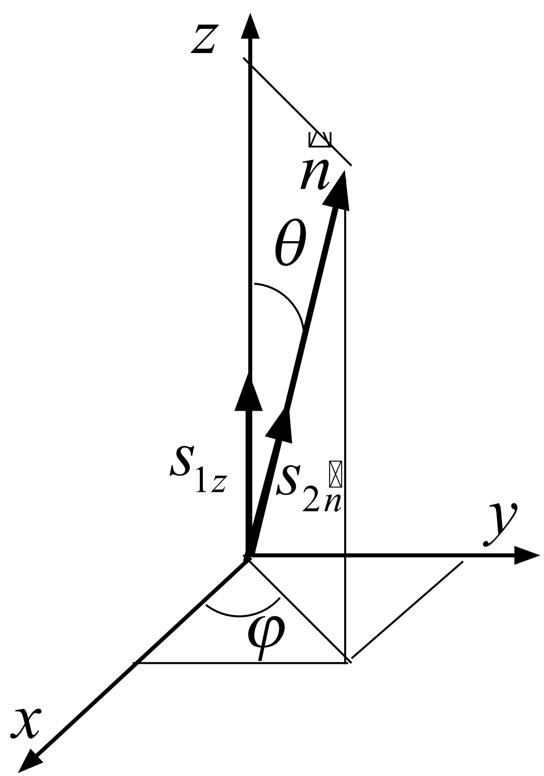
Задача

Имеются две невзаимодействущие частицы, каждая из которых обладает спином *s=1/2*. Одна из этих частиц обладает определённой проекцией спина на ось *Oz*, а вторая – на направление

$$\vec{n} = \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right)$$

Измеряются полный спин S и проекция полного спина на ось *Oz*. Найти вероятности измерения возможных значений указанных величин.



Оператор полного спина и проекции полного спина

$$\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{s}}_1 + \hat{\vec{s}}_2, \quad \hat{S}_z = \hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}$$

Два набора квантовых чисел, описывающих возможные состояния системы

$$I: s_1, s_2, s_{1z}, s_{2z} \qquad\qquad II: s_1, s_2, S, S_z$$

$$\boxed{\left|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, s_{1z}, s_{2z}\right\rangle \equiv \left|s_{1z}, s_{2z}\right\rangle = \left|s_{1z}\right\rangle_1 \left|s_{2z}\right\rangle_2} \qquad \boxed{\left|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, S, S_z\right\rangle \equiv \left|S, S_z\right\rangle}$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \xrightarrow{\quad S_z = 0 \quad} \left|0,0\right\rangle, \left|1,0\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \xrightarrow{\quad S_z = \pm 1 \quad} \left|1,1\right\rangle, \left|1,-1\right\rangle$$

Идея решения – находим матрицу перехода от состояний из набора ***I*** к состояниям из набора ***II***. Затем находим обратную матрицу и используя её раскладываем состояние

$$\boxed{\left|s_{1z} = 1/2, s_{2n} = 1/2\right\rangle}$$

по базису

$$\boxed{\left|S, S_z\right\rangle}$$

Матрица перехода от состояний из набора *I* к состояниям из набора *II*.

Решение в обозначениях Дирака

Принцип суперпозиции

$$\left|SS_z\right\rangle = \sum_{s'_{1z}s'_{2z}} C^{SS_z}_{s'_{1z}s'_{2z}} \left|s'_{1z}s'_{2z}\right\rangle$$

Матрица перехода (унитарное преобразование от одного представления к другому)

$$C^{SS_z}_{s_{1z}s_{2z}} = \left\langle s_{1z}s_{2z} \middle| SS_z \right\rangle$$

Кет-векторы в матричном представлении

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2,\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$$

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2,\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$$

Обозначения

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle ss_z \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right.\right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$$

Матрицы понижающих операторов в представлении $s_1 s_{1z} s_2 s_{2z}$

$$\hat{s}_{i-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i$$

$$\hat{S}_- = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2$$

Состояние с максимальными значения квантовых чисел

$$\left|S=1,S_z=1\right\rangle=\sum_{s'_{1z}s'_{2z}}C^{11}_{s'_{1z}s'_{2z}}\left|s'_{1z}s'_{2z}\right\rangle=\left|s_{1z}=1/2,s_{2z}=1/2\right\rangle$$

