Тема 3. Численные методы линейной алгебры

Тема 3. Численные методы линейной алгебры

Численные методы линейной алгебры:

- **решение систем линейных алгебраических уравнений;**
- **вычисление определителей матриц;**
- **вычисление обратной матрицы;**
- **вычисление собственных значений.**

Основные сведения из теории матриц

Какие бывают матрицы?

- **прямоугольная матрица;**
- **квадратная матрица;**
- **симметричная матрица;**
- **треугольная матрица;**
  - **верхняя треугольная матрица;**
  - **нижняя треугольная матрица;**
- **диагональная матрица;**
- **единичная матрица;**
- **ленточная матрица;**
- **разреженная матрица;**
- **обратная матрица.**

$$[A][A]^{-1} = [E]$$

Основные операции с матрицами

Сложение матриц $[C] = [A] + [B]$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Вычитание матриц $[C] = [A] - [B]$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Умножение матриц $[C] = [A] \cdot [B]$

$$[A] \to [n \times l] \quad [B] \to [l \times m]$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}\, b_{kj} \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Транспонирование матрицы $[A]^T$

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решение системы линейных алгебраических уравнений

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad \textbf{(1)}
$$

В матричном виде

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

Чтобы эта система имела единственное решение, входящие в нее *n* уравнений должны быть линейно независимыми. Необходимым и достаточным условием этого является условие неравенства нулю определителя данной системы.

Решение системы линейных уравнений в Mathcad

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30$$
$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 30$$
$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 6x_4 = 46$$
$$4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 39$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

1-й способ

$$X := A^{-1}B \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2-й способ

$$\mathrm{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений

Алгоритмы решения систем линейных уравнений:

- **прямые;**
- **итерационные.**

Прямые методы:

- **метод исключения Гаусса;**
- **метод исключения Гаусса-Жордана;**
- **метод квадратного корня;**
- **метод Халецкого.**

Все прямые методы основаны на замене исходной системы уравнений эквивалентной системой, имеющей то же решение.

Решение системы линейных алгебраических уравнений

Итерационные методы решения:

- метод простой итерации;
- метод Гаусса-Зейделя.

При использовании итерационных методов необходимо задавать начальные значения неизвестных.

Затем это решение уточняется.

Для итерационных методов существует проблема сходимости итерационного процесса, т.е. решение системы уравнений не всегда может быть получено.

Обычно прямые методы весьма эффективны, в случае больших матриц они уступают итерационным.

Итерационные методы также более предпочтительны при решении разреженных матриц.

Метод исключения Гаусса

Система (1) приводится к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1$$

$$x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2$$

$$\ldots$$

$$x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1}$$

$$x_n = d_n$$

Решение системы $x_n = d_n$

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k\ ; \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Метод исключения Гаусса

2 этапа:

- ***прямой ход*** **– преобразование исходной системы к треугольному виду;**
- ***обратный ход*** **– решение треугольной системы.**

Метод исключения Гаусса

Прямой ход:

$$a_{11} \neq 0 \qquad x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

$$\left(a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} b_1$$

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}; \qquad i = 2,3,\ldots,n; \quad j = 2,3,\ldots,n.$$

$$b_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_i \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

Метод исключения Гаусса

При обнулении k-го столбца

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \dots, n; \quad j = k+1, \dots, n.$$

$$b_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k \qquad i = k+1, \dots, n;$$

$$k = 1,2, \dots, n-1$$

$a_{11},\ a_{22}^{(1)},\ a_{33}^{(2)}$ **ведущие элементы метода Гаусса**

На каждом шаге предполагается $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

Метод исключения Гаусса

$$x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1$$

$$x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2$$

$$\ldots$$

$$x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1}$$

$$x_n = d_n$$

Обратный ход: $x_n = d_n$

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k\,; \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса.

Алгоритм метода исключения Гаусса с выбором главного элемента

При использовании метода исключения Гаусса на каждом шаге предполагается $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

Чтобы избежать этого, на каждом этапе уравнения переставляют так, чтобы на главной диагонали оказался наибольший по модулю элемент *k*-го столбца.

