1.2. Описание электромагнитного излучения оптического диапазона

Электромагнитные поля и волны являются важнейшим физическим объектом, как в квантовых, так и в оптоэлектронных приборах. Рассмотрим в данном разделе методы описания таких полей и волны в неограниченных диэлектрических средах.

1.2.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$rot\vec{H} = \vec{\delta}_{compl}$$ - следствие закона Ампера, закона *полного тока.* (1.2.1)

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ - закон *электромагнитной индукции Фарадея.* (1.2.2)

$$div\vec{D} = \rho$$ - электрическое поле может иметь стоки и истоки. Ими (1.2.3)
являются электрические заряды.

$$div\vec{B} = 0$$ - магнитное поле не имеет стоков и истоков, т.е. (1.2.4)
магнитные заряды в природе отсутствуют.

В рамках классической электродинамики эти уравнения являются строгими

1.2.2. Материальные уравнения

Учитывают влияние материальной среды на связь между векторами поля. В обычных случаях используют идеализированные модели среды. В линейном приближении для изотропных сред, где можно пренебречь дисперсией, имеем

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (1.2.5)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \mu = \mu_r \mu_0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (1.2.6)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$$ Ф/м

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$ Гн/м

Как известно, полный ток состоит из 4-х составляющих:

$$\vec{\delta}_{compl} = \vec{\delta}_{cond} + \vec{\delta}_{disp} + \vec{\delta}_{transf} + \vec{\delta}_{extr} \qquad (1.2.7)$$

$\vec{\delta}_{cond} = \sigma \vec{E}$ - закон Ома в дифференциальной форме

$\vec{\delta}_{disp} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - ток смещения

$\vec{\delta}_{transf} = \rho \vec{v}$ - ток переноса

Сторонний ток с плотностью $\vec{\delta}_{extr}$ задается внешними источниками.

1.2.3. Граничные условия

Уравнения Максвелла пригодны в представленном виде для областей пространства, в пределах которых физические свойства среды (*ε, μ* и др.) непрерывны. На границах раздела сред I и II имеют место граничные условия:

$$E_\tau^I - E_\tau^{II} = 0 \qquad (1.2.11)$$

$$D_n^I - D_n^{II} = \xi \qquad (1.2.12)$$

$$B_n^I - B_n^{II} = 0 \qquad (1.2.13)$$

$$H_\tau^I - H_\tau^{II} = \eta \qquad (1.2.14)$$

Уравнения (1.2.11) и (1.2.13) свидетельствуют, что тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая вектора магнитной индукции при переходе через границу раздела меняются непрерывно.

Из (1.2.12) и (1.2.14) следует, что в этом случае нормальная составляющая вектора электрической индукции изменяется на величину поверхностной плотности заряда ξ, а тангенциальная компонента вектора магнитной напряженности испытывает скачок на величину поверхностной плотности тока.

Уравнения (1.2.12) и (1.2.13) выводятся на основании теоремы Гаусса; (1.2.11) и (1.2.14) - на основе применения теоремы Стокса к уравнениям Максвелла. Доказательства этих соотношений можно выполнить самостоятельно или найти в литературе (см., например, [3]).

1.2.4. Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды

Рассмотрим немагнитную однородную среду, являющуюся непроводящей, в которой также отсутствуют сторонние токи и заряды. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Применим ко второму уравнению операцию *rot*, и используем первое уравнение:

$$\mathrm{rotrot}\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\,\vec{H}, \qquad \mathrm{rotrot}\,\vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Используя далее соотношение $rot\ rot = grad\ div - \nabla^2$, и третье уравнение для вектора электрической индукции, получаем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 .$$

Аналогично можно найти уравнение и для $\vec{H}$:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 .$$

Данные уравнения, включающие только один вектор поля, называются ***волновыми уравнениями***.

1.2.5. Одномерное волновое уравнение

Для случая, когда поле зависит только от координаты z, получаем одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 .$$

Отметим, что в данном случае из третьего уравнения Максвелла следует

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 ,$$

и $E_z = const$. Такие решения нас не интересуют, и можно положить $E_z = 0$:

$$\vec{E} = \vec{e} \cdot E_t$$

где $\vec{e}$ -единичный вектор в плоскости XY, $E_t = \left|\vec{E}\right|$.

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0$$ - скалярное одномерное волновое уравнение.

