} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix}$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

- *Def.* Минором M_{ij}, дополнительным к элементу a_{ij} называется определитель $n\text{-}1$-го порядка, полученный из определителя матрицы вычеркиванием строки и столбца, содержащего элемент a_{ij}

Разложение определителя по элементам строки или столбца

$$M_{ij} = \left| \begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\
\hline
a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array} \right|$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

- *Def.* Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его дополнительный минор, взятый с определенным знаком:
  - $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
- **Ex.**

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Малая теорема Лапласа

- Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) и их алгебраических дополнений.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Доказательство

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \\ \end{vmatrix}$$

Следствие *1*

- Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – произвольные числа.
- Сумма

$$\sum_{j=1}^{n} b_j A_{ij}$$

- равна определителю матрицы В, которая получена из матрицы А заменой *i*-й строки числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$

Следствие 1

$$\sum_{j=1}^{n} b_j A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие 2

- Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) и алгебраических элементов другой строки (столбца) равна нулю

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = 0, \quad k \neq i$$

Следствие 3

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ \det A, & k = i \end{cases}$$

Обратная матрица

- $A \in M_n(R)$
- ***def.*** Матрица $A^{-1} \in M_n(R)$ называется ***обратной*** к матрице *A*, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

def. Матрица, имеющая обратную, называется ***обратимой***

Свойства обратной матрицы

- 1^0 $(A^{-1})^{-1} = A$
- 2^0 Произведение обратимых матриц обратимо, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 3^0 Если матрица A обратима, то уравнения (1) $AX=B$ и (2) $XA=B$ имеют решение
- 4^0 $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Свойства обратной матрицы

- **Теорема (критерий обратимости матрицы)** Для того, чтобы матрица A была обратима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля
- ***def*** Если определитель матрицы отличен от нуля, матрицу называют ***невырожденной***

2 способа нахождения обратной матрицы

$$1\,способ: \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$$

$$2\,способ: \quad метод\ Гаусса$$

$$(A|E) \sim (E|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема Крамера

- Пусть (1) – система линейных алгебраических уравнений с **квадратной** матрицей

$$
(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}
$$

Теорема Крамера

- Если определитель матрицы системы (1) отличен от нуля, то система (1) является определенной, а ее единственное решение определяется формулами

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

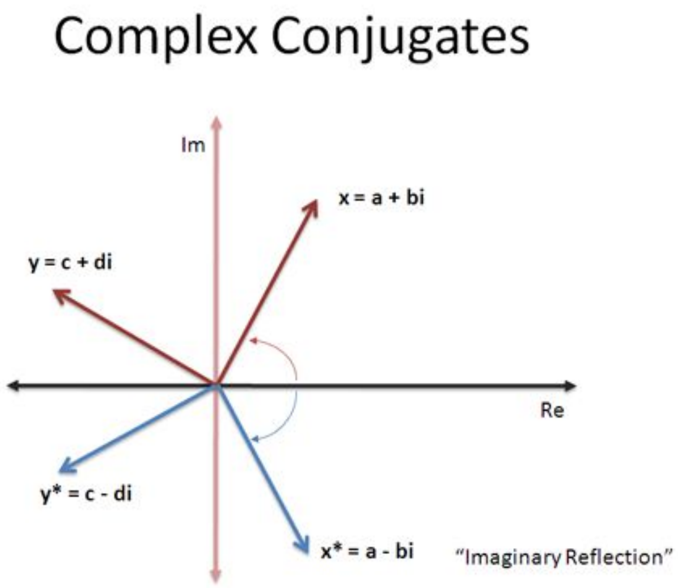
- где A_i – матрица, полученная из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов

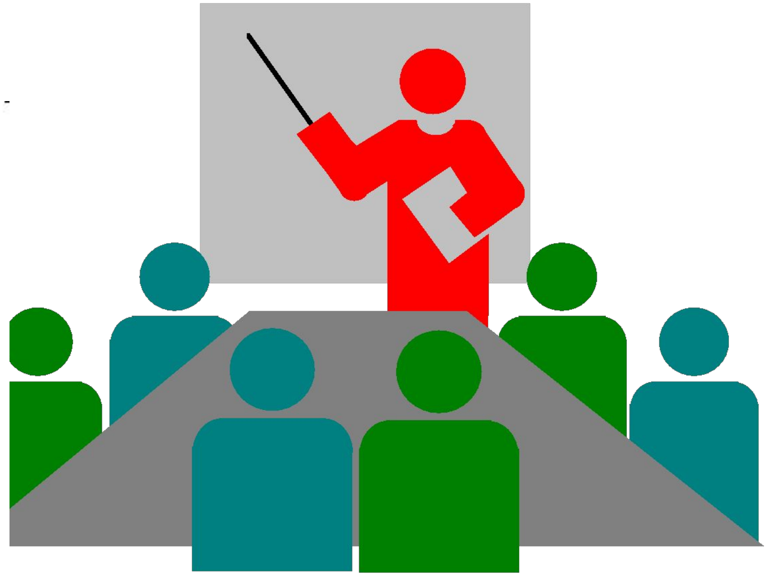
Пример решения системы по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Модуль 2. Комплексные числа

$$i^2 + 1 = 0$$





1. Историческая справка

Впервые мнимые величины появились в работе **Дж. Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах»** в 1545 году.

Пользу мнимых чисел при решении кубических уравнений впервые оценил итальянский ученый **Р. Бомбелли** (1572).

Символ i предложил российский ученый **Л. Эйлер** *(1777,* опубликовано *1794).*

Задача о выражении степени n из комплексного числа была в основном решена в работах английских ученых **А. Муавра (1707, 1724)** и **Р. Котеса** *(1722).*

1. Историческая справка

Термин **«комплексное число»** ввел французский ученый **Л. Карно (1803).**

В употребление термин вошел после работ К. Гаусса **(1831).**

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе датского ученого **К. Весселя (1799).**

Геометрическое представление комплексных чисел называют иногда «диаграммой Аргана» в честь швейцарского ученого **Ж. Аргана.**

Абрахам Муавр *(Moivre)*

(1667 – 1754)

- Абрахам Муавр – английский математик. Муавр нашел (1707) правила возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел.

Карл Фридрих Гаусс *(Gauss)* *(1777 – 1855)*

- Карл Фридрих Гаусс – немецкий математик. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие теории чисел.

Леонард Эйлер *(Eular)* *(1707 – 17830)*

- *Л*еонард Эйлер - математик, академик Петербургской академии наук. В его трудах многие математические формулы и символика впервые получают современный вид (ему принадлежат обозначения для *e*, π, *i*)

2. Требования, предъявляемые к системе комплексных чисел

1. $< \boldsymbol{C}, +, \cdot >$ – поле
2. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение в поле $\boldsymbol{C}$
3. Множество действительных чисел – подмножество множества комплексных чисел и все операции согласованы.

Построение множества комплексных чисел

$\mathbf{C} = \mathbf{R}^2 = \{(a,b)\colon a,b \in \mathbf{R}\}$

Условие равенства:

$(a,b)=(a_1,b_1) \Leftrightarrow a=a_1,\ b=b_1$

Операция сложения:

$(a,b)+(a_1,b_1)=(a+a_1, b+b_1)$

Операция умножения:

$(a,b)\cdot(a_1,b_1)=(aa_1-bb_1,\ ab_1+ba_1)$

(алгебраическая) форма комплексного числа

$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)$,

$(a,0)\to a$, $(b,0)\to b$, $(0,1)\to i$, $i^2=-1$.

$z=a+bi$, a,b – действительные числа,

i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2=-1$.

$a=\mathrm{Re}\ z$ - ***действительная часть*** комплексного числа z.

$b=\mathrm{Im}\ z$ - ***мнимая часть*** комплексного числа z. (иногда мнимой частью называют bi)