Программа.
Алгоритм метода исключения Гаусса с выбором главного элемента

```
void rsly_gauss(double **a, double *x, int n)
{
  int imax, i, j, k;
  double amax, c;
  //------------------------
  // Прямой ход
  //------------------------
  for (k=0; k<n; k++)
  {
    //------------------------------------------------------
    // Поиск максимального элемента по абсолютной величине
    //------------------------------------------------------
    imax = k;
    amax = fabs(a[k][k]);
    for (i=k+1; i<n; i++)
      if (fabs(a[i][k]) > amax)
      {
     amax = fabs(a[i][k]);
     imax = i;
      }
```

Программа.
Алгоритм метода исключения Гаусса с выбором главного элемента

```
//------------------------------------
// Перестановка строк k и imax
//------------------------------------
if (k!=imax)
{
  for (j = k; j < n; j++)   // переставляем часть строки
  {
c = a[k][j];
a[k][j] = a[imax][j];
a[imax][j] = c;
  }
  c = x[k];
  x[k] = x[imax];
  x[imax] = c;
}
```

Программа.
Алгоритм метода исключения Гаусса с выбором главного элемента

```
    c = 1/a[k][k];
    for (i=k; i<n; i++)
      a[k][i] *= c;
    x[k] *=c;
    for (i=k+1; i<n; i++)
    {
      for (j=k+1; j<n; j++)
    a[i][j] -= a[i][k]*a[k][j];
      x[i] -= a[i][k]*x[k];
    }
  }

  //--------------------------
  // Обратный ход
  //--------------------------
  for (i=n-2; i>=0; i--)
    for (j=i+1; j<n; j++)
      x[i] -= a[i][j]*x[j];
} // rsly_gauss
```

Программа.
Алгоритм метода исключения Гаусса
с выбором главного элемента

```
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
  double **a, *x;
  int i, j, k, n = 4;

  a = new double *[n];
  for (i=0; i<n; i++)
    a[i] = new double[n];
  x = new double[n];

  //  Ввод системы уравнений
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    for (j=0; j<n; j++)
      a[i][j] = StrToFloat(StringGrid1->Cells[j][i]);
    x[i] = StrToFloat(StringGrid2->Cells[0][i]);
  }
```

Программа.
Алгоритм метода исключения Гаусса
с выбором главного элемента

```
  rsly_gauss(a, x, n);

  for (i=0; i<n; i++)
    StringGrid3->Cells[i][0] = FloatToStrF(x[i], ffFixed, 10, 3);

  delete[] x;
  for (i=n-1; i>=0; i--)
    delete[] a[i];
  delete[] a;
}
```

Задание. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса с выбором главного элемента.

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса с выбором главного элемента.

Метод исключения Гаусса-Жордана

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
&\ldots \\
x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n &= d_{n-1} \\
x_n &= d_n
\end{aligned}
$$

Задание. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса-Жордана.

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса-Жордана.

Вычисление определителей

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов

Задание. Написать программу вычисления определителя.

Задание. Вычислить определитель матрицы.

Вычисление обратной матрицы

$$[A][A]^{-1} = [E]$$

Задание. Написать программу вычисления обратной матрицы.

Задание. Вычислить обратную матрицу.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод простой итерации

$$[A]\{X\} = \{B\} \qquad (1)$$

$$([E] + [A] - [E])\{X\} = \{B\}$$

$$[E]\{X\} = ([E] - [A])\{X\} + \{B\}$$

$$\{X\} = [C]\{X\} + \{B\} \qquad (2)$$

$$\{X^{(k+1)}\} = [C]\{X^{(k)}\} + \{B\} \qquad (3)$$

Условие сходимости

Для сходимости процесса последовательных приближений (3) при любом начальном векторе $\{X^{(0)}\}$ необходимо и достаточно, чтобы при все собственные значения матрицы $[C]$ были бы по модулю меньше единицы.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод Якоби

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Условие сходимости

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Если данное условие не выполняется, необходимо соответствующим образом преобразовать СЛАУ. Это можно сделать, выполнив эквивалентные преобразования системы:

- **перестановка строк;**
- **линейная комбинация строк.**

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Пример

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

$$x_1 = \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}$$

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод Гаусса-Зейделя (Зейделя)

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

$$\{X\} = [C]\{X\} + \{B\}$$

$$[C] = [E] - [A]$$

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

Задание

Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом.

