

Омский государственный технический университет

Кафедра физики

Калистратова Л.Ф.

**Электронные лекции по разделам классической и
релятивистской механики**

6 лекций

(12 аудиторных часов)

Тема 5.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

План лекции

- 5.1. Законы сохранения в классической механике.
- 5.2. Закон сохранения механической энергии.
- 5.3. Закон сохранения импульса.
- 5.4. Закон сохранения момента импульса.

5.1. Законы сохранения в классической механике

В законах сохранения энергии, импульса, момента импульса находят своё отражение фундаментальные свойства пространства и времени, а также факт бесконечного их существования.

Закон сохранения энергии является следствием однородности времени.

Закон сохранения импульса отражает однородность пространства.

Закон сохранения момента импульса – отражает изотропность пространства.

Однородность времени отражает тот факт, что результат опыта не зависит от времени его проведения.

Однородность пространства отражает тот факт, что результат опыта не зависит от места его проведения.

Изотропность пространства отражает тот факт, что результат опыта не зависит от направления осей координат.

Важно понять условия, при которых выполняется тот или иной закон сохранения.

В механической системе тела могут взаимодействовать как между собой (внутренние силы), так и с внешними телами (внешние силы).

Механическая система называется замкнутой или изолированной, **если на нее не действуют внешние силы** (система не обменивается с внешними телами энергией).

Понятие замкнутой системы является абстракцией.

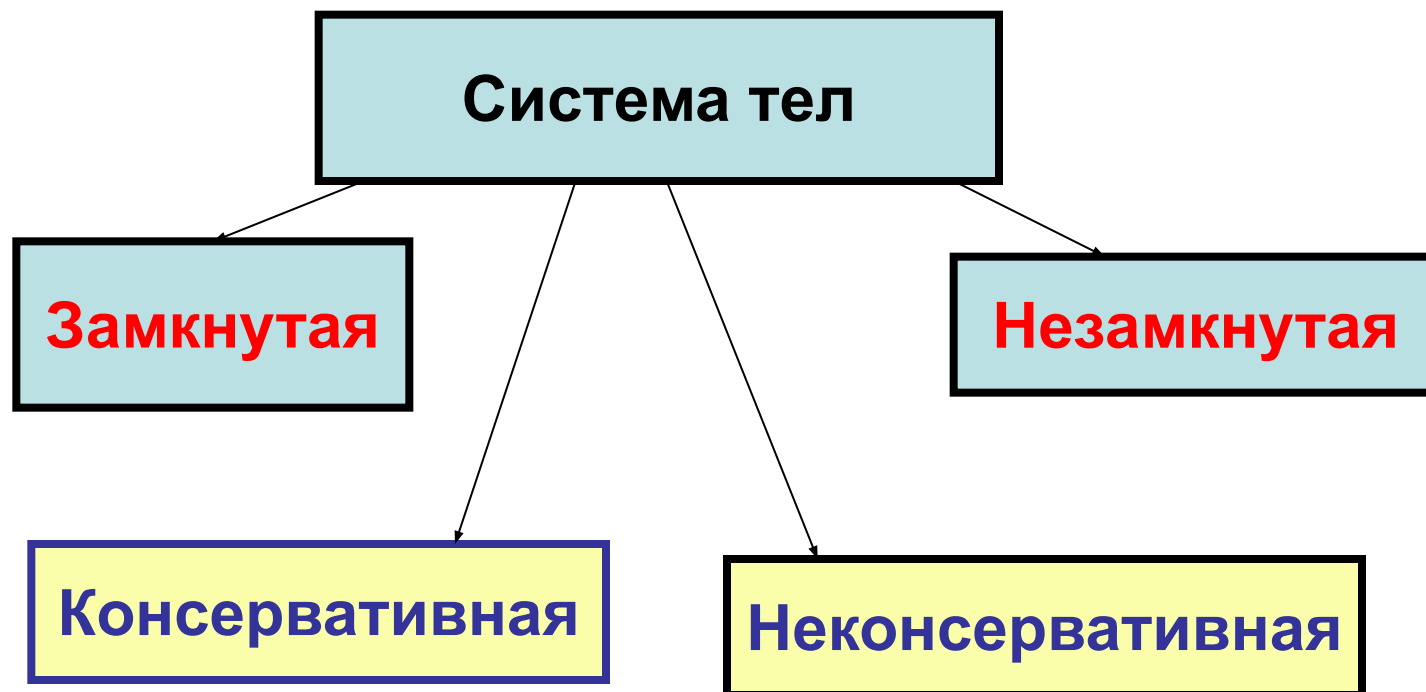
Реальным приближением к замкнутой системе служит система:

- взаимодействием которой с внешними телами можно пренебречь;
- система, в которой внешние силы практически компенсируются.

