Системы линейных алгебраических уравнений

Основные определения и понятия

Определение 1. Система уравнений вида (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in R,\ b_i \in R,\quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$ называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Коэффициенты a_{ij} называются *коэффициентами при неизвестных*, а b_i - *свободные члены.*

Определение 2. Система (1) называется *однородной,* если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. В противном случае, то есть если найдется $b_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ система (1) называется *неоднородной.*

Основные определения и понятия

Определение 3. Набор чисел $(C_1, C_2, ..., C_n)$ называется *решением* системы (1), если при подстановке в уравнения системы значений $x_1 = C_1, x_2 = C_2, ..., x_n = C_n$ уравнения системы (1) обращаются в верные равенства.

Определение 4. Решение $(C_1, C_2, ..., C_n)$ системы (1) называется *тривиальным* или *нулевым, если* $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$. В противном случае, т.е. когда хотя бы одно $C_i \neq 0$, решение называется *нетривиальным или ненулевым.*

Определение 5. Система вида (1) называется *совместной*, если у неё есть решения и *несовместной*, если у неё решений нет.

Замечание. Однородные системы вида (1) всегда – совместны, так как при подстановке в уравнения системы $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ уравнения системы (1) в силу того, что $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, обращаются в верные равенства, т.е. у *однородной системы вида (1) всегда есть тривиальное (нулевое) решение.*

Определение 6. Совместная система вида (1) называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Правило Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

$a_{ij},\ b_i \in R,\ i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ - главный определитель,

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$ - вспомогательные определители.

Обозначения: $\Delta = det\ A, \quad \Delta_1 = det\ A_1, \Delta_2 = det\ A_2, \ldots, \Delta_n = det\ A_n.$

Правило Крамера

Теорема 1 (Правило Крамера) Если у системы n линейных уравнений с n неизвестными (2) главный определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственно решение, определяемое по формулам (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (3)$$

<u>Доказательство.</u> Зафиксируем i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Умножая первое уравнение системы (2) на A_{1i}, второе на A_{2i}, третье на A_{3i}, …, *n-е* на A_{ni}, получаем систему вида (4):

$$\begin{cases} a_{11}A_{1i}x_1 + a_{12}A_{1i}x_2 + \ldots + a_{1i}A_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}A_{1i}x_n = b_1A_{1i}, \\ a_{21}A_{2i}x_1 + a_{22}A_{2i}x_2 + \ldots + a_{2i}A_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}A_{2i}x_n = b_2A_{2i}, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}A_{ni}x_1 + a_{n2}A_{ni}x_2 + \ldots + a_{ni}A_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}A_{ni}x_n = b_nA_{ni}. \end{cases} \qquad (4)$$

Складывая все уравнения системы (4) и выделяя коэффициенты при неизвестных, получаем уравнение (5)

Продолжение доказательства (правило Крамера)

$$(a_{11}A_{1i}+a_{21}A_{2i}+\ldots+a_{n1}A_{ni})x_1+(a_{12}A_{1i}+a_{22}A_{2i}+\ldots+a_{n2}A_{ni})x_2+\ldots+$$

$$+(a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\ldots+a_{ni}A_{ni})x_i+\ldots+(a_{1n}A_{1i}+a_{2n}A_{2i}+\ldots+a_{nn}A_{ni})x_n= \qquad (5)$$

$$=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}.$$

Анализируя коэффициенты при неизвестных, замечаем, что коэффициент при неизвестной x_i *равен сумме произведений элементов i-го столбца главного определителя системы (2) на алгебраические дополнения к ним,* т.е. величине главного определителя.

Коэффициенты при остальных неизвестных представляют собой *суммы произведений элементов j-го столбца ($j \neq i$) главного определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам i-го столбца,* следовательно, они равны нулю.

$$\Delta\cdot x_i=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}. \qquad (6)$$

Продолжение доказательства (правило Крамера)

$$\Delta \cdot x_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}. \qquad (6)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}, \qquad (7)$$

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i. \qquad (8)$$

$$\Delta \neq 0, \qquad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}. \qquad (9)$$

В силу произвольности выбора x_i результат будет справедлив для любого $i = 1,2,\ldots,n$.