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом с точностью 10^{-3}.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

Если матрица коэффициентов А – квадратная и невырожденная, в этом случае рассматриваемая СЛАУ имеет единственное решение.

Вырожденной называется матрица, не имеющая обратной.

На практике встречаются матрицы (и соответствующие системы уравнений), «близкие» к вырожденным.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Пример 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3{,}999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7{,}999 \end{bmatrix}. \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3{,}999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4.001 \\ 7{,}998 \end{bmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3{,}999 \\ 4{,}000 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}001 & 2{,}001 \\ 2{,}001 & 3{,}998 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7{,}999 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}994 \\ 0{,}001388 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений считается *плохо обусловленной*, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают большие изменения в решении.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Пример 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \qquad (2) \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}001 \\ 7{,}001 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}999 \\ 1{,}001 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}001 & 2{,}001 \\ 2{,}001 & 3{,}001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}003 \\ 0{,}997 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений считается *хорошо обусловленной*, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают малые изменения в решении.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Как можно вычислить число обусловленности матрицы?

Норма матрицы – это число (скаляр)

1. ∞-норма матрицы – это максимальная сумма модулей элементов каждой из строк матрицы (матричная норма на бесконечности (бесконечная норма)):

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Встроенная функция в Mathcad: normi(A)

2. 1-норма – это максимальная сумма модулей элементов каждого из столбцов матрицы:

$$\|A\|_{1} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| .$$

Встроенная функция в Mathcad: norm1(A)

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

3. 2-норма (евклидова норма) – длина вектора в *n*-мерном пространстве (корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы):

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}$$

Встроенная функция в Mathcad: norme(A)

Примечание. Mathcad вычисляет нормы только квадратных матриц.

Пример использования встроенных функций в Mathcad

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathrm{normi}(A) = 17 \qquad \mathrm{norm1}(A) = 18 \qquad \mathrm{norme}(A) = 15.78$$

В примере вычисляются с учебной целью все нормы.
На практике обычно выбирается какая-то одна норма.
Все нормы конкретной матрицы приблизительно одинаковы – как правило, различие не выходит за пределы одного порядка.
Матричные нормы – величины оценочные, поэтому нет разницы, какую из них использовать.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{norm1}(A) = \blacksquare$$

This matrix must be square.

Задание. Написать программу для вычисления нормы матрицы.

Задание. Вычислить норму матрицы.

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Число обусловленности матрицы

$$cond = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Число обусловленности оценивает близость матрицы коэффициентов А к вырожденной.
Всегда $Cond(A) \geq 1$.
Если $Cond(A) \geq 1000$ **– матрица [*A*] плохо обусловлена.**
Если $1 \leq Cond(A) \leq 100$ **– матрица [А] считается хорошо обусловленной.**

Встроенные функция в Mathcad: condi(A), cond1(A), conde(A)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{condi}(A) = 35988 \qquad \mathrm{normi}(A)\cdot\mathrm{normi}\left(A^{-1}\right) = 35988$$

$$\mathrm{cond1}(A) = 35988 \qquad \mathrm{norm1}(A)\cdot\mathrm{norm1}\left(A^{-1}\right) = 35988$$

$$|A| = -0.001 \qquad \mathrm{conde}(A) = 24992 \qquad \mathrm{norme}(A)\cdot\mathrm{norme}\left(A^{-1}\right) = 24992$$

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 399.9 \end{pmatrix} \qquad |A| = -10$$

$$\mathrm{condi}(A) = 35988$$

$$\mathrm{cond1}(A) = 35988$$

$$\mathrm{conde}(A) = 24992$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{condi}(A) = 25$$

$$\mathrm{cond1}(A) = 25$$

$$\mathrm{conde}(A) = 18$$

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{condi}(A) = \blacksquare}$$

This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$|A| = 0$$

Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Задание. Написать программу для вычисления числа обусловленности матрицы.

