

Системи масового обслуговування





Характеристики ефективності функціонування СМО

- середня кількість вимог, які система може обслужити за одиницю часу;
- середній відсоток вимог, які не були обслужені;
- ймовірність того, що вимогу, яка надійшла до системи, буде прийнято для обслуговування;
- середній час очікування вимоги в черзі;
- закон розподілу часу очікування;
- середня кількість вимог у черзі;
- закон розподілу числа вимог у черзі;
- коефіцієнт завантаження пристрою для обслуговування;
- середня кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням.



Основні характеристики СМО

- вхідний потік вимог – вимоги, які надходять до СМО на обслуговування;
- дисципліна черги;
- механізм обслуговування, правила, за якими здійснюється обслуговування;
- вихідний потік вимог – вимоги, які залишають систему;
- режими роботи системи.



Вхідний потік вимог

- Регулярний

$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_n$, де $\Delta t_i = \text{const}$

- Випадковий

$\Delta t_1 \neq \Delta t_2 \neq \dots \neq \Delta t_n$, де $\Delta t_i = \text{var}$

- Стаціонарний

$x(t_1 + b) - x(tb)$, $x(t_2 + b) - x(tb)$, ..., $x(t_n + b) - x(tb)$

- Ординарний

$$\lim_{t_i \rightarrow 0} \frac{P_j(t_i)}{t_i} = 0$$

- Незалежний (відсутність післядії)

Характеристики СМО

- Функція розподілу часу обслуговування $V(t)$

$$V(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$$

де $\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл.}}}$ -інтенсивність обслуговування

- Інтенсивність вхідного потоку - λ

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{надх.}}}$$

Одноканальна СМО

- Одноканальна СМО з відмовами



- Одноканальна СМО з обмеженою чергою



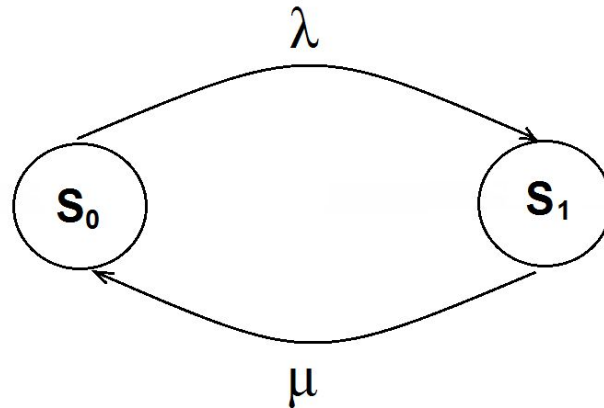
- Одноканальна СМО з очікуванням



- Одноканальна СМО з обмеженим часом очікування



Граф станів одноканальної СМО



S_0 – канал вільний (очікування)

S_1 – канал зайнятий (обслуговування)

P_0 – ймовірність, що канал вільний

P_1 – ймовірність, що канал зайнятий.



Рівняння Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) \end{cases} \quad P_0(t) + P_1(t) = 1$$

Розв'язок системи має вигляд:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

При $t \rightarrow \infty$, тому

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Ймовірність відмов:

$$P_e = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

ЗАДАЧА1. Нехай одноканальна СМО – це процесор.

Інтенсивність потоку задач – $\lambda = 1,0$ в хв. Середній час обслуговування – $1,8$ хв. Потік заявок і потік обслуговування – найпростіші. **Визначити** в установленому режимі:

- відносну пропускну здатність;
- абсолютну пропускну здатність;
- ймовірність відмов.

1. Інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл.}}} = \frac{1}{1.8} = 0.555$$

2. Відносна пропускну здатність

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0.555}{1 + 0.555} = 0.356$$

3. Абсолютна пропускну здатність

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0.356 = 0.356$$

4. Рвід = $1 - q = 1 - 0.356 = 0.644$

5. Номінальна пропускну здатність

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1.8} = 0.555$$

Одноканальна СМО

Основні характеристики для одноканальної системи з відмовами:

1. Ймовірність простою системи

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

2. Ймовірність відмов системи

$$P_s = P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

3. Коефіцієнт завантаження пристрою

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Відносна та абсолютна пропускні здатності системи

