5.5. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны. Стоячие волны — волны, образующиеся при наложении двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две бегущие синусоидальные волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда фазы обеих волн равны нулю. Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x, и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид

$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$. (5.5.1)

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ (см. (5.1.3)), получим уравнение стоячей волны:

$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos \omega t = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\cos \omega t$. (5.5.2)

Из уравнения стоячей волны (5.5.2) вытекает, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты ω с амплитудой $A_0 = |2A\cos(2\pi x/\lambda)|$, зависящей от координаты x рассматриваемой точки.

В точках среды, где $2\pi x/\lambda = \pm m\pi$ $(m=0, 1, 2,...)$, (5.5.3)

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения, равного $2A$. В точках среды, где

$2\pi x/\lambda = \pm(m + 1/2)\pi$ $(m = 0, 1, 2,...)$, (5.5.4)

амплитуда стоячей волны обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда стоячей волны максимальна $(A_{ст} = 2A)$, называются пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда стоячей волны равна нулю ($A_{ст} = 0$), называются узлами стоячей волны.

Из выражений (5.5.3) и (5.5.4) получим соответственно *координаты пучностей и узлов:*

$$x_п = \pm m\lambda/2 \ (m = 0,1,2,...), \tag{5.5.5}$$

$$x_{узл} = \pm(m + 1/2)\lambda/2 \ (m = 0, 1, 2,...). \tag{5.5.6}$$

Из формул (5.5.5) и (5.5.6) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\pi/4$.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с *одинаковой амплитудой*, но *с запаздыванием по фазе* в уравнении (5.5.1) бегущей волны фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки), все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с *разными амплитудами,* но с *одинаковыми фазами* (в уравнении (5.5.2) стоячей волны аргумент косинуса не зависит от x). При переходе через узел множитель $2A\cdot\cos(2\pi x/\lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π, т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдают обычно при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае получается узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность (рис. 5.3, а), если более плотная - узел (рис. 5.3,*б*). Образование узла связано с тем. что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний противоположных направлений, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами — получается пучность.

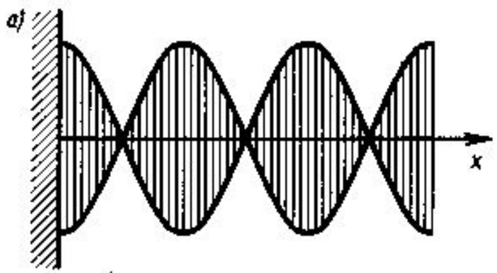
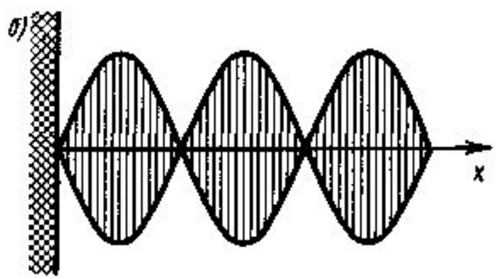


Рис.5.3



Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения, В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Сегодня: *

Лекция 6

Тема: Эффект Доплера

Содержание лекции:

6.1. Эффект Доплера в акустике;

6.2. Эффект Доплера в оптике;

6.3. Волновое уравнение

6.1. Эффект Доплера в акустике

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем тот сигнал того же электропоезда, но неподвижного. Это явление теоретически было обосновано в 1824 г. австрийским физиком Доплером.

Звуковой эффект Доплера – изменения частоты волны*, принимаемой приемником, при движении источника волн или приемника относительно среды, в которой распространяется волна.*

(Источник, двигаясь к приемнику как бы сжимает пружину – волну). Скорость будет со знаком (+), если движение на встречу.Источник испускает колебания с частотой ν_0. Эта волна распространяется в среде (воздухе) со скоростью u. *За одну секунду* волна *уйдет на расстояние* u, но за это же время источник приблизится на расстояние $u_{ист}$. Следовательно, длинна волны:

$$\lambda_1 = \frac{\upsilon - \upsilon_{ucm}}{\nu_0} \qquad (6.1.1)$$

отсюда приемник воспринимает другую частоту

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{\lambda_1} = \nu_0 \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{ucm}} \qquad (6.1.2)$$

(чем больше $\upsilon_{\text{ист}}$ тем больше частота)

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\upsilon_{ucm}}{\upsilon}}$$

А если еще и приемник движется навстречу источнику? Тогда воспроизводимая частота

$$\nu = \nu_1 + \Delta\nu \qquad (6.1.3)$$

где $\Delta v = \dfrac{\upsilon_{пр}}{\lambda_1}$. (Приемник со своей стороны дополнительно сжал столько (Δv) длин волн). Найдем λ_1 из (6.1.1)

$$\Delta v = \frac{\upsilon_{пр} v_0}{\upsilon - \upsilon_{ист}}$$

и подставим в (6.1.3), получим $v = v_0 \dfrac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{ист}} + v_0 \dfrac{v_{пр}}{\upsilon - \upsilon_{ист}}$ и в итоге

$$v = v_0 \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon - \upsilon_{ист}}$$ или так $$v = v_0 \frac{1 + \frac{\upsilon_{пр}}{\upsilon}}{1 - \frac{\upsilon_{ист}}{\upsilon}},$$

(6.1.4)

это если источник и приемник приближаются друг к другу. Если удаляются, то знаки меняются. Если источник и приемник движутся под разными углами к прямой их соединяющей, то

$$v = v_0 \frac{\upsilon + \upsilon_{пр} \cos(\theta_2)}{\upsilon - \upsilon_{ист} \cos(\theta_1)}$$

(6.1.5)

При оптическом эффекте Доплера путь решения такой же, только вместо скорости распространения волны υ в среде фигурирует скорость распространения света (электромагнитной волны)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \upsilon/c}{1 - \upsilon/c}}$$

Так как скорость света всегда постоянна. Такие понятия как скорость «источника» и скорость «приемника» относительно среды не имеют смысла и υ – относительная скорость (скорость приемника относительно источника или наоборот).