Действуем на левую часть понижающим оператором

$$\hat{S}_-\left|S=1,S_z=1\right\rangle=?$$

Найти результат действия, используя общую формулу

$$\hat{j}_-\left|jj_z\right\rangle=\sqrt{(j+j_z)(j-j_z+1)}\left|jj_z-1\right\rangle$$

Результат

$$\hat{j}_-\left|jj_z\right\rangle = \sqrt{(j+j_z)(j-j_z+1)}\left|jj_z-1\right\rangle$$

$$\hat{j}_- = \hat{S}_-, \quad j = S = 1, \quad j_z = S_z = 1$$

$$\hat{S}_-\left|S=1, S_z=1\right\rangle = \sqrt{2}\left|S=1, S_z=0\right\rangle$$

Теперь действуем суммой понижающих операторов на правую часть

$$\hat{S}_-\left|S=1, S_z=s\right\rangle = \left(\hat{s}_{1-}+\hat{s}_{2-}\right)\sum_{s'_{1z}s'_{2z}} C^{11}_{s'_{1z}s'_{2z}}\left|s'_{1z}s'_{2z}\right\rangle = \left(\hat{s}_{1-}+\hat{s}_{2-}\right)\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

Результат действия?

Результат действия?

$$\left(\hat{s}_{1-}+\hat{s}_{2-}\right)\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2=\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_1+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_2\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$$

Результат действия

$$\hat{S}_-\left|S=1,S_z=1\right\rangle=\sqrt{2}\left|S=1,S_z=0\right\rangle=\left(\hat{s}_{1-}+\hat{s}_{2-}\right)\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2=$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_1+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_2\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2=\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right]$$

Или

$$\left|S=1,S_z=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2+\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

Найти кет-вектор

$$\left|S=0,S_z=0\right\rangle=?$$

Кет-вектор с разными квантовыми числами ортогональны друг другу (вырождения нет)

$$\left\langle S=1, S_z=0 \middle| S=0, S_z=0 \right\rangle = 0$$

Найти результат?

Промежуточные формулы

$$\left|S=0,S_z=0\right\rangle = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 + B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$$

$$\left\langle S=1,S_z=0\right|\left.S=0,S_z=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\;1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\;0\end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix}1\;0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\;1\end{pmatrix}_2\right]\left[A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 + B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right]$$

Результат

$$\left|S=0,S_z=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

Собираем все результаты вместе

$$\left|S=1,S_z=1\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$\left|S=1,S_z=-1\right\rangle=\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$\left|S=1,S_z=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2+\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

$$\left|S=0,S_z=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

Фазы кет-векторов с разным полным моментом

Относительные фазы кет-векторов с одинаковым полным моментом

$$\left|S=1, S_z=0, \pm 1\right\rangle$$

определены!

Вопрос: как определить относительные фазы векторов с разными полными моментами?

Например

$$\left|S=1, S_z=0\right\rangle \quad and \quad \left|S=0, S_z=0\right\rangle$$

Ответ из теории коэффициентов Клебша-Гордана

Два представления

$$\left|j_1 j_2 j_{1z} j_{2z}\right\rangle \qquad\qquad \left|j_1 j_2 J J_z\right\rangle, \quad J_z = j_{1z} + j_{2z}$$

Правило (Мессиа, Квантовая механика, том 2)

$$\left\langle j_1, j_2, j_{1z} = j_1, j_{2z} = J_z - j_1 \middle| j_1 j_2 J J_z = J\right\rangle \geq 0$$

Определить «абсолютные» фазы векторов

$$\left|S=1, S_z=0, \pm 1\right\rangle \quad and \quad \left|S=0, S_z=0\right\rangle$$