Правило Крамера: замечания

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},\quad \Delta \neq 0} \qquad (3)$$

Обратите внимание на тот факт, что формулы (3) справедливы только для ситуации, когда главный определитель системы (2) отличен от нуля.

Если же главный определитель системы (2) равен нулю, то наличие или отсутствие решений зависит от величин дополнительных (вспомогательных) определителей системы (2):

$$\boxed{\Delta \cdot x_i = \Delta_i.} \qquad (8)$$

- если хотя бы одно $\Delta_i \neq 0$, то соответствующее уравнение вида (8) решений не имеет и, следовательно, система (2) является несовместной;

- если все $\Delta_i = 0$, то соответствующие уравнения вида (8) превращаются в верные равенства для любых значений неизвестных x_i, т.е. каждое из них имеет бесчисленное множество решений, следовательно, система (2) в этом случае является совместной, но неопределенной.

Решение систем по правилу Крамера

Пример 1.

$$\boxed{\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9, \\ x_1-x_2+3x_3=2, \\ 3x_1-6x_2-x_3=25. \end{cases}}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-6)\cdot 5+2\cdot 3\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 5-1\cdot 2\cdot(-1)-(-6)\cdot 3\cdot 1=24,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix}=(-9)\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-6)\cdot 5+2\cdot 3\cdot 25-25\cdot(-1)\cdot 5-2\cdot 2\cdot(-1)-(-6)\cdot 3\cdot(-9)=48,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 25\cdot 5+(-9)\cdot 3\cdot 3-3\cdot 2\cdot 5-1\cdot(-9)\cdot(-1)-25\cdot 3\cdot 1=-72,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 25+1\cdot(-6)\cdot(-9)+2\cdot 2\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot(-9)-1\cdot 2\cdot 25-(-6)\cdot 2\cdot 1=-24;$$

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{48}{24}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-72}{24}=-3;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-24}{24}=-1}$$

Следствия из правила Крамера

Следствие 1. Если система n линейных уравнений с n неизвестными (2) является однородной, т.е. $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ и главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение.

Доказательство. $\Delta_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n;\qquad x_i = \dfrac{0}{\Delta} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$

Следствие 2. Если однородная система n линейных уравнений с n неизвестными (2) имеет нетривиальное решение, то главный определитель системы $\Delta = 0$.

Доказательство. Применим метод от противного.

Предположим, что однородная система указанного вида имеет нетривиальное решение, а главный определитель отличен от нуля.

Но в этом случае, согласно доказанному выше следствию 1, у однородной системы существует только единственное нулевое (тривиальное) решение.

Следствие 3.

1) Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет только нулевое (тривиальное) решение тогда и только тогда, когда главный определитель системы Δ отличен от нуля.

2) Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда главный определитель системы Δ равен нулю.

Матричная форма записи систем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

$a_{ij},\ b_i \in R,\ i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n.$

Если ввести матрицы

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (10)$$

которые называются соответственно *матрицей из коэффициентов при неизвестных, столбцом неизвестных и столбцом свободных членов*, систему (2) можно представить в виде (11):

$$\boxed{A \cdot X = B.} \qquad (11)$$

Определение 9. Представление системы (2) в виде (11) называется *матричной формой записи* системы (2).

Использование обратных матриц: обоснование алгоритма

$$A \cdot X = B \qquad (11)$$

Теорема 2. Если в уравнении (11) матрица A является невырожденной, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (12)$$

Доказательство.

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad A^{-1}.$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Использование обратных матриц: пример

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-6)\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot(-1) - (-6)\cdot 3\cdot 1 = 24$$

.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},} \qquad (13)$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}} \qquad (14)$$

$$X = \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 19\cdot(-9) + (-28)\cdot 2 + 11\cdot 25 \\ 10\cdot(-9) + (-16)\cdot 2 + 2\cdot 25 \\ (-3)\cdot(-9) + 12\cdot 2 + (-3)\cdot 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 48 \\ -72 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = -1}$$

Метод Гаусса- метод последовательного исключения неизвестных

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты $a_{ij},\ b_i \in R,\ i = 1,\ldots,n;\quad j = 1,\ldots,n.$

Вычисления по методу Гаусса состоит из двух основных этапов: прямого хода и обратного хода.