6.2. Оптический эффект Доплера

В акустике изменение частоты, обусловливающие эффект Доплера, определяется *скоростями движения приемника и источника* по отношению к *среде*, являющейся носителем звуковых волн. Скорость звука определяется свойствами среды, а не скоростью источника. Для световых волн также существует эффект Доплера, но здесь нет среды носителя электромагнитных волн. Доплеровское смещение частоты световых волн определяется *только относительной скоростью источника и приемника.*

Источник находится в k – системе, а приемник в системе k'. k‘ (приемник) движется относительно (источника) k со скоростью .

Уравнение плоской световой волны в системе k:

$$E(x,t) = E_0 cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \tag{6.2.1}$$

ω - частота колебаний источника (предполагается, что свет распространяется в вакууме, т.е. с фазовой скоростью равной c).Согласно *принципу относительности* законы природы имеют *одинаковый вид во всех инерционных системах отсчета*. Следовательно, в k' волна описывается уравнением:

$$E(x',t') = E_0'' cos\left[\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right] \qquad (6.2.2)$$

ω' – частота воспринимая приемником. Легко поставить штрихи, а надо найти связь между уравнениями.

От (6.2.1) к (6.2.2) можно перейти, *воспользовавшись преобразованием Лоренца*

$$E(x',t') = E_0 cos\left\{\omega\left[\frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{x' + \upsilon t'}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right] + \alpha\right\} =$$

$$= E_0 cos\left\{\omega\left[\frac{ct'+\frac{\upsilon}{c}x'-x'-\upsilon t'}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]+\alpha\right\} = E_0 cos\left\{\omega\left[\frac{t'(c-\upsilon)-\frac{x'}{c}(c-\upsilon)}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]+\alpha\right\} =$$

$$= E_0 cos\left[\omega\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(t'-\frac{x'}{c}\right)+\alpha\right]$$

(6.2.3)

Уравнение (6.2.3) описывает в *k'* ту же величину, что и уравнение (6.2.2). Поэтому

$$\omega' = \omega\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \omega\sqrt{\frac{\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)}} = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}}$$

Итак, $$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$ или $$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$
(6.2.4)

Если навстречу, то числитель и знаменатель поменяются местами. *υ* –скорость приемника относительно источника величина алгебраическая. При удалении приемника от источника *υ* > 0, *следовательно* *ν*' < *ν*. При приближении – *υ* < 0, *следовательно* *ν*' > *ν*. Т.е. знаки меняются. При *υ* << *c* формулы (6.2.4) можно приближенно записать

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\right);\qquad \omega' = \omega - \omega\frac{v}{c}$$

Отсюда, относительное изменение частоты

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c}, \qquad (6.2.5)$$

где $\Delta\omega = \omega' - \omega$

Кроме *продольного* эффекта Доплера для световых волн существует и *поперечный* эффект Доплера. Он заключается в уменьшении воспринимаемой приемником частоты, когда вектор относительной скорости направлен неперпендикулярно прямой соединяющей источник и приемник (например источник движется по окружности, приемник в центре)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Поперечный эффект пропорционален $\frac{v^2}{c^2}$ и, следовательно, меньше продольного эффекта Доплера.

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие, одна обеспечивает продольный, другая – поперечный эффекты.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звезд в астрономии. Тепловое движение молекул приводит к уширению спектральных линий. Будут все частоты, лежащие в интервале от $\omega\left(1-\frac{v}{c}\right)$ до $\omega\left(1+\frac{v}{c}\right)$ и ширина линии равна

$$2\omega\frac{v}{c}$$

– это доплеровская ширина спектральных линий.

6.3. Волновые уравнения

Оказывается, что уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Найдем общий вид волнового уравнения. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны по t и всем координатам

$$\xi = A\cos(\omega t - kr)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kr) = -\omega^2 \xi \qquad (6.3.1)$$

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (6.3.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 A cos(\omega t - kr) = -k_x^2 \xi \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y} &= -k_y^2 A cos(\omega t - kr) = -k_y^2 \xi \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 A cos(\omega t - kr) = -k_z^2 \xi
\end{aligned}\right\} \qquad (6.3.3)$$

сложим уравнения (6.3.3):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2 \xi \qquad (6.3.4)$$

подставим из (6.3.2) значение $\xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

учтем, что $\upsilon=\dfrac{\omega}{k}$, а $\dfrac{k}{\omega}=\dfrac{1}{\upsilon}$

И получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (6.3.5)$$

Всякая функция удовлетворяющая уравнению (6.3.5), описывает некоторую волну; причем корень квадратный из величины, обратный коэффициенту при $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ *дает фазовую скорость волны.*

Можно записать уравнение (6.3.5) короче, используя оператор Лапласа: $\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, тогда

$$\Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (6.3.6)$$