1.2.6. Плоские скалярные волны

Общее решение последнего уравнения представляет плоскую скалярную волну:

$$E_t(z,t) = E_{t1}\left(t - \frac{z}{v}\right) + E_{t2}\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

где $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ - скорость распространения волны вдоль оси z. Если при z=0 мы имеем источник поля, напряженность которого изменяется по закону $E_1(t)$, в общем случае произвольному, то в области $z > 0$ получаем

$$E_t(r,t) = E_t\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

поскольку граничное условие требует непрерывности тангенциальных компонент вектора $\vec{E}$. Мы имеем при $z > 0$ распространение сигнала вдоль оси z.

Скорость распространения определяется соотношением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \; \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}.$$

Здесь $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ - скорость света в вакууме, n - показатель преломления среды.

1.2.7. Гармонические волны

Для сигнала, заданного при $z = 0$ в виде

$$E(t) = E_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{E_m}{2}\{\exp[i(\omega t + \psi)] + \exp[-i(\omega t + \psi)]\},$$

имеем гармонические плоские волны

$$E(z,t) = E_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi\right), \text{ при } z \ge 0,$$

$$E(z,t) = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v} z + \psi\right), \text{ при } z \le 0,$$

распространяющиеся вдоль направлений $+z$ и $-z$. ***Мгновенное значение*** $E(z,t)$ электрического поля в каждый момент времени и в каждой точке пространства определяется ***амплитудой*** E_m плоской волны и ***фазой*** $\phi(z,t) = \omega t \mp kz + \psi$. Если E_m не зависит от координат x, y, то волна будет ***однородной***. ***Волновое число:***

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

Геометрическое место точек, в которых фаза волны остается постоянной

$$\phi = \omega t \mp kz + \psi = const,$$

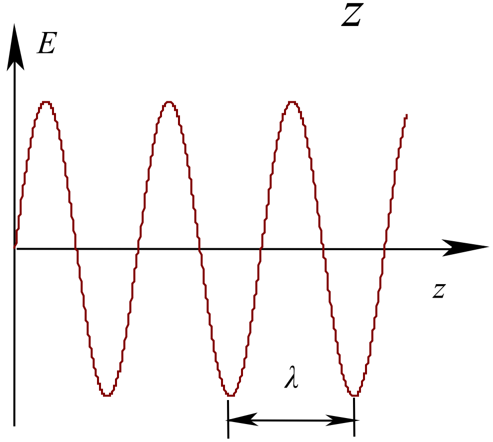


Рис. 1.2.1.

называют *фазовым или волновым фронтом*. Для некоторого момента времени t' фазовый фронт рассматриваемой нами волны является плоскостью, перпендикулярной оси z. При изменении времени на Δt фазовый фронт волны сдвигается в пространстве на расстояние Δz. Отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta t} = \dfrac{\omega}{k} = v$ определяет *фазовую скорость волны* - скорость движения фазового фронта в пространстве, в данном случае вдоль оси z. Как изменяется поле плоской гармонической волны в фиксированный момент времени в пространстве? Очевидно, по косинусоидальному закону (рис.1.2.1). Периодичность изменения поля в пространстве задается волновым числом k. Изменение фазы волны в пространстве на 2π соответствует прохождению волной расстояния λ: $\Delta\phi = 2\pi = k\lambda$.

1.2.8. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Для волны в произвольном направлении необходимо использование более общего волнового уравнения

$$\nabla^2 E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0.$$

Запишем сразу гармоническую плоскую волну, которая удовлетворяет данному уравнению

$$E_t(\vec{r}, t) = E_m \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right).$$

Здесь мы для простоты считаем начальную фазу колебаний равной нулю $(\psi_0 = 0)$ и ввели волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{n}\frac{\omega}{v} = \vec{n}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}\left(\vec{i}\, n_x + \vec{j} n_y + \vec{k} n_z\right)$$

где $\vec{n}$ -единичный вектор волновой нормали.

Подставляя выражение для $E_t(\vec{r},t)$ в волновое уравнение, получаем:

$$\frac{\omega^2}{v^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)E_t-\mu\varepsilon\omega^2E_t=0,$$

$$\left(\frac{\omega^2}{v^2}-\mu\varepsilon\omega^2\right)E_t=0;\ \left(k^2-\mu\varepsilon\omega^2\right)E_t=0;$$

$$\left(\frac{1}{v^2}-\mu\varepsilon\right)E_t=0.$$

Из предпоследнего уравнения следует, что для $E_t\neq 0$ должно быть:

$$k^2=\mu\varepsilon\omega^2,$$

Зависимость $k(\omega)$ называется дисперсионной зависимостью, а уравнение $k(\omega)=0$ - дисперсионным уравнением. В данном случае монохроматических волн имеем:

$$k^2-\mu\varepsilon\omega^2=0;\ k^2-\mu_r\varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}=0,$$

$$k=n\frac{\omega}{c}.$$

В общем случае $$k(\omega)=n(\omega)\frac{\omega}{c}$$

1.2.9. Электромагнитные плоские волны

Решение для плоской монохроматической однородной волны имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_m\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\psi_0\right)=\frac{\vec{E}_m}{2}\left\{\exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\psi_0\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\psi_0\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}_m\exp\left[-i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]+c.c.,$$

