

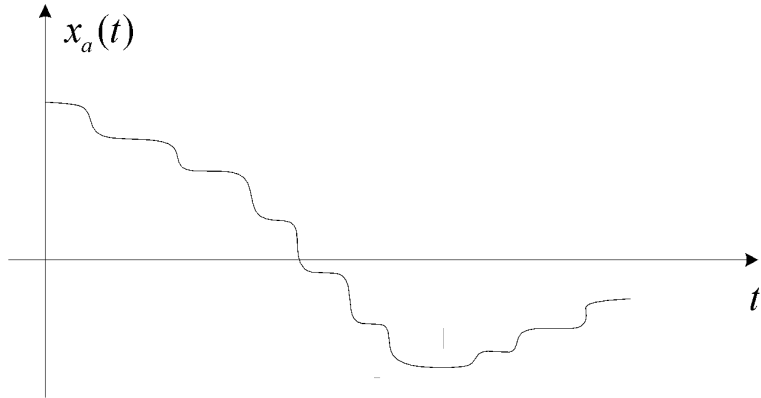
Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры

Общие определения
Содержание ЦОС

Аналоговый, дискретный и цифровой сигналы

1. Аналоговый сигнал $x_a(t)$

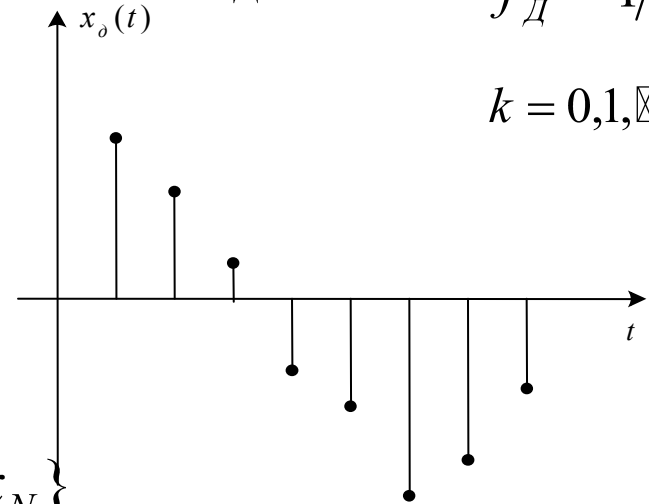
$$x_1 \leq x_a \leq x_2 \quad t_1 \leq t \leq t_2$$



2. Дискретный сигнал $x_D(k\Delta t)$

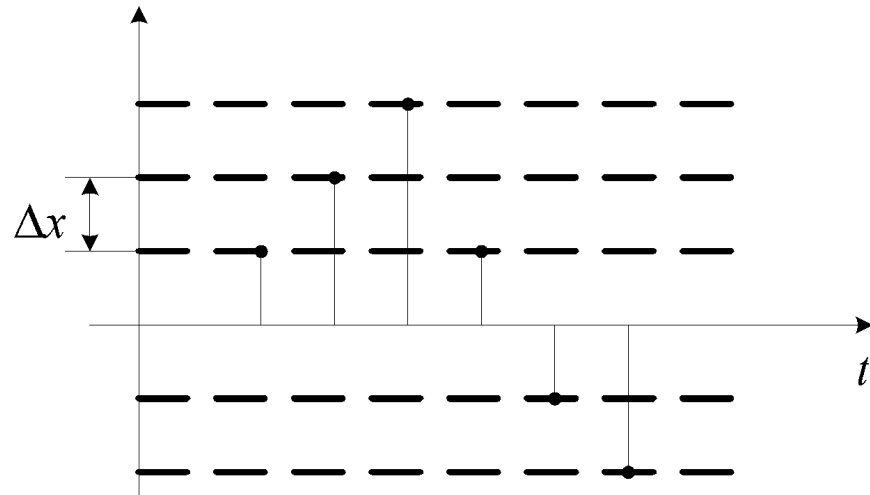
$$x_1 \leq x_D \leq x_2; \quad f_D = 1/\Delta t$$