Задание. Вычислить число обусловленности матрицы.

Задание №3 (вариант 1)

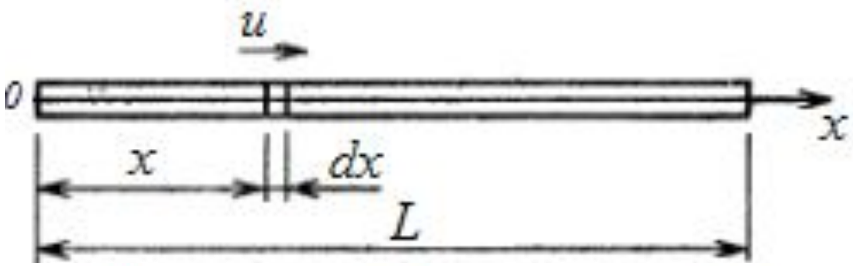
1. Решить в Mathcad систему линейных алгебраических уравнений и вычислить определитель , норму и число обусловленности матрицы.
2. Написать программу решения системы линейных уравнений с использованием метода исключения Гаусса с выбором главного элемента.
3. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса-Жордана.
4. Написать программу вычисления определителя матрицы.
5. Написать программу вычисления обратной матрицы.
6. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом.
7. Написать программу вычисления нормы матрицы.
8. Написать программу вычисления числа обусловленности матрицы.

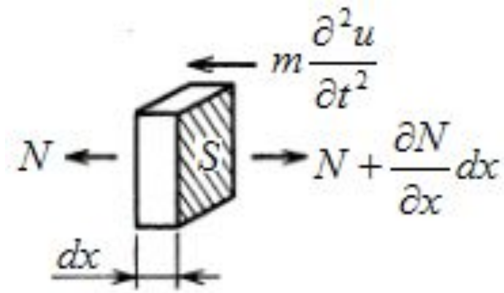
Задание №3 (вариант 2)

1. Решить в Mathcad систему линейных алгебраических уравнений и вычислить определитель, норму и число обусловленности матрицы.
2. Решить систему линейных уравнений с использованием метода исключения Гаусса.
3. Написать программу решения системы линейных уравнений с использованием метода исключения Гаусса с выбором главного элемента.
4. Решить систему линейных уравнений с использованием метода исключения Гаусса с выбором главного элемента.
5. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса-Жордана.
6. Вычислить определитель матрицы.
7. Вычислить обратную матрицу.
8. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом с точностью 10^{-3}.
9. Написать программу вычисления нормы матрицы.
10. Вычислить норму матрицы.
11. Написать программу вычисления числа обусловленности матрицы.
12. Вычислить число обусловленности матрицы.

Решение собственной задачи

Продольные колебания стержня





$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x}dx - N = \frac{\partial N}{\partial x}dx$$

$$N = \sigma S = E\varepsilon S = ES\frac{\partial u}{\partial x} \qquad m = \rho S dx$$

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Продольные колебания стержня