Система называется незамкнутой, если на неё действуют внешние силы и их результирующая сила отлична от нуля.

В любых системах сумма всех внутренних сил равна нулю, поскольку силы взаимодействия каждой пары тел равны по модулю и противоположны по направлению.

Механическая система называется консервативной,
если на тела системы действуют только
консервативные силы.



5.2. Закон сохранения механической энергии

Пусть на механическую систему тел действуют как внутренние, так и внешние силы.

Силы взаимодействия могут быть как консервативными, так и неконсервативными.

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех действующих на систему сил.

$$\Delta E_K = A_{\text{любых сил}}$$

$$\Delta E_K = A_{\text{конс.внут.}} + A_{\text{неконс.внут.}} + \\ + A_{\text{конс.внеш.}} + A_{\text{неконс.внеш.}}$$

$$A_{\text{конс.внут.}}$$

- работа **внутренних консервативных** сил,

$$A_{\text{неконс.внут.}}$$

- работа **внутренних неконсервативных** сил.

$A_{\text{КОНС.ВНЕШ.}}$

— работа **внешних консервативных** сил;

$A_{\text{НЕКОНС.ВНЕШ.}}$

- работа **внешних неконсервативных** сил.

Работа внутренних консервативных сил равна
убыли потенциальной энергии взаимодействия
тел системы друг с другом:

$$A_{\text{конс.внут.}} = -\Delta E_{\text{П1}}$$

Работа внешних консервативных сил равна убыли
потенциальной энергии системы во внешних
потенциальных полях:

$$A_{\text{конс..внеш.}} = -\Delta E_{\text{П2}}$$

Выполняя математические операции переноса слагаемых в левую часть основного выражения, получим

$$\Delta(E_K + E_{п1} + E_{п2}) = \\ = A_{\text{конс.внеш.}} + A_{\text{неконс.внеш.}}$$

Заметим, что **потенциальная энергия механической системы E_p складывается** из

- потенциальной энергии взаимодействия точек системы друг с другом $E_{п1}$;
- потенциальной энергии во внешних потенциальных полях $E_{п2}$.

$$E_{\Pi} = E_{\Pi 1} + E_{\Pi 2}$$

Полная механическая энергия СИСТЕМЫ:

$$E = E_K + E_{\Pi}$$

Изменение полной механической энергии:

$$\Delta E = \Delta(E_K + E_{\Pi})$$

В результате вывода получили, что

$$\Delta E = A_{\text{НК}}$$

Закон сохранения полной механической энергии для неконсервативной системы тел формулируется: изменение полной механической энергии неконсервативной системы тел равно суммарной работе любых неконсервативных сил, действующих на тела системы.

Если в системе **неконсервативные силы отсутствуют**:

$$A_{\text{НК}} = 0$$

тогда **система тел** будет являться **консервативной**.

При этом $\Delta E = 0 \rightarrow E_2 = E_1$

$$E = \text{const}$$

Закон сохранения энергии формулируется:

полная механическая энергия консервативной системы тел сохраняется (не меняется, остаётся величиной постоянной).