«Абсолютные» фазы кет-векторов

Кет-векторы в рассматриваемой задаче

$$\left|j_1=\frac{1}{2},j_2=\frac{1}{2},J=0,J_z=0\right\rangle=\left|S=0,S_z=0\right\rangle=\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|j_{1z}=-\frac{1}{2},j_{2z}=\frac{1}{2}\right\rangle-\left|j_{1z}=\frac{1}{2},j_{2z}=-\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$\left|j_1=\frac{1}{2},j_2=\frac{1}{2},j_{1z}=j_1,j_{2z}=J_z-j_1\right\rangle=\left|j_{1z}=\frac{1}{2},j_{2z}=-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Правильная «абсолютная» фаза

$$\left\langle j_1,j_2,j_{1z}=j_1,j_{2z}=J_z-j_1\right|\left.j_1j_2JJ_z=J\right\rangle=$$

$$\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left\langle j_{1z}=\frac{1}{2},j_{2z}=-\frac{1}{2}\right|\left.j_{1z}=-\frac{1}{2},j_{2z}=\frac{1}{2}\right\rangle-\left\langle j_{1z}=\frac{1}{2},j_{2z}=-\frac{1}{2}\right|\left.j_{1z}=-\frac{1}{2},j_{2z}=\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

Или

$$\left\langle j_1,j_2,j_{1z}=j_1,j_{2z}=J_z-j_1\right|\left.j_1j_2JJ_z=J\right\rangle=-\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\geq 0\quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{i\alpha}=-1,\alpha=\pi$$

Окончательный вид разложения

$$\left|S=1,S_z=1\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$\left|S=1,S_z=-1\right\rangle=\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$\left|S=1,S_z=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2+\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

$$\left|S=0,S_z=0\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]$$

Построить матрицу преобразования

$$\begin{pmatrix} \left|S=1, S_z=1\right\rangle \\ \left|S=1, S_z=0\right\rangle \\ \left|S=1, S_z=-1\right\rangle \\ \left|S=0, S_z=0\right\rangle \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверить на унитарность

$$\hat{M}\hat{M}^{\dagger} = ?$$

Выразить кет-векторы из второго набора квантовых чисел через кет-векторы первого набора?

Результат

$$\begin{pmatrix} \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|S=1, S_z=1\right\rangle \\ \left|S=1, S_z=0\right\rangle \\ \left|S=1, S_z=-1\right\rangle \\ \left|S=0, S_z=0\right\rangle \end{pmatrix}$$

Кет-вектор исходного состояния

$$\left|s_{1z}=1/2, s_{2\vec{n}}=1/2\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \end{pmatrix}_2 = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \sin\frac{\theta}{2}\cdot \mathrm{e}^{i\varphi}\cdot\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

Выразить кет-векторы из второго набора квантовых чисел через кет-векторы первого набора?

Результат

$$\left|s_{1z}=1/2, s_{2n}=1/2\right\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left|11\right\rangle+\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left|10\right\rangle+\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left|00\right\rangle$$

Вероятности

$$w\left(S=1, S_z=1\right)=\cos^2\frac{\theta}{2},\quad w\left(S=1, S_z=0\right)=w\left(S=0, S_z=0\right)=\frac{1}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}$$

5.17. Вид спиновых функций $\Psi_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$ и $\Psi_{1,-1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$ очевиден.

Из условия $\hat{S}^2\Psi_{00}=0$ следует

$$(\Psi_{00}^*\hat{S}^2\Psi_{00})=\|\hat{S}\Psi_{00}\|^2=\|\hat{S}_x\Psi_{00}\|^2+\|\hat{S}_y\Psi_{00}\|^2+\|\hat{S}_z\Psi_{00}\|^2=0,$$

так что

$$\hat{S}_x\Psi_{00}=0$$

или

$$\hat{S}_x\Psi_{00}=\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{x1}+\hat{\sigma}_{x2}]\left\{C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2+C_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right\}=$$
$$=(C_1+C_2)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right\}=0,$$

что дает $C_1=-C_2$ в случае функции Ψ_{00}. Так как функции Ψ_{10} и Ψ_{00} ортогональны, то $C_1=C_2$ для функции Ψ_{10}.

Таким образом, нормированные с. ф. Ψ_{10} и Ψ_{00} имеют вид

$$\Psi_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right\}.$$

$$\Psi_{00}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right\}.$$