

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Понятие вероятности восходит к древним временам; оно было известно уже античным философам. Мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий, впервые возникла у древнегреческих материалистов.



В развитии теории вероятностей весьма большую роль играли задачи, связанные с азартными играми, в первую очередь с игрой в кости. Уже в древности игра в кости была популярна и любима.



Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями **Паскаля** (1623-1662), **Ферма** (1601-1665) и **Гюйгенса** (1629-1695) в области теории азартных игр. В этих работах постепенно сформировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены их основные свойства и приемы их вычисления. Наряду с задачами азартных игр уже в самом начале возникновения теории вероятностей появились задачи, связанные с составлением таблиц смертности и вопросами страхования. В Лондоне уже с 1592 года велись точные записи о смертности.



Б. Паскаль



П. Ферма

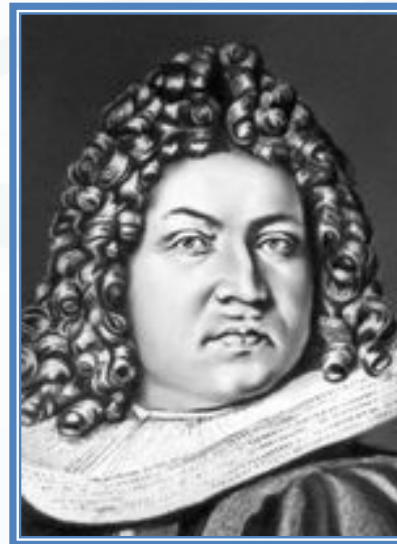


Х. Гюйгенс



Крупный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с работами **Якова Бернулли** (1654-1705). Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – так называемый закон больших чисел. Он гласит: явления, вероятностные при их малом числе, при большом количестве становятся закономерными, при очень большом – неизбежными.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$



Яков Бернулли

Ночью светит солнце

1 января – праздничный день

При броске кости выпало «7»

При броске монеты выпал «орел»

При броске монеты выпала «решка»

Равновероятные события

Невозможное событие

Достоверное событие

Случайное событие

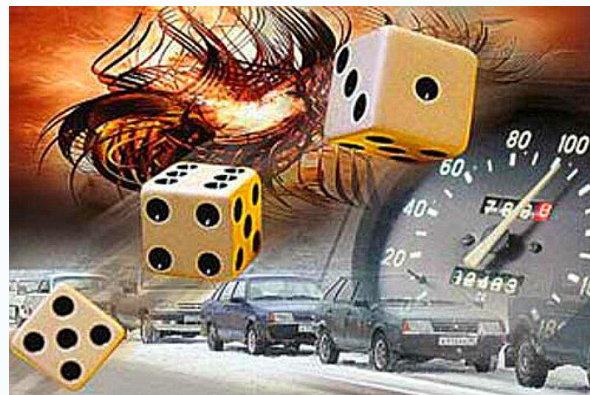


СЛУЧАЙНОЕ - событие, которое может произойти, а может и не произойти.

НЕВОЗМОЖНОЕ - событие, которое в данных условиях (опыте) не может произойти.

РАВНОВОЗМОЖНЫ
Е - события, любое из которых не обладает никаким преимуществом появляться чаще при многократных испытаниях

ДОСТОВЕРНОЕ - событие, которое при данных условиях всегда произойдет



Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов для события A к числу всех равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{k}{n} \text{ формула Лапласа}$$

n - число равновозможных исходов

k - число благоприятных исходов события

A



Алгоритм нахождения вероятности

1. Определить, что является элементарным событием A .
2. Найти общее число элементарных событий N .
3. Определить, какие элементарные события благоприятствуют событию A , и найти их число $N(A)$.
4. Найти вероятность $P(A)$ события A

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают сто раз. Найдите вероятность того, что решка выпадет при 101 бросании.



$$N(A) = 1, N = 2, P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{2} = 0,5$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды.

Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

PO

OP

PP

OO



$$N(A) = 2, N = 4, P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска оканчиваются одинаково.



OP



OO



PO



PP

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз



OOO

OOP

OPO

OPP



POO

POP

PPO

PPP

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{8} = 0,375$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу



PPPP	OOPP	OOPP	PPOO
OOPP	PPPO	OPPO	OPOO
PPOP	POOP	POOO	POPP
OPOP	OPPP	POPO	OOPP

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Переформулируем вопрос:

2 способ

найти вероятность того, что решка
выпадет 4 раза

Вероятность выпадения решки при
первом броске

$$\frac{1}{2}$$

Т.к. бросков 4, то вероятность выпадения
решки при каждом броске

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участвуют из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Для Орлова возможны 25 партнеров, из них 9 русские

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{25} = 0,36$$

В группе иностранных туристов 51 человек, среди них 2 француза. Для посещения маленького музея группу случайным образом делят на 3 подгруппы, одинаковые по численности. Найдите вероятность того, что французы окажутся в одной подгруппе.