Метод Фурье

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$T(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t$$

$$T(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t)$$

$$T(t) = \sin \omega t$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot \sin \omega t$$

$$-\omega^2 X \cdot \sin \omega t = a^2 X'' \cdot \sin \omega t$$

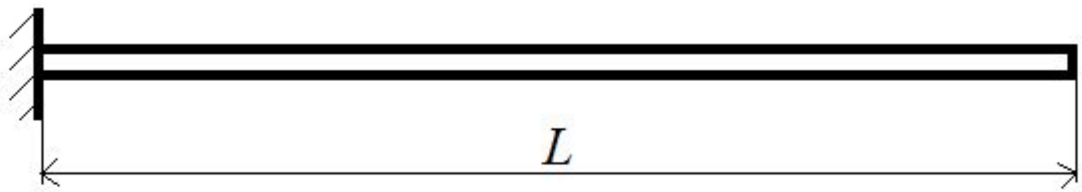
$$X'' + \frac{\omega^2}{a^2} X = 0$$

$k = \dfrac{\omega}{a}$ **– волновое число**

$$X'' + k^2 X = 0$$

$$X = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Продольные колебания стержня



Граничные условия $X = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$

1) при $x = 0 \quad u = 0 \quad X = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

2) при $x = L \quad \varepsilon = 0 \quad \dfrac{du}{dx} = 0 \quad \dfrac{dX}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad kC_2 \cos kL = 0$

$\cos kL = 0$ **– частотное (характеристическое) уравнение**

$kL = \dfrac{\pi}{2} + i\pi \qquad \omega = ka$

$\omega_i = \dfrac{2i+1}{2L}\pi a$ **– собственные частоты колебаний**

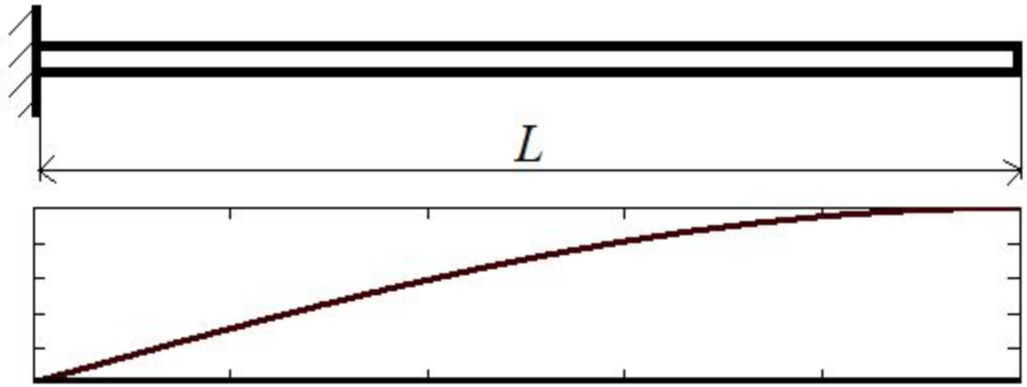
$X = C_2 \sin kx$ **– собственные формы колебаний**

Продольные колебания стержня

$$X = C_2 \sin \frac{2i+1}{2L} \pi x$$

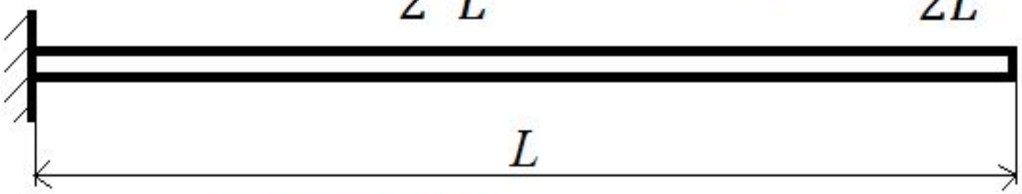
Из решения собственной задачи коэффициент C_2 не может быть определен.

$$i = 0 \qquad \omega = \frac{\pi a}{2L} \qquad X = C_2 \sin \frac{\pi x}{2L}$$

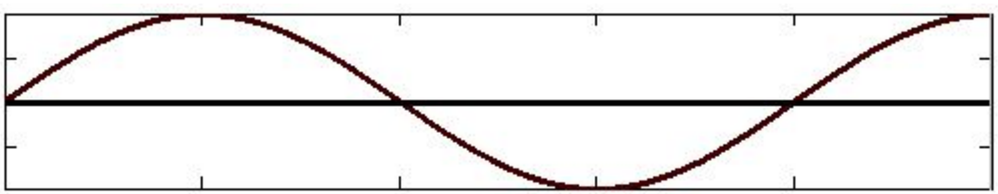


Продольные колебания стержня

$$i = 1 \qquad \omega = \frac{3}{2}\frac{\pi a}{L} \qquad X = C_2 \sin\frac{3\pi x}{2L}$$