Прямой ход заключается в последовательном исключении неизвестных из системы (2) с целью преобразования её к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей.

Вычисления значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ осуществляют на этапе *обратного хода*

Метод Гаусса – схема единственного деления

1-й шаг – исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами $i = 2,\ldots,n$ системы (2).

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент первого этапа), разделив первое уравнение системы (2) на a_{11}, получают систему:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (15)$$

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, \ldots, n; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (16)$$

.

Затем, последовательно из второго, третьего, …, n – го уравнений системы (15) вычитают первое уравнение, умноженное соответственно на a_{i1}, $i = 2, \ldots, n$.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{2n}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \qquad (17)$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)}; \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} \cdot b_1^{(1)}; \qquad (18)$$
$$i = 2,\ldots,n; \quad j = 2,\ldots,n$$

Метод Гаусса – схема единственного деления

<u>*2-й шаг*</u> – исключение неизвестного x_2 из уравнений с номерами $i = 3, \ldots, n$ системы (17).

Пусть $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (ведущий элемент второго этапа), разделив второе уравнение системы (17) на $a_{22}^{(1)} \neq 0$, получают систему (18):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)}, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \quad (18)$$

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j = 3, \ \ldots, \ n; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (19)$$

Затем, из третьего, четвертого и n-го уравнений системы (18) вычитают второе уравнение системы, умноженное соответственно на $a_{i2}^{(1)}$, $i = 3, \ldots, n$, в результате, получают эквивалентную систему (20):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)}, \end{cases} \quad (20)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(2)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_2^{(2)}; \quad (21)$$

$$i = 3, \ldots, n; \quad j = 3, \ldots, n$$

Метод Гаусса – схема единственного деления

Повторяя данную процедуру n-1 раз (предполагая, что соответствующие ведущие элементы отличны от нуля), получают систему (22), с верхней треугольной матрицей, которая эквивалентна исходной системе (2):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1,n-1}^{(1)} x_{n-1} + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2,n-1}^{(2)} x_{n-1} + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + a_{3,n-1}^{(3)} x_{n-1} + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)}, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{22}$$

Опираясь на систему (22), определяют неизвестные (*обратный ход*) по следующей схеме:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\ \vdots \\ x_1 = b_1^{(1)} - a_{1n}^{(1)} x_n - a_{1,n-1}^{(1)} x_{n-1} - \ldots - a_{12}^{(1)} x_2. \end{cases} \tag{23}$$

Схема единственного деления: пример

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25, \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \quad -12x_2 - 16x_3 = 52. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = -\dfrac{11}{3}, \\ \quad -12x_2 - 16x_3 = 52. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = -\dfrac{11}{3}, \\ \quad -8x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\boxed{x_3 = -1,}$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\cdot(-1) = -\frac{9}{3} = -3,}$$

$$\boxed{x_1 = -9 - 5\cdot(-1) - 2\cdot(-3) = -9 + 5 + 6 = 2}$$

Метод Гаусса – компактная схема единственного деления

Очень часто при реализации схемы единственного деления этап получения единичного коэффициента при оставляемом неизвестном опускают, т.е. оставляют его равным ведущему элементу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (24)$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25, \end{cases}} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \quad -12x_2 - 16x_3 = 52. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \qquad -8x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = -1}$$

Применение матриц для записи решения систем методом Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

Выписывают $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ расширенную матрицу

и, применяя элементарные преобразования только к строкам матрицы, приводят её к верхнему треугольному виду

$$\overline{A'} = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases}$$

Применение матриц для записи решения систем методом Гаусса: пример

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25, \end{cases}}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) = \overline{A'}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \qquad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \qquad\qquad -8x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = -1}$$