где $\dot{\vec{E}}_m=\vec{E}_m\exp\left(i\psi_0\right)$, а *c.c.* означает комплексно-сопряженную функцию к первому слагаемому. Функции $\exp\left[\pm i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\psi_0\right)\right]$ также являются решениями волнового уравнения. Величина $\dot{\vec{E}}_m$ - комплексная векторная амплитуда волны.

Поскольку работать с экспонентами очень удобно, то принято пользоваться понятием комплексной формы записи для гармонических плоских волн

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r},t)=\dot{\vec{E}}_m\exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$$

опуская множитель 1/2 и комплексно-сопряженное слагаемое. Истинное значение электрического поля будет определяться выражением

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\operatorname{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m\exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right\}$$

В чем же достоинство комплексного метода? Найдем производную по времени от напряженности поля плоской гармонической волны

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\dot{\vec{E}}_m \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right\} = i\omega\dot{\vec{E}}_m \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$$

Таким образом, операции дифференцирования по t соответствует умножение на $i\omega$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega.$$

Нетрудно показать, что действие оператором ∇ на $\dot{\vec{E}}(\vec{r},t)$ аналогично действию на нее оператором $-i\vec{k}$:

$$\nabla\cdot\dot{\vec{E}} = -i\vec{k}\cdot\dot{\vec{E}} = di\ \dot{\vec{E}}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}} = -i\vec{k}\times\dot{\vec{E}} = rot\ \dot{\vec{E}}.$$

С учетом записанных соотношений представим уравнения Максвелла, которые мы применяли при описании волновых процессов в изотропной непроводящей среде в отсутствиие сторонних токов и зарядов, в новой форме

$$rot\ \vec{H} = \vec{\delta}_{compl}$$
$$rot\ \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial}$$
$$div\ \vec{D} = \rho\ \ t$$
$$div\ \vec{B} = 0$$

Общий вариант уравнений Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\rightarrow\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Уравнения Максвелла в операторной форме для $\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{trans\ f} = 0$

$$-\vec{k} \times \vec{H} = \omega \vec{D}$$
$$+\vec{k} \times \vec{E} = +\omega \vec{B}$$
$$\rightarrow\ -i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$
$$-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Уравнения Максвелла для плоских гармонических волн ($\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{trans\ f} = 0$)

С учетом материальных уравнений из последней системы получаем:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\vec{E},$$
$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H},$$
$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0,$$
$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0.$$

Отсюда следуют важные выводы о структуре полей в плоской электромагнитной волне:

1. Из первого уравнения - $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$.

2. Из второго - $\vec{H} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{E}$, векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ образуют правую систему координат.

3. Третье и четвертое уравнения также свидетельствуют о поперечности полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

4. $\left|\vec{k} \times \vec{H}\right| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,H_m = \omega\varepsilon E_m \quad \left(\left|\vec{k} \times \vec{H}\right| = \left|\vec{k}\right| \cdot \left|\vec{H}\right| \sin\left(\widehat{\vec{k}\vec{H}}\right)\right)$

$$H_m = \frac{E_m}{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}} = \frac{E_m}{W}.$$

Величина $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ имеет размерность [Ом] и называется волновым сопротивлением среды. Размерность H - А/м; E - В/м. Для вакуума получаем:

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}.$$

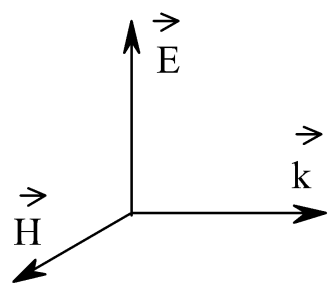


Рис. 1.2.2.

1.2.10. Поляризация плоских электромагнитных волн

Поле с электрическим и магнитным векторами, направление которых может быть определено в любой момент времени, называют ***поляризованным***. При случайных направлениях этих векторов в пространстве поле является ***неполяризованным*** (солнечный свет и т.д.).