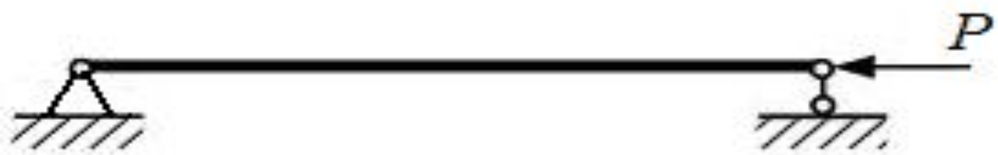


$$i = 2 \qquad \omega = \frac{5}{2}\frac{\pi a}{L} \qquad X = C_2 \sin\frac{5\pi x}{2L}$$



Устойчивость стержней

Задача Эйлера – задача о равновесии стержня, сжатого центральными силами



При малых прогибах $EIy'' = M$

$$M = -Py \qquad EIy'' = -Py \qquad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Граничные условия

1) $y(0) = 0 \quad => \quad C_2 = 0$

2) $y(L) = 0 \quad => \quad C_1 \sin kL = 0$

$$C_1 = 0 \quad C_1 = C_2 = 0$$

Устойчивость стержней

$$\sin kL = 0 \qquad => \qquad kL = \pi n \qquad k = \frac{\pi n}{L}$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \qquad P = EIk^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} EI$$

$$n = 1 \qquad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

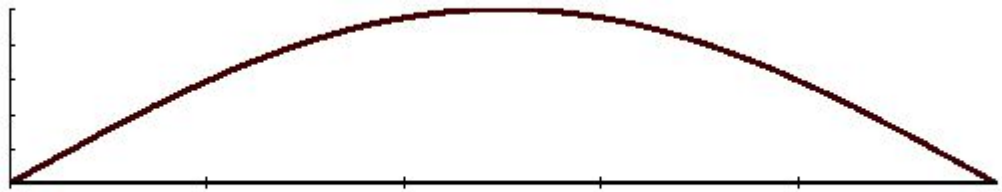
$$k = \frac{\pi}{L} \qquad => \qquad y = C_1 \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$k = \frac{\pi n}{L} \qquad => \qquad y = C_1 \sin\frac{\pi n x}{L}$$

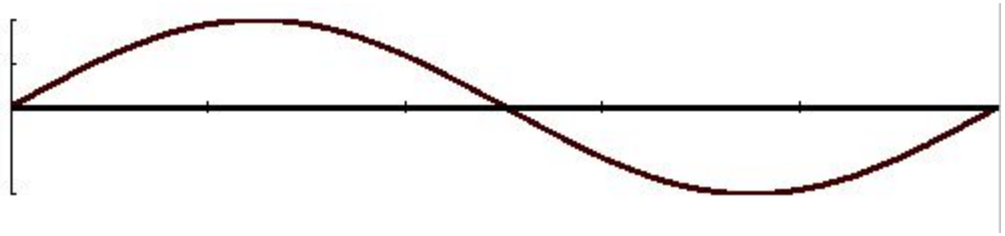
Устойчивость стержней

$$y = C_1 \sin\frac{\pi n x}{L}$$

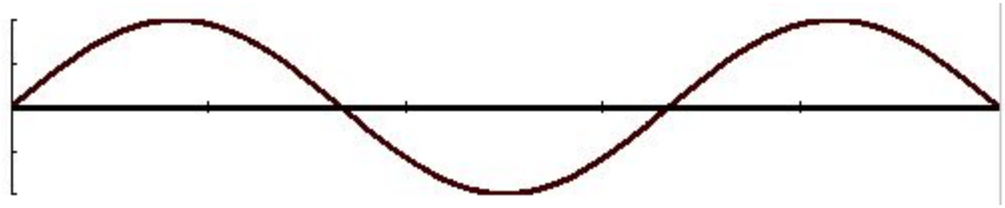
$n = 1 \quad y = C_1 \sin\frac{\pi x}{L}$