Одноканальна СМО з обмеженою чергою

1. Ймовірність простою системи

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{(N+1)}}$$

2. Ймовірність знаходження системи в стані n

$$P_n = P_0 \rho^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \rho \neq 1$$

$$P_n = \frac{1}{N+1}, \quad \rho = 1.$$

3. Ймовірність відмовлення в обслуговуванні заявки:

$$P_{vid} = P_N$$

4. Відносна пропускна здатність СМО:

$$q = 1 - P_{vid}$$

5. Середнє число заявок, що знаходяться в СМО:

$$L_c = \sum_{n=0}^N n P_n$$

6. Середній час перебування заявки в СМО:

$$T_c = \frac{L_c}{\lambda(1 - P_N)}$$

7. Середня тривалість перебування заявки у черзі:

$$T_q = T_c - \frac{1}{\mu}$$

8. Середнє число заявок у черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)$$

Багатоканальна СМО з відмовами

1. Ймовірність простою системи:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}$$

2. Ймовірність того, що зайнято рівно k каналів обслуговування:

$$P_k = \frac{\rho^k P_0}{k!}$$

3. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням: $K_c = \rho(1 - P_{vid})$

4. Ймовірність відмов, абсолютну та відносну пропускні здатності.

Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

n - кількість пристроїв обслуговування;
 m - кількість вимог в системі;
 u - ємність буфера.

1. Ймовірність простою системи:

$$P_0 = \left[\sum_{k=1}^n \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=n+1}^m \frac{m!}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right]^{-1}$$

2. Ймовірність того, що в СМО зайнято точно k пристроїв обслуговування:

$$P_k = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0, \text{ для } (1 \leq k \leq n)$$

Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

3. Ймовірність того, що в системі знаходиться k задач, коли зайняті всі пристрої обслуговування:

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$$

4. Середня довжина черги:

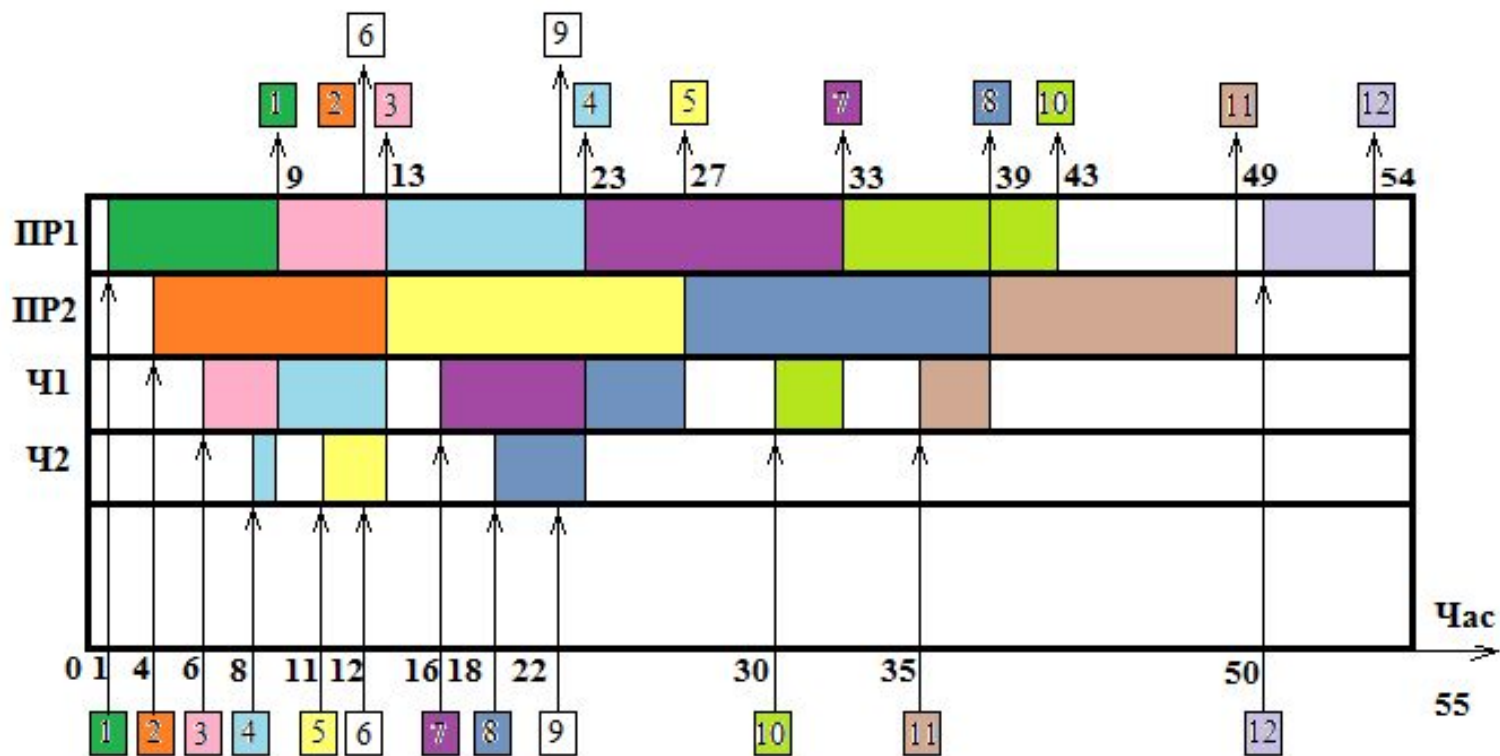
$$L_q = \sum_{k=n+1}^m \frac{(k-n) \cdot m!}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$$