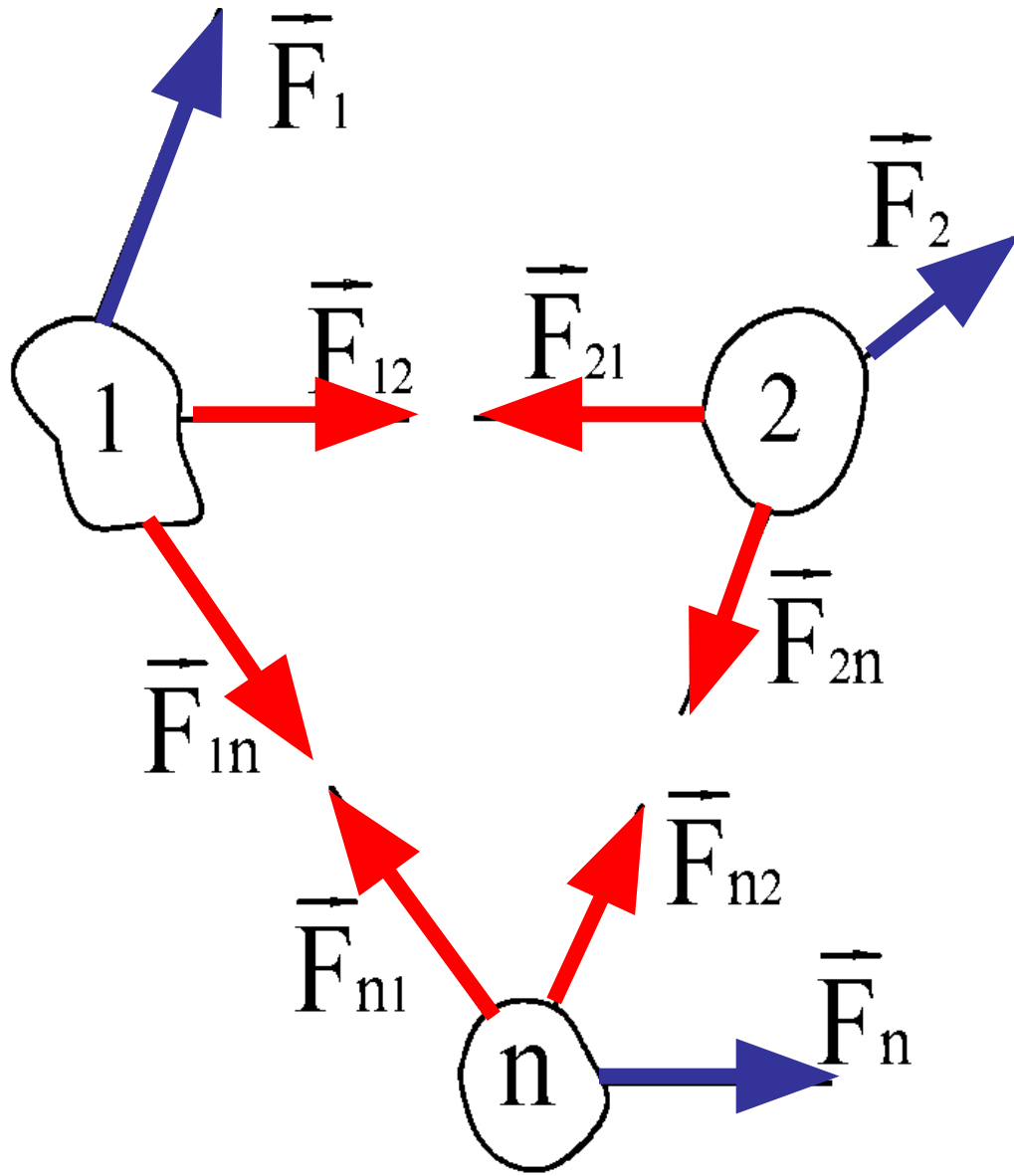
5.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, которые могут взаимодействовать как между собой (это **внутренние силы**), так и с внешними телами (это **внешние силы**).

Те и другие силы взаимодействия могут быть как **консервативными**, так и **неконсервативными**.

Внутренние силы обозначим символами $\overset{\Delta}{F}_{ij}$.

Внешние силы, действующие на каждое из тел, обозначим как $\overset{\Delta}{F}_k$.



Запишем для каждого из тел **второй закон Ньютона** в его наиболее общей форме.

$$\frac{dp_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_k$$

Просуммируем левые и правые части равенств.

По **третьему закону Ньютона** **сумма всех внутренних сил равна нулю**, поскольку они попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

При сложении равенств получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} (\overset{\square}{p}_1 + \overset{\square}{p}_2 + \overset{\square}{\quad} + \overset{\square}{p}_n) = \overset{\square}{F}_1 + \overset{\square}{F}_2 + \overset{\square}{\quad} + \overset{\square}{F}_k$$

Результирующим импульсом системы тел
называется векторная сумма импульсов
отдельных тел:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \vec{p}$$

Векторная сумма действующих на систему сил есть
равнодействующая всех внешних сил.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

Тогда можно переписать

$$\frac{d\overset{\square\square}{P}}{dt} = \overset{\square\square}{F}_{\text{внеш.}} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\overset{\square\square}{p}}{\Delta t} = \overset{\square\square}{F}_p$$

Закон сохранения импульса для незамкнутой системы тел формулируется: **в незамкнутой системе тел скорость изменения импульса системы равна равнодействующей внешних сил**

Если **система замкнута**, то

$$\overset{\square\square}{F}_{\text{внеш.}} = 0$$

Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$$

Закон сохранения импульса формулируется:
резльтирующий импульс замкнутой системы тел сохраняется.

Естественно, что при этом остается постоянной и сумма проекций импульсов тел системы на любую координатную ось.

На практике достаточно часто приходится иметь дело со взаимодействием тел в условиях, когда действием внешних сил пренебречь нельзя (**система не является замкнутой**).