$n = 2 \quad y = C_1 \sin\frac{2\pi x}{L}$



$n = 3 \quad y = C_1 \sin\frac{3\pi x}{L}$



Модальный анализ конструкций

Решение собственной задачи
Модальный анализ **– определение собственных частот и форм колебаний**

Типы систем

- **системы с сосредоточенными параметрами;**
- **системы с распределенными параметрами.**

Модальный анализ конструкций

Уравнение свободных колебаний

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \qquad (1)$$

$$\{X\} = \{X_a\}\sin\omega t \qquad (2)$$

$$\left([K] - \omega^2[M]\right)\{X_a\} = 0 \qquad (3)$$

$$\left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0 \qquad (4)$$

Задача на собственные значения для матриц

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\} \qquad (1)$$

$$([A] - \lambda[E])\{X\} = 0 \qquad (2)$$

$$|[A] - \lambda[E]| = 0 \qquad (3)$$

Собственным значением матрицы [A] называется такое число λ, для которого существует собственный вектор, т.е. уравнение (1) имеет ненулевое решение .

Уравнение (3) – определение собственных значений.

Уравнение (2) – определение собственных векторов.

Решение собственной задачи в Mathcad

eigenvals(M) – определение собственных значений

eigenvecs(M) – определение собственных векторов

$$ORIGIN := 1$$

$$M := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad eigenvals(M) = \begin{pmatrix} 9.348 \\ 3.73 \\ 1.921 \end{pmatrix}$$

$$X := eigenvecs(M) = \begin{pmatrix} -0.365 & -0.776 & 0.515 \\ -0.637 & -0.195 & -0.746 \\ -0.679 & 0.6 & 0.423 \end{pmatrix}$$

Решение собственной задачи в Mathcad

Свойства собственных векторов:

- **свойство ортогональности – два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.**

$$\{X_i^T\}\{X_j\} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j$$

$$\{X_i^T\}\{X_j\} \neq 0 \quad \text{при} \quad i = j$$

$$X^{\langle 1\rangle} \cdot X^{\langle 2\rangle} = 0 \qquad X^{\langle 1\rangle} \cdot X^{\langle 1\rangle} = 1 \qquad X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нормировка собственных векторов:

$$\{X_i^T\}\{X_j\} = 1 \quad \text{при} \quad i = j$$

Ортогональные матрицы

Ортогональная матрица:

$$[A][A]^T = [E]$$

Сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице и суммы произведений соответствующих элементов из двух различных столбцов равны нулю.

Если [A] – ортогональна, то

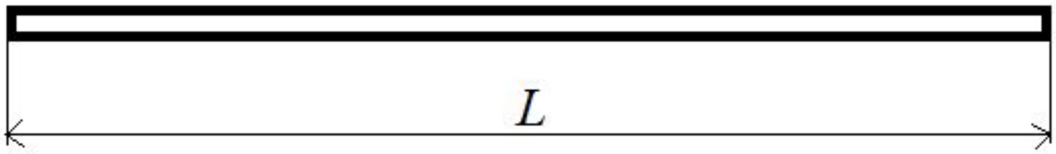
$$[A]^{-1} = [A]^T$$

Определитель ортогональной матрицы равен ±1.

Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.

Задание №4

1. Найти собственные частоты и собственные формы колебаний стержня. Проверить ортогональность собственных форм



2. Вычислить собственные значения и собственные вектора матрицы в Mathcad.

3. Написать программу для вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы.

Спасибо
за внимание!