Плоскость поляризации проходит через вектор электрической напряженности и направление распространения волны. Различают ***линейную, эллиптическую и круговую*** (правую и левую) поляризации - в зависимости от фигуры, которую описывает конец вектора при распространении волны. Математически волну с произвольным видом поляризации представляют в виде двух составляющих

$$\vec{E}_x = \vec{i} E_{1m} \cos(\omega t - kz),$$
$$\vec{E}_y = \vec{j} E_{2m} \cos(\omega t - kz - \varphi),$$

сдвинутых по фазе и имеющих различные амплитуды в общем случае. Для плоскости z=0 имеем

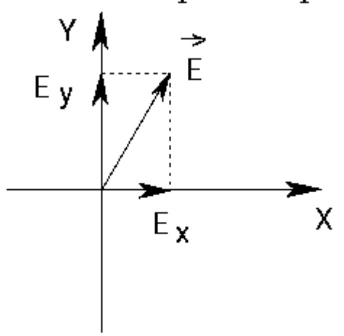
$$\frac{E_x}{E_{1m}} = \cos\omega t, \; \frac{E_y}{E_{2m}} = \cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi,$$

откуда получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cos\varphi = \sin^2\varphi.$$

Если учесть, что $E_x \sim x$, $E_y \sim y$, то данное соотношение представляет уравнение эллипса. То есть, поскольку $E_x \sim \cos \omega t$, конец вектора $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y$, $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ будет описывать эллиптическую траекторию за время $T = 2\pi/\omega$.

Рассмотрим характерные виды поляризации.



1. $\varphi = 0$, $\dfrac{E_x}{E_1} - \dfrac{E_y}{E_2} = 0$, $E_y = \dfrac{E_2}{E_1} E_x$.

Это уравнение прямой, наклон которой к оси OX определяется отношением E_2/E_1.
Действительно, при синфазном изменении E_x и $E_y \sim \cos \omega t$ синхронно изменяется и результирующий вектор $\vec{E}$. Легко видеть, что такая же по типу *линейная* поляризация имеет место и при $\phi = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2. $\phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{E_x^2}{E_1^2} + \dfrac{E_y^2}{E_2^2} = 1$.

Это каноническое уравнение эллипса с большой и малой полуосями, ориентированными точно по осям x и y. Направление вращения вектора $\vec{E}$ определяется знаком φ. Для $\phi = -\pi/2$ какое будет вращение, левое или правое? - Правое.

1.2.11. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Как известно, в объеме V сосредоточен запас энергии электромагнитного поля

$$W = \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV .$$

Рассмотрим изменение энергии W во времени. Для этого перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}_{cond} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

считая токи переноса и сторонние токи отсутствующими. Домножим первое уравнение на $\vec{E}$, а второе - на $\vec{H}$ скалярно и вычтем полученные результаты:

$$\vec{E}\cdot rot\vec{H}-\vec{H}\cdot rot\vec{E}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\vec{j}_{cond}\cdot\vec{E}. \qquad (*)$$

Учитывая соотношения

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{2}\right),$$

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}^{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(H^{2}\right),$$

$$\vec{E}\cdot rot\vec{H}-\vec{H}\cdot rot\vec{E}=-div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right],$$

и интегрируя (*) по объему, получаем

$$\int_V div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]dV=-\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\mu H^{2}}{2}+\frac{\varepsilon E^{2}}{2}\right)dV-\int_V\left(\vec{j}_{cond}\cdot\vec{E}\right)dV.$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V div\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S},$$

и вводя вектор

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\times\vec{H}\right],$$

получаем

$$-\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)dV = \oint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} + \int_V \left(\vec{E}\cdot\vec{\delta}_{cond}\right)dV\,. \qquad (**)$$

Уравнение (**) выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле.

Левая часть - полное изменение электромагнитной энергии в объеме V во времени.

Первый член в правой части - поток вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую объем V. ($\vec{\Pi}$ -плотность потока энергии через поверхность S в единицу времени). Второй член в правой части (**) - количество тепла, выделяющегося в проводящих частях объема V в единицу времени.

На самостоятельное изучение выносится раздел:

- ***1.2.12. Распространение волновых пакетов. Групповая скорость***

Задача 2.2

Для электромагнитной волны, поляризованной по оси *x*, распространяющейся вдоль оси *y* в диэлектрической среде с относительной проницаемостью $\varepsilon_r = 4$, имеющей амплитуду напряженности электрического поля $E_m = 10$ В/м:

1. Найти амплитуду и направление вектора напряженности магнитного поля.
2. Найти амплитуду и направление вектора Пойнтинга.

Размерности найденных амплитуд выразить в системе СИ.