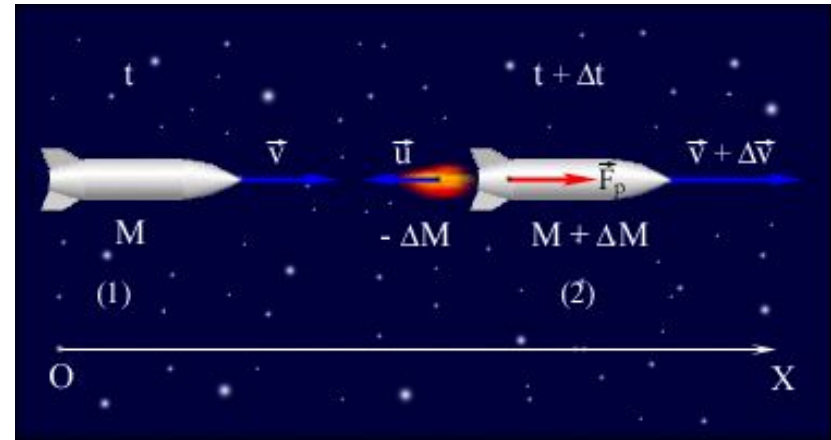
В таких случаях можно найти такое направление (координатную ось X), на которое внешние силы имеют нулевые проекции.

Тогда будет оставаться постоянной не векторная сумма импульсов всех тел системы, а **сумма проекций импульсов на данную координатную ось**:

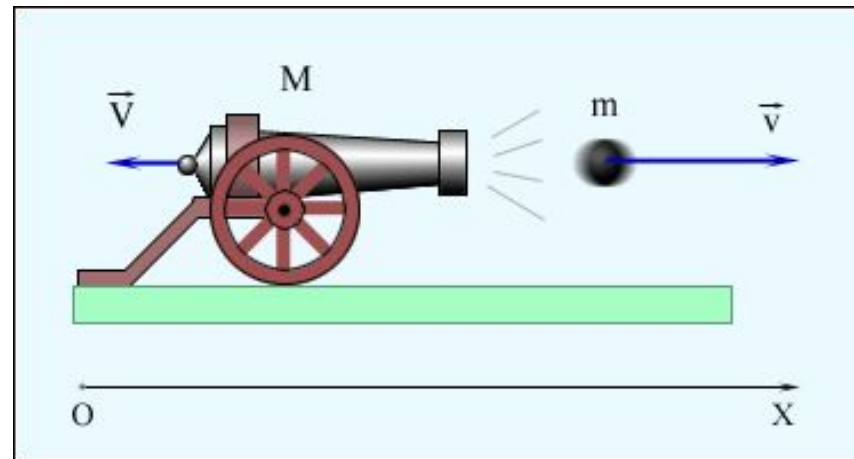
$$P_x = \text{const.}$$

С законом сохранения импульса связаны такие понятия как:

- реактивное движение:



- отдача:

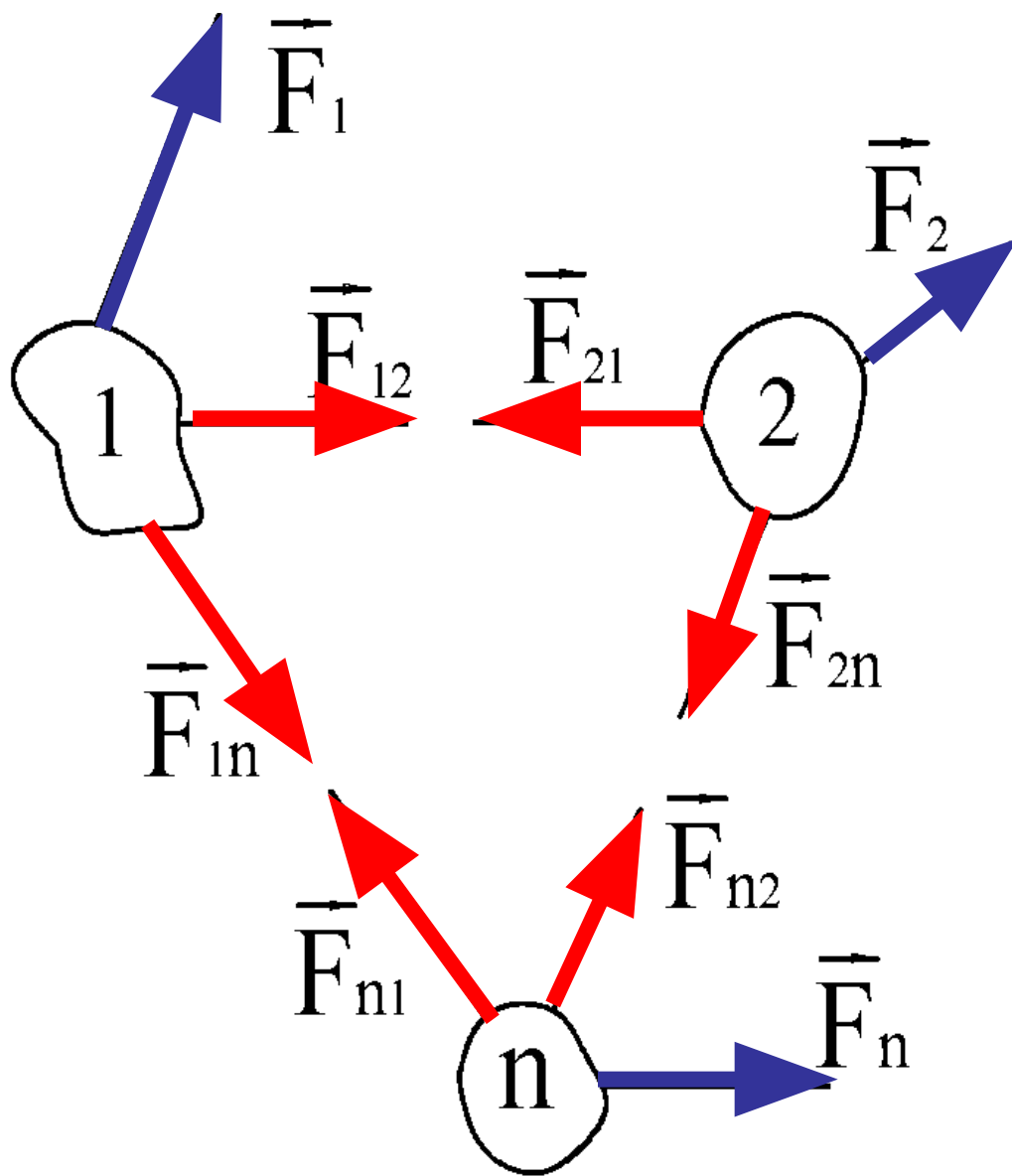


5.3. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему из n тел (или материальных точек), взаимодействующих как между собой, так и с внешними телами.

Выберем точку O , относительно которой будем отсчитывать моменты импульсов тел (частиц) и моменты сил, приложенных к ним.

•
○



Запишем основной закон динамики вращательного движения для каждого тела в отдельности.

$$\frac{dL_1}{dt} = M_{12} + M_{13} + \dots + M_{1n} + M_1$$

$$\frac{dL_2}{dt} = M_{21} + M_{23} + \dots + M_{2n} + M_2$$

$$\dots$$

$$\frac{dL_n}{dt} = M_{n1} + M_{n2} + \dots + M_{n-1,n} + M_k$$

\overline{M}_{ij} – **моменты внутренних сил**, действующих между i -ым и j -ым телами ;

\overline{M}_k – **моменты внешних сил**, действующих на i -ое тело.

Сложим левые и правые части равенств:

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \overline{L}_3 + \dots + \overline{L}_n \right) = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_k$$

Учтем, что **сумма моментов внутренних сил равна нулю.**

Моментом импульса системы тел называется
векторная сумма моментов импульсов всех тел
системы.

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \vec{L}$$

Векторная сумма моментов внешних сил
представляет собой **резльтирующий момент всех
внешних сил**, действующих на систему:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

Таким образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш.}}$$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_p$$

Закон сохранения импульса для незамкнутой системы формулируется: **скорость изменения результирующего момента импульса незамкнутой системы тел равна равнодействующему моменту внешних сил.**

Если **внешние силы отсутствуют** или их равнодействующая сила равна нулю, то **система будет замкнутой.**

Тогда **суммарный момент внешних сил** относительно произвольной точки O может быть **равен нулю**:

$$\overset{\nabla}{M}_{\text{внеш.}} = 0$$

Следовательно

$$\frac{d\overset{\nabla}{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \overset{\nabla}{L} = \text{const}$$