$$k = 0, 1, \infty$$

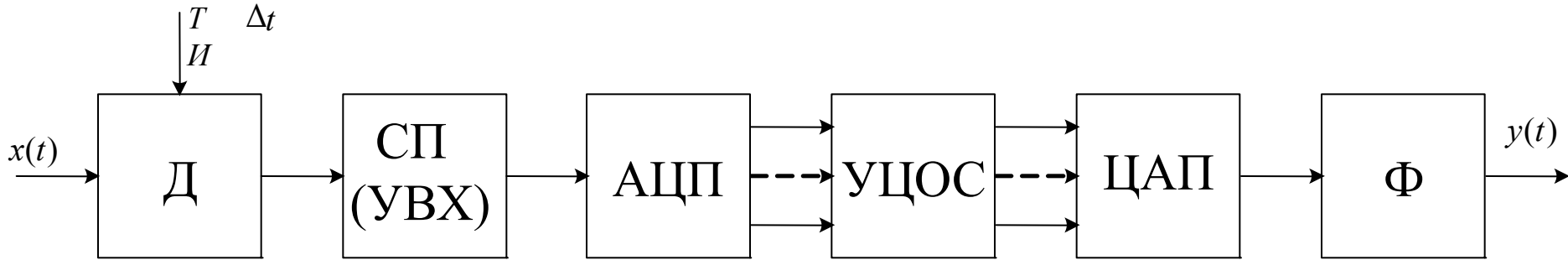


3. Цифровой сигнал $x_C(k\Delta t) \in \{x_1, \dots, x_N\}$

$$k = 0, 1, \infty$$



Содержание ЦОС



Этапы ЦОС

Первичная обработка $S_i \Rightarrow S_i^*$

Преобразование в цифровую форму.

Декодирование, демодуляция.

Линеаризация. Масштабирование.

Вычисление корректирующих зависимостей.

Фильтрация, усреднение, экстраполяция, сравнение с пределами.

Слежение за скоростью изменения параметров сигнала с их индикацией.

Вычисление значений непосредственно не измеряемых параметров.

Формирование качественно новой информации и устранение избыточности путем сжатия.

Организация информационного обмена внутри ЦОС и обмена с внешними устройствами.

Вторичная обработка

$$* \\ S_i \Rightarrow S_1$$

Задачи:

- Обработка звуковых сигналов (анализ, синтез речи и звуков, сжатие информации, распознавание речи и идентификация диктора).
- Обработка изображений (восстановление, улучшение и коррекция изображений, сжатие информации, выделение контуров, повышение контрастности и т.д., распознавание образов).
- Синтез трехмерной структуры объекта по его проекциям.
Пространственная локализация источников волновой активности.
- Поиск, обнаружение, классификация, измерение параметров и координат объектов в радиолокации и гидролокации.
- Управление системами.
- Цифровое моделирование.
- Контроль, диагностика технических систем, природных явлений и объектов.
- ...

Возможна реализация УЦОС по схеме жесткой логики либо программно

Достоинства ЦОС:

- Повторяемость характеристик
- Высокая точность воспроизведения операторов (функций) и стабильность их характеристик
- Независимость параметров к изменению внешних условий
- Возможность модернизации в процессе эксплуатации
- Высокая надежность
- Возможность диагностики и самодиагностики
- Возможность или простота реализации (устройств памяти, математических функций и др.)

Недостатки ЦОС:

- Необходимость дополнительных операций преобразования
- Ограниченное быстродействие
- Погрешности в выполнении алгоритмов обработки из-за конечной разрядности
- Нелинейные эффекты при переполнении регистров
- Влияние требований к точности на скорость обработки сигналов

Классификация сигналов

- Детерминированные и случайные
- Сигналы с ограниченной энергией (с интегрируемым квадратом)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

- Периодические $x(t+nT)=x(t)$ и непериодические
- Сигналы конечной длительности
- Гармонические сигналы
- Стационарные и нестационарные
- Эргодические и неэргодические
- Скалярные, векторные, многомерные...