Будем считать, что первый француз уже занял место в какой-то подгруппе. В каждой подгруппе 17 человек. Вероятность того, что второй француз попадёт в ту же группу, что и первый, равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{16}{50} = 0,32$$

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

$$\frac{1000 - 5}{1000} = 0,995$$

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине сумка окажется качественной.

$$\frac{100}{100 + 3} = \frac{100}{103}$$

В первом случае 1000 - вся выборка, 5 неисправных среди всех 1000 садовых насосов; а во втором вся выборка 103, из нее 100 качественные

В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Вероятность того, что команда России окажется во второй группе, равна отношению количества карточек с номером 2, к общему числу карточек.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода).

Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(\text{ХХО}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(\text{ХОО}) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(\text{ОХО}) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008;$$

$$P(\text{ООО}) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128.$$

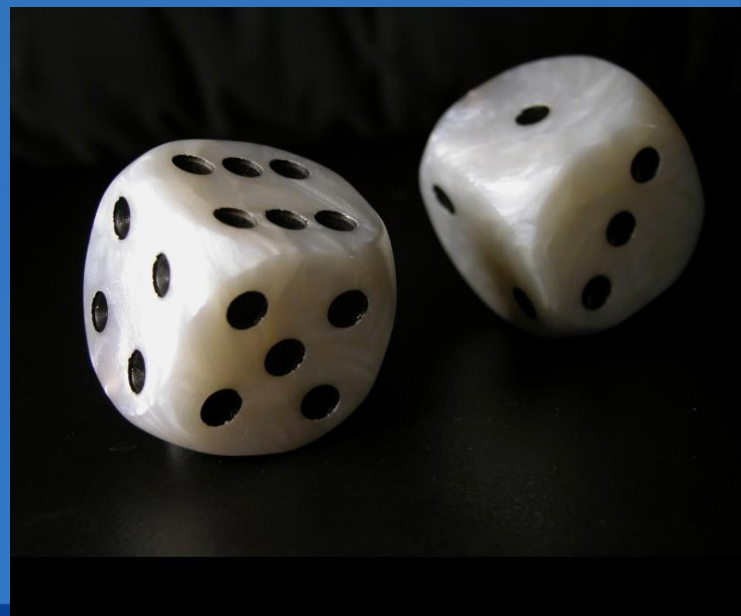
Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\text{ХХО}) + P(\text{ХОО}) + P(\text{ОХО}) + P(\text{ООО}) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

Двое играют в кости - они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

Первый выиграет, если у второго выпадет 1, 2 или 3.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{6} = 0,5$$



В случайном эксперименте бросают две игральные кости.

Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13

Строки – результат первого броска,
столбцы – второго

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$$

Правила комбинаторики

суммы

$$A + B$$

*происходит
хотя бы одно из событий*

А или В

$$A \boxplus B$$

произведения

$$A \cdot B$$

*происходят
оба события*

А и В

$$A \boxtimes B$$

У двух школьников по четыре шариковых ручки (красная, зелёная, синяя и чёрная). Они наугад обменялись одной ручкой. Какова вероятность того, что у одного из них окажется две ручки чёрного цвета?

$\frac{1}{4}$

-вероятность того, что первый школьник станет обменивать чёрную ручку

$\frac{3}{4}$

-вероятность того, что второй школьник станет обменивать ручку другого цвета

Вероятность того, что обе чёрные ручки окажутся у второго школьника

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

Т.к. по условию школьники не пронумерованы, то искомая вероятность

$$2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Выбор формулы

Учитывается ли
порядок следования элементов?

да

нет

Все ли элементы входят в
соединение?

да

нет

перестановки

размещения

сочетания

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

У Пети в кармане есть 8 монет, из которых 6 монет по рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколькими способами Петя может это сделать, если известно, что обе монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

Из трёх монет две зафиксированы, выбираем из $8-2=6$ монет $3-2=1$ монету по рублю

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_6^1 = 6$$

В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Возможны 2 варианта: либо Петя двухрублёвые монеты вообще не перекладывал, либо переложил сразу обе.

Если двухрублевые монеты не перекладывались, то 3 монеты по рублю можно выбрать из 4 C_4^3 способами.

Если обе двухрублевые монеты переложены, то еще одну рублевую монету можно выбрать из 4 C_4^1 способами.

Всего выбираем 3 монеты из $4+2=6$ C_6^3 способами.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_4^3 + C_4^1}{C_6^3} \quad C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_4^1 = 4$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 20$$

$$P(A) = \frac{4+4}{20} = 0,4$$

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Чтобы пятирублевые монеты лежали в разных карманах, надо переложить только одну из них. Это можно сделать C_2^1 способами.

Всего Петя переложил 3 монеты, придется переложить еще 2 монеты по 10 рублей. Таких монет у Пети 4, поэтому количество способов равно C_4^2

Переложить 3 монеты из 6 имеющихся можно C_6^3 способами.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 6}{20} = 0,6$$

2 способ



1

123

234

345

456



2

124

235

346

125

236

356

126

245



3

134

246

135

256

136



4

145

146

156



5



6

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{12}{20} = 0,6$$