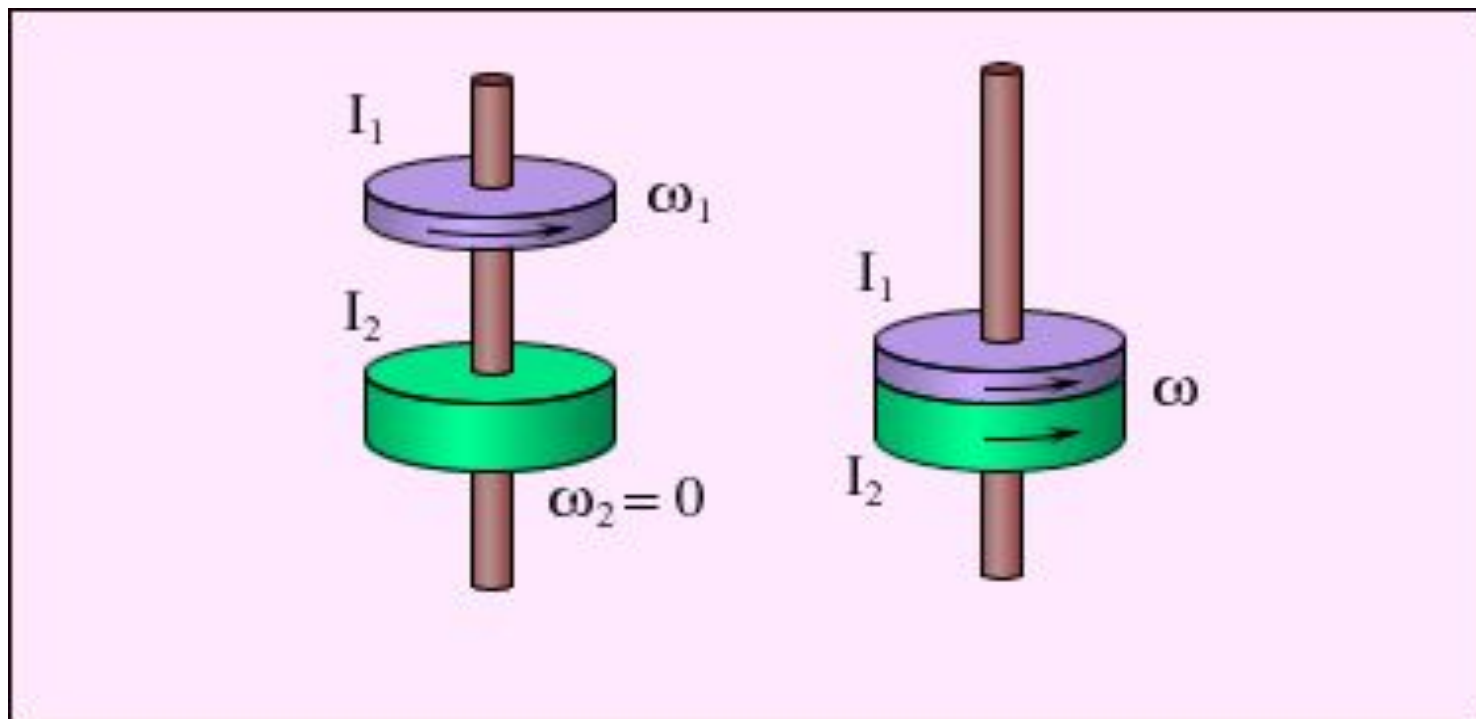
Закон сохранения момента импульса

формулируется: **резльтирующий момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным.**

Рисунок иллюстрирует закон сохранения момента

импульса: $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J\omega$, но $\omega_2 = 0$

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega$$



На практике часто приходится рассматривать вращение взаимодействующих тел **относительно некоторой неподвижной оси Z.**

В этом случае **может сохраняться суммарный момент импульса** системы относительно данной оси Lz.

Необходимым условием этого является **равенство нулю суммарного момента внешних сил относительно этой же оси вращения.**

$$M_{z, \text{внеш}} = 0.$$

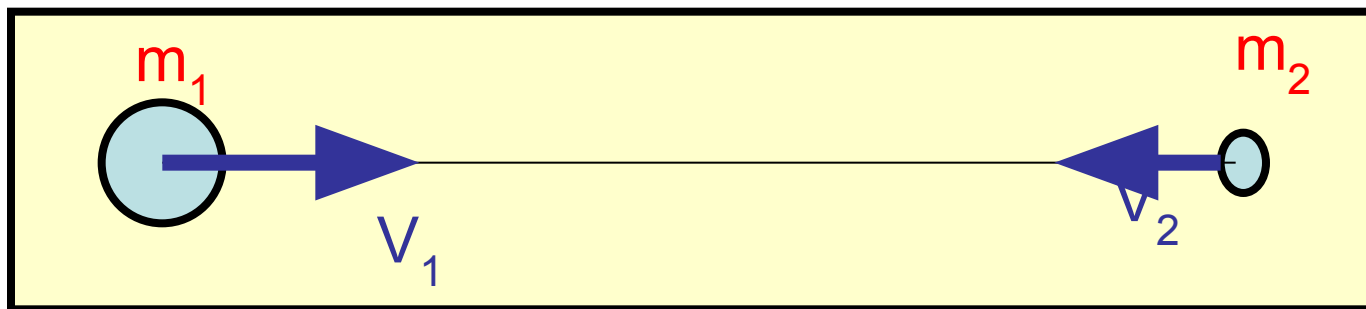
Последнее может выполняться и для незамкнутой системы, если внешние силы параллельны оси вращения или пересекают эту ось.