Модели непрерывного сигнала

I. Вероятностные стационарные модели

1. Многомерная ПРВ значений сигнала (Нормальная, Дирихле, Уишарта)

2. Гауссовская плотность распределения вероятностей

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

3. Равномерная плотность распределения вероятностей $w_1(x) = \frac{1}{b-a}$, где $a \leq x \leq b$

4. Релеевская плотность распределения вероятностей $w_1(x) = \frac{x}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$

5. Гармонический процесс с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой

$$x(t) = X_0 \sin[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \text{ где } w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

II. Ограничения на сигнал:

А. Конечное значение средней мощности процесса

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt < \infty$$

Б. Конечная шкала мгновенных значений

$$\max |x(t)| \leq X_{\max}$$

В. Ограничение спектра по полосе

$$\delta_F^2 = \frac{\int_{\omega_B}^{\infty} G_x(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega} = \Delta E_x / E_x$$

III. Описание случайного процесса

Энергетический спектр:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} m \left\{ S^2(j\omega) \right\}$$

Корреляционная функция:

Монотонно убывающая $R(\tau) = \exp(-\omega_1 |\tau|)$

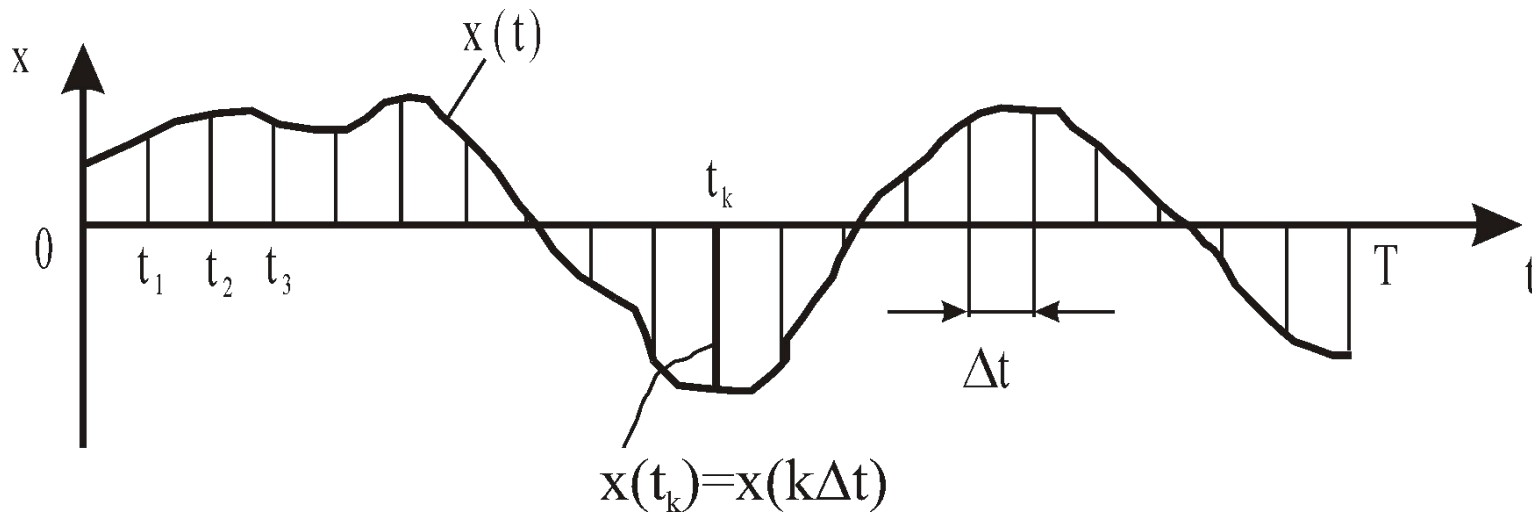
Затухающая гармоническая $R(\tau) = \exp(-\omega_1 |\tau|) \cos(\omega_0 \tau)$