Равные комплексные числа

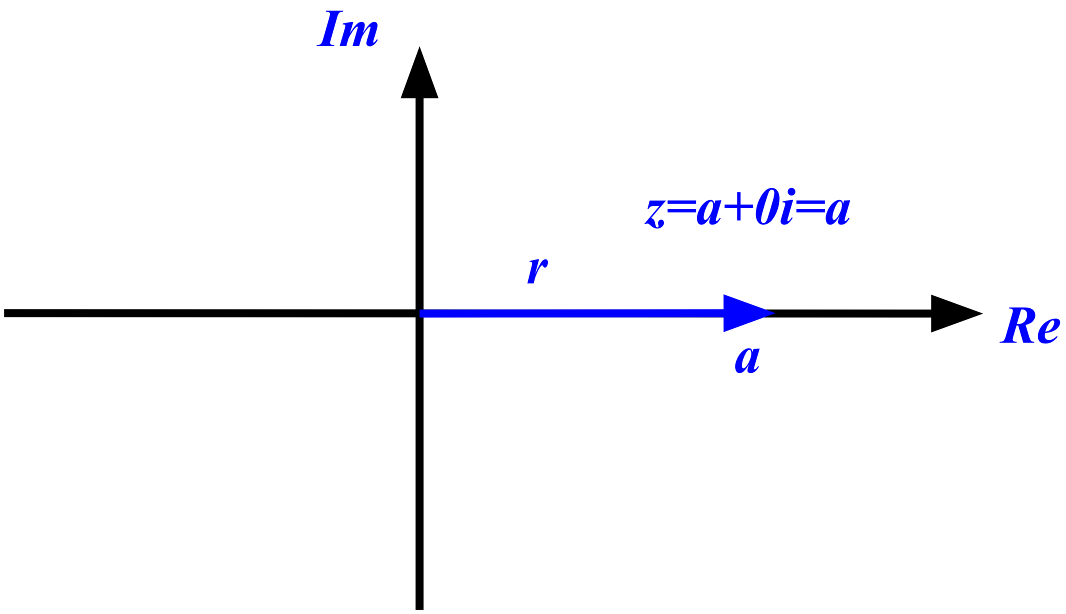
$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$z_1 = z_2$, **если** $a = c$, $b = d$.

Действительные числа

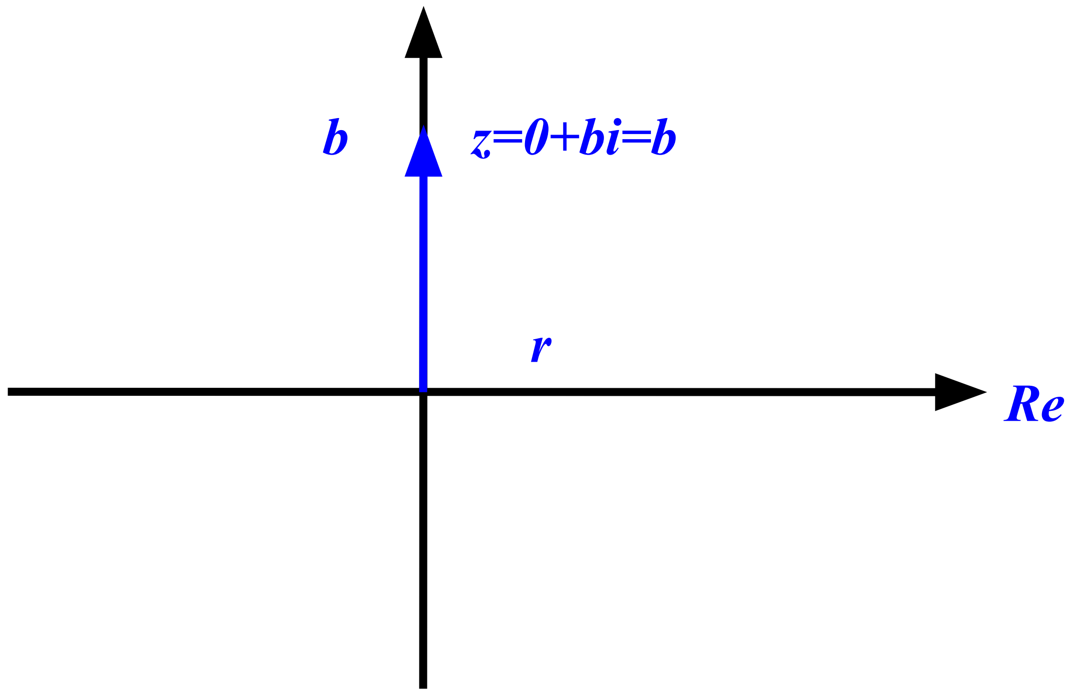
$z=a+0i=a,$

$z=Re\ z$



Чисто мнимые числа

$$z = 0 + bi = bi,\ z = \operatorname{Im} z$$



Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Вычитание: $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

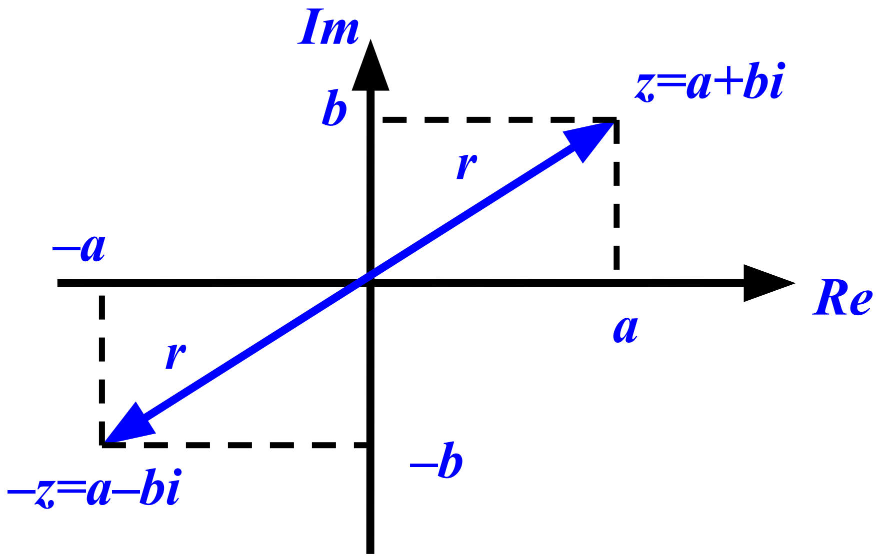
Умножение: $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd) + (ad+bc)i$

Деление: $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Противоположные комплексные числа

$z=a+bi,$

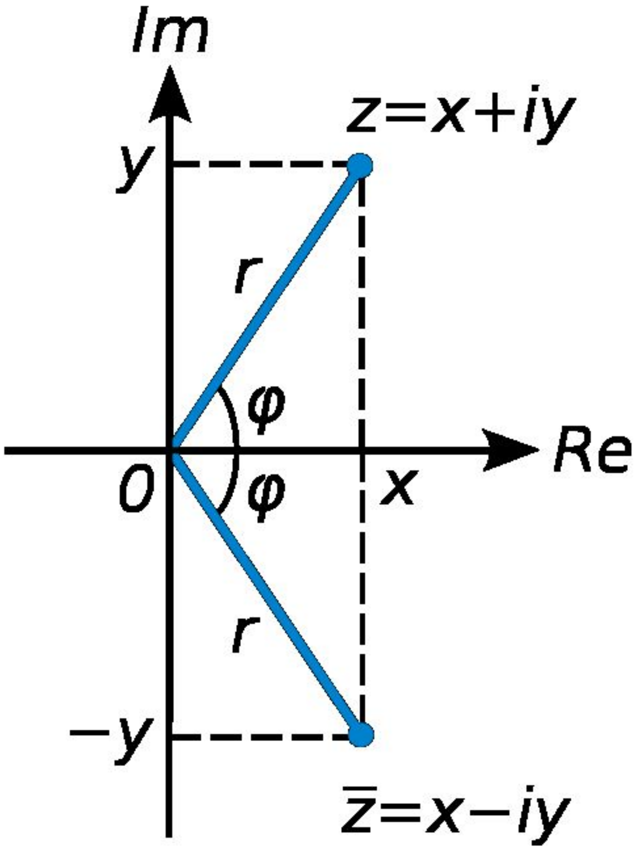
$-z=-a-bi$



Операция комплексного сопряжения

Сопряженные комплексные числа:

$$z = x + yi, \quad \overline{z} = x - yi$$



Свойства операции комплексного сопряжения

$1^0.\quad \overline{z_1} \pm \overline{z_2} = \overline{z_1 \pm z_2}$

$2^0.\quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

$3^0.\quad \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

$4^0.\quad \overline{\overline{z}} = z$

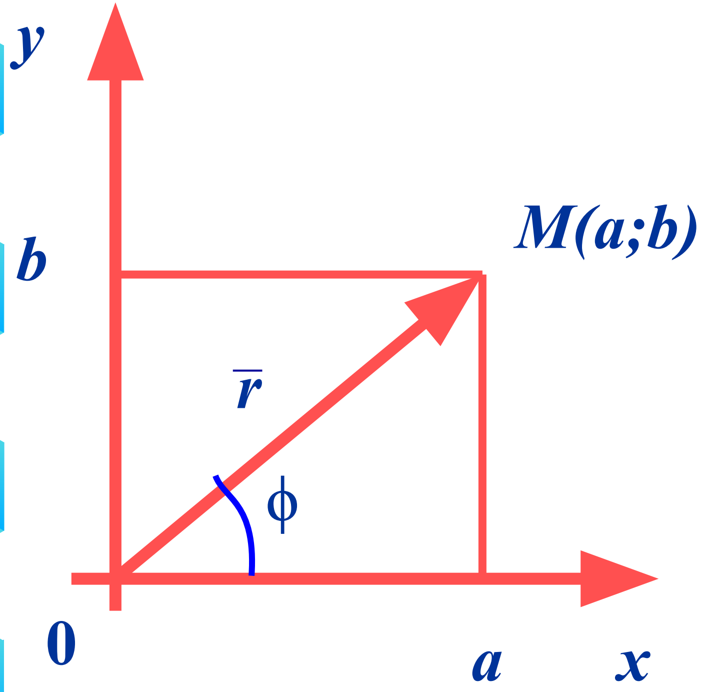
$5^0.\quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

$6^0.\quad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

$7^0.\quad z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z$

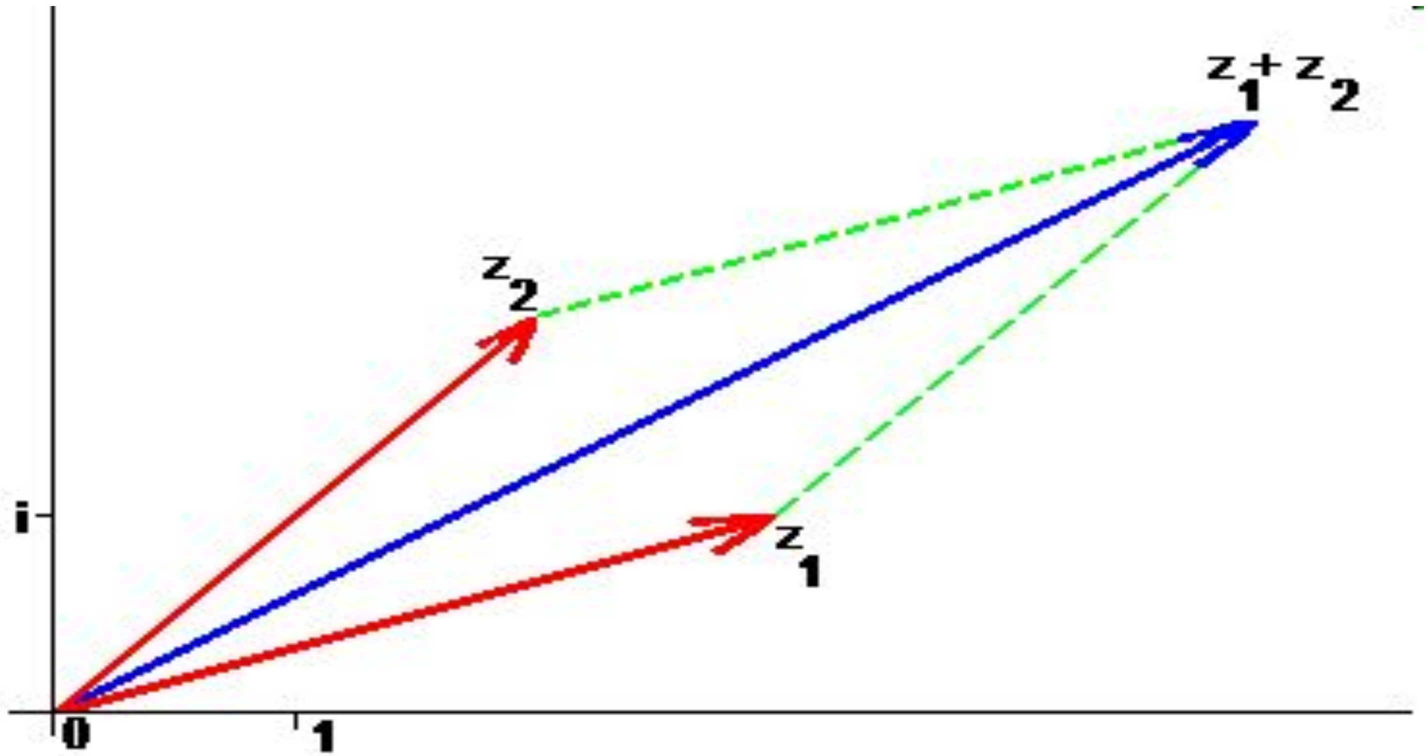
$8^0.\quad z\overline{z} = \left|z\right|^2$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Комплексные числа на плоскости изображаются в прямоугольной декартовой системе координат либо точкой *M(a;b)*, либо радиус-вектором этой точки $\overline{r}=\overline{OM}=(a;\ b)$.

3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел



4. Модуль и аргумент комплексного числа

Модуль комплексного числа

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент комплексного числа

$$\arg z = \phi,$$

$$Sin\,\phi = b/r,$$

$$Cos\,\phi = a/r$$

$$0 \leq \phi < 2\pi.$$

алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической

1. **Найти модуль комплексного числа**

- $z = a + bi$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. **Найти аргумент φ комплексного числа из условий***:*

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

3. **Записать комплексное число в тригонометрическ**

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

тригонометрической формы комплексного числа к алгебраической

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \underbrace{r\cos\varphi}_{a} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{b} = a + bi$$

алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической

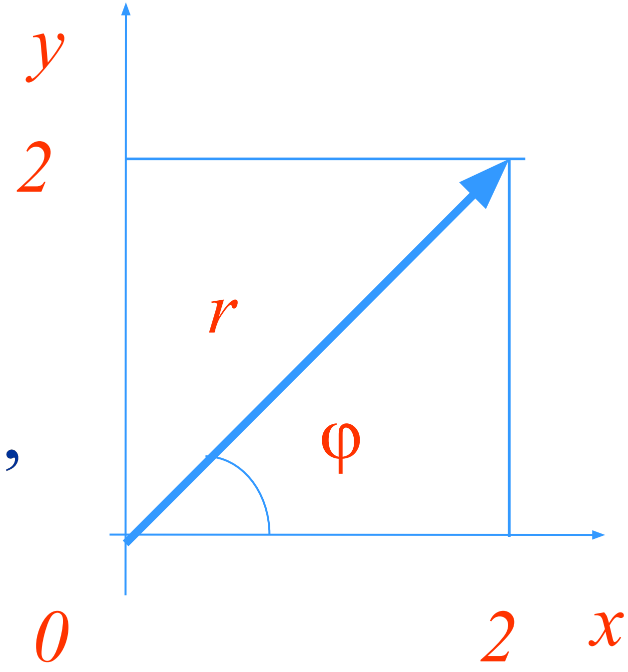
$z = 2 + 2i,$

$a = 2, \quad б = 2,$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$



$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

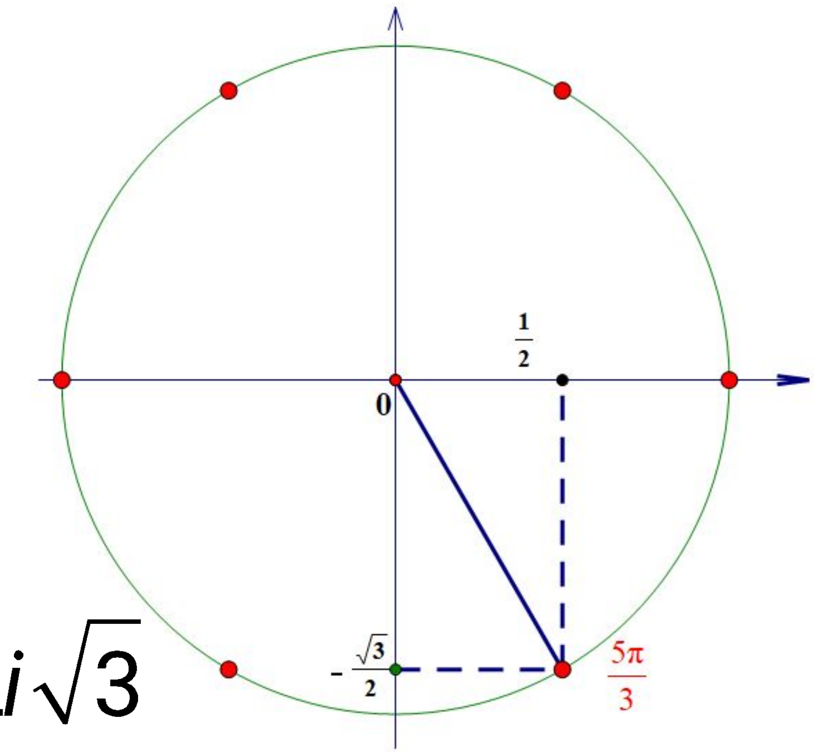
тригонометрической формы комплексного числа к алгебраической

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$$



8. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$(z)^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) - \text{формула Муавра}$$

9. Тригонометрические функции кратного аргумента

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + n\cos^{n-1}\varphi i\sin\varphi + \ldots + (i\sin\varphi)^n$$

10. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

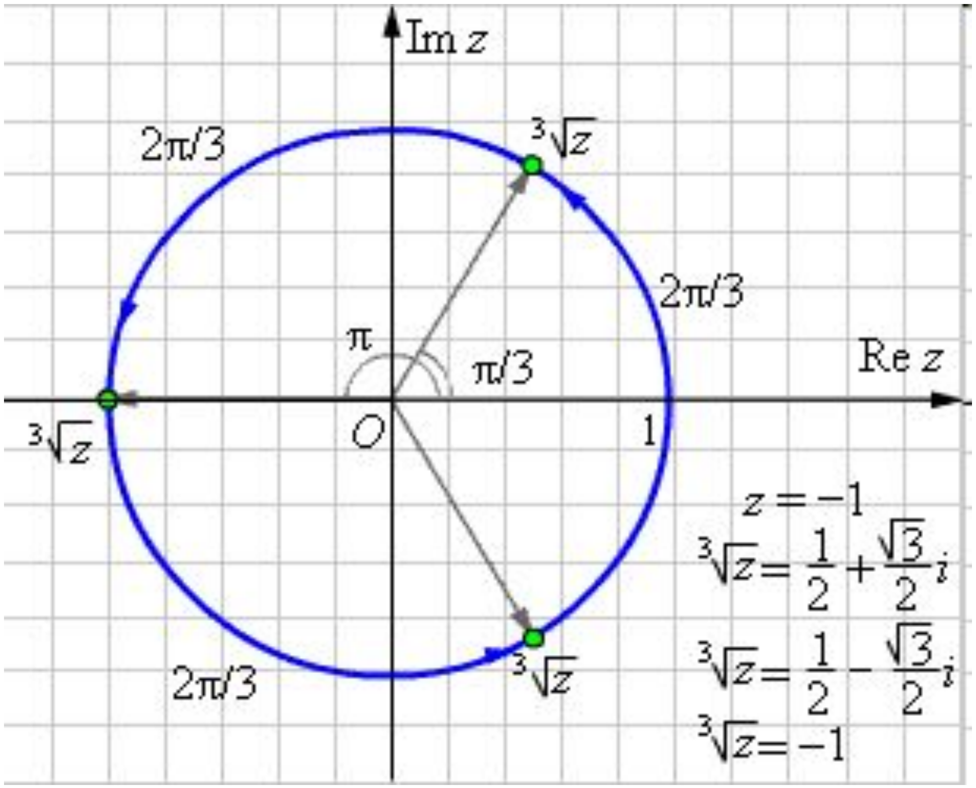
$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$



Алгебраические уравнения

- $ax+b=0$
- $ax^2+bx+c=0$
- $ax^3 + bx^2 + cx + d=0$
- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e =0$

Алгебраические уравнения

- $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$
- $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$
- $x^3 - 6x + 4 = 0$
- $x^3 + 12x - 16i = 0$

Метод Феррари

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
- 3_4 deg.doc