Применение законов сохранения к удару тел

Центральный (лобовой) удар тел происходит по линии, соединяющей центры тяжести тел.

Бывает трёх типов:

1. **абсолютно неупругий** удар;
2. **абсолютно упругий** удар;
3. **упругий** (промежуточный) удар.



Абсолютно неупругий удар

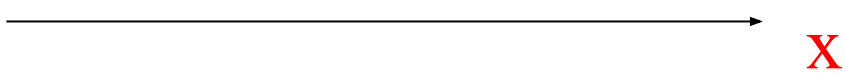
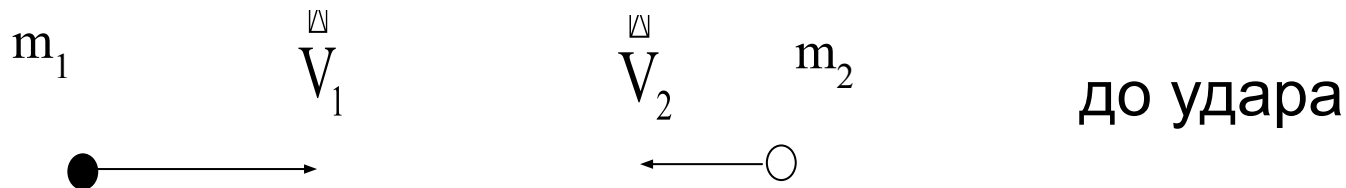
При **абсолютно неупругом ударе** тела:

- деформируются;
- после удара движутся с одинаковыми скоростями.

При деформации часть кинетической энергии превращается во внутреннюю энергию, поэтому для этого удара **сохраняется только импульс системы тел:**

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V}$$

Закон сохранения импульса в скалярной форме в проекциях на ось x :



$$x) m_1 V_1 - m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V$$

Закон сохранения энергии для абсолютно неупругого удара тоже можно записать, но только с учётом той энергии, которая перейдёт в другие виды энергии:

- энергию, ушедшую на деформацию тел;
- энергию, выделенную в виде тепла;
- энергию, ушедшую на трение и т.д.

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + \Delta E$$

Абсолютно упругий удар

При **абсолютно упругом ударе** тела:

- не деформируются;
- после удара движутся с разными скоростями и направлениями.

Для такого удара справедливыми являются **два закона сохранения:**

импульса

$$m_1 \overset{\sphericalangle}{V}_1 + m_2 \overset{\sphericalangle}{V}_2 = m_1 \overset{\sphericalangle}{U}_1 + m_2 \overset{\sphericalangle}{U}_2$$

энергии

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}$$

Для указанного на рисунке случая абсолютно упругого удара **законы сохранения импульса** и **энергии** запишутся как

$$m_1 V_1 = -m_1 U_1 + m_2 U_2$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}$$