Время корреляции $\tau_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau$

Дискретизация сигналов

Принципы дискретизации сигналов по времени

$$t_k = k\Delta t, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

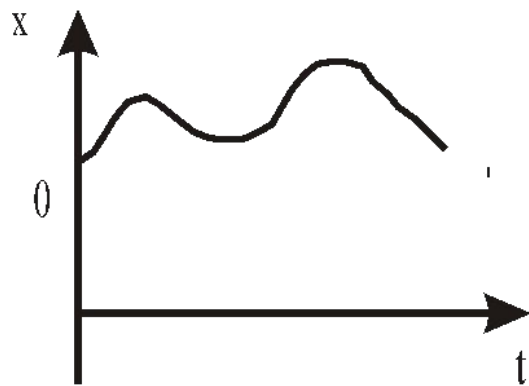


$$a_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

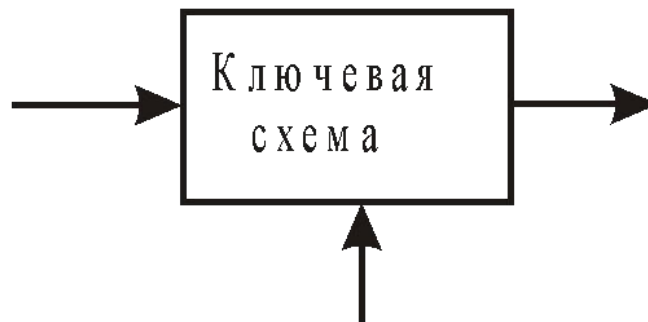
$$x_{\text{д}}(t) = x(t)a_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - k\Delta t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\delta(\xi - \xi_0)d\xi = x(\xi_0)$$

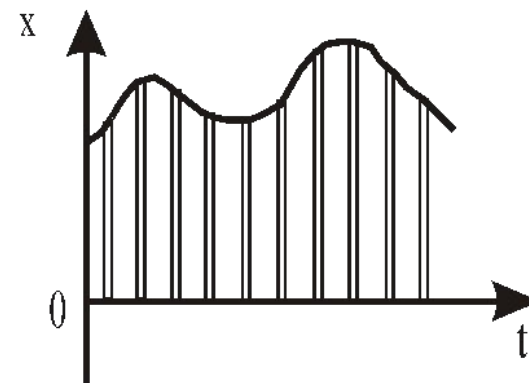
$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$$



Входной сигнал

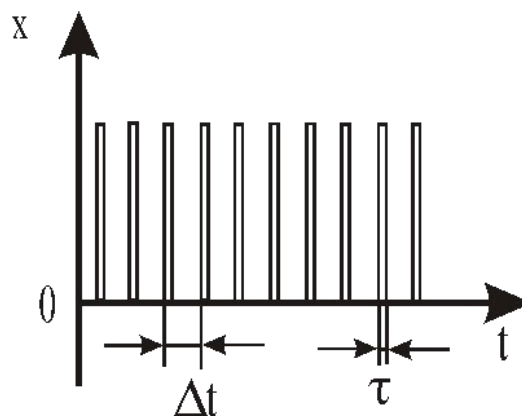


Управляющие импульсы



Выходной сигнал

$$\frac{\tau}{\Delta t} \ll 1$$



Предельная дискретизация по времени сигналов с ограниченным спектром

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B (t - k\Delta t)}{\omega_B (t - k\Delta t)} \quad \text{где} \quad \Delta t = 1/2F_B = \pi/\omega_B$$

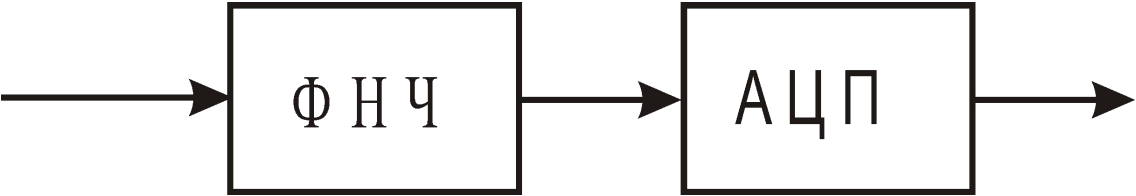