5. Середнє число задач, що знаходяться в системі:

$$M_s = \left[\sum_{k=1}^n \frac{m!}{(k-1)! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=n+1}^m \frac{k \cdot m!}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] \cdot P_0$$

Побудова часової діаграми СМО

№ ВИМОГИ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_{\text{надходж}}$	1	4	6	8	11	12	16	18	22	30	35	50
$T_{\text{обслугов}}$	8	9	4	10	14	8	10	12	5	10	10	4



Визначення основних характеристик ефективності роботи СМО

1. Ймовірність обслуговування вимоги:

2. Пропускна здатність СМО: $P_{об} = \frac{N_{об}}{N} = \frac{10}{12} = 0,83$

3. Ймовірність відмови в обслуговуванні: $P_{від} = \frac{N_{від}}{N} = \frac{2}{12} = 0,167$

4. Ймовірність того, що вимога застане 2 пристрої вільними:

$$P_0 = \frac{T_{віль}}{T_{сп}} = \frac{3}{55} = 0,05$$

Визначення основних характеристик ефективності роботи СМО

5. Ймовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій:

6. Ймовірність того, що обслуговуванням зайняті 2 пристрої:

7. Середня кількість пристроїв зайнятих обслуговуванням:

8. Ймовірність того, що в черзі відсутні вимоги:

$$P_{\text{чер}} = \frac{T_{\text{чер}}^0}{T_{\text{cn}}} = \frac{30}{55} = 0,545$$

Визначення основних характеристик ефективності роботи СМО

9. Ймовірність того, що в черзі 1 вимога:

10. Ймовірність того, що в черзі 2 вимоги:

$$\frac{T_{\text{чер}}^1}{T_{\text{сн}}} = \frac{(6-4) + (11-9) + (18-16) + (27-23) + (33-30) + (39-35)}{55} = \frac{17}{55} = 0,309$$

11. Середня кількість вимог в черзі:

$$\frac{T_{\text{чер}}^2}{T_{\text{сн}}} = \frac{(9-8) + (13-11) + (23-18)}{55} = \frac{8}{55} = 0,145$$

12. Середній час перебування вимог в черзі:

$$\frac{N_{\text{об}}}{N} = \frac{0P_0 + 1P_1 + 2P_2}{2} = 0,6$$

$$k_{\text{об}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_{iu}}{N_{\text{об}}} = \frac{3+5+3+7+9+3+4}{10} = \frac{33}{10} = 3,3$$

Визначення основних характеристик ефективності роботи СМО

13. Середній час обслуговування вимоги пристроями:

14. Загальний середній час перебування вимоги у СМО:
$$k_{об} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_{об}}{N_{об}} = \frac{91}{10} = 9,1$$

15. Середня кількість вимог у системі обслуговування:

$$\bar{N} = N_n + N = 0,6 + 1,654 = 2,254$$