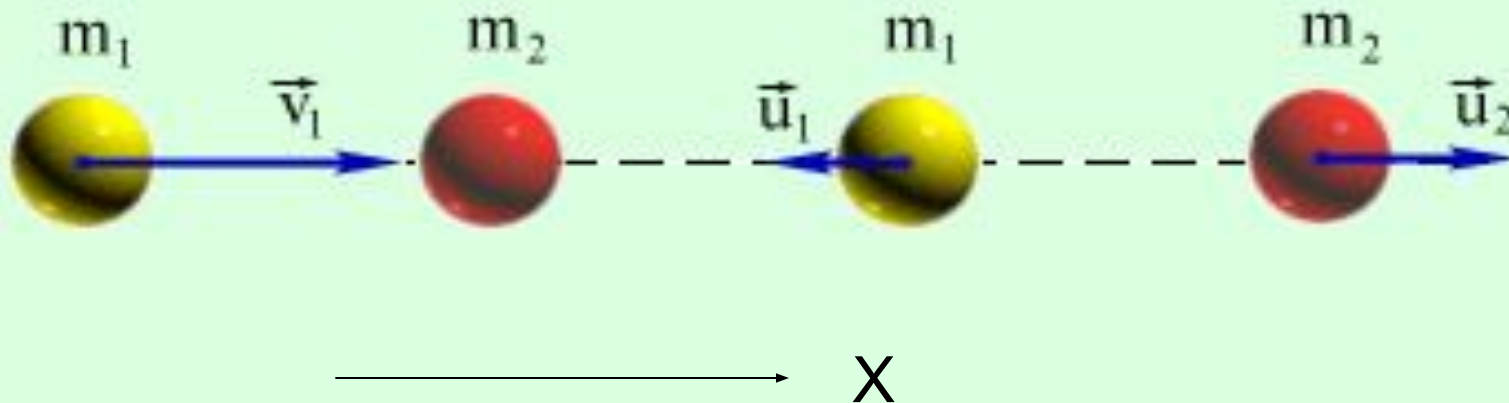
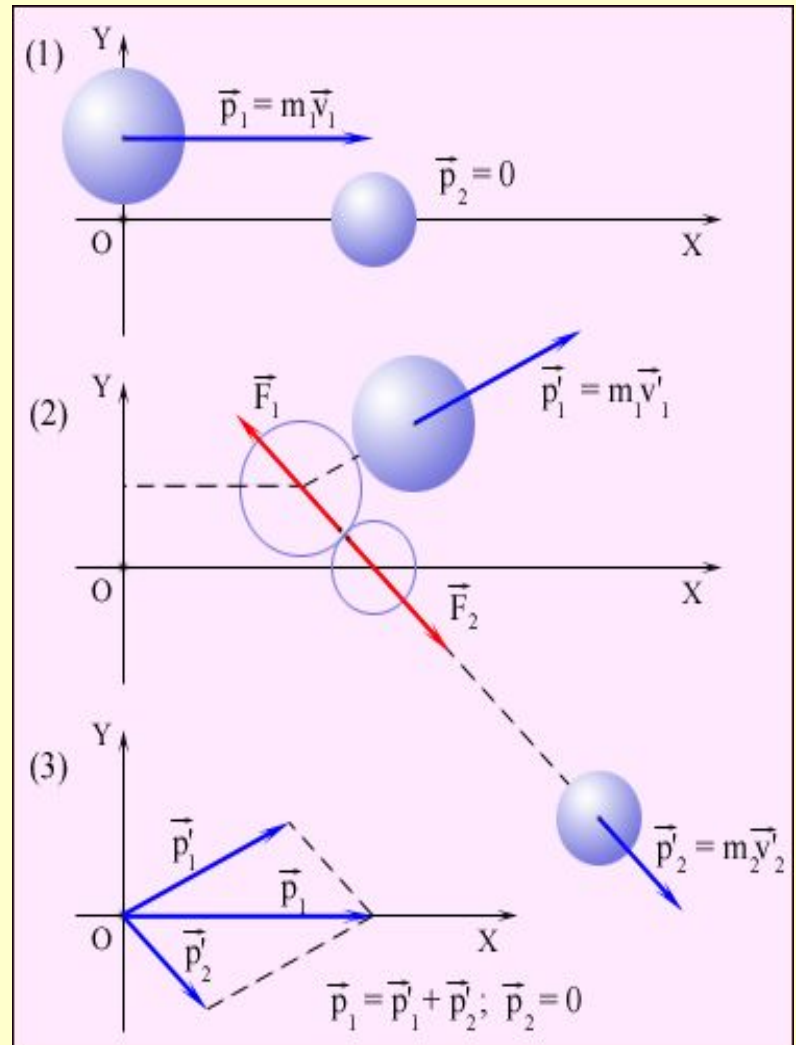


Рисунок иллюстрирует абсолютно упругий удар шаров разной массы.

После удара изменились направления движения шаров.

При одинаковой массе шаров получается игра в бильярд.



Частные случаи

Сталкиваются шары массами m_1 и m_2 .

Скорости шаров до удара: V_1 и V_2 .

Скорости шаров после удара: U_1 и U_2 .

1. Шары с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$) обмениваются энергией:

$$U_1 = V_2; \quad U_2 = V_1.$$

2. Шары с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$), но второй шар неподвижен ($V_2 = 0$).

Происходит **обмен импульсами**: первый шар остановится, а второй будет двигаться со скоростью первого.

$$U_2 = V_1 .$$

3. Столкновение шара со стеной ($V_2 = 0$, m_2 много больше m_1):

$$U_1 = -V_1 .$$

Законы сохранения в микромире

В заключение темы отметим, что рассмотренные выше фундаментальные законы сохранения справедливы как в макромире, так и в микромире.

В области элементарных частиц количество законов сохранения увеличивается.

Отметим среди них некоторые законы сохранения:

1. закон сохранения электрического заряда;
2. закон сохранения барионного заряда;
3. закон сохранения лептонного заряда;
4. закон сохранения чётности, странности, очарования и др.

Эти законы представляют собой равенство некоторых чисел на входе и выходе всевозможных превращений элементарных частиц.

Эти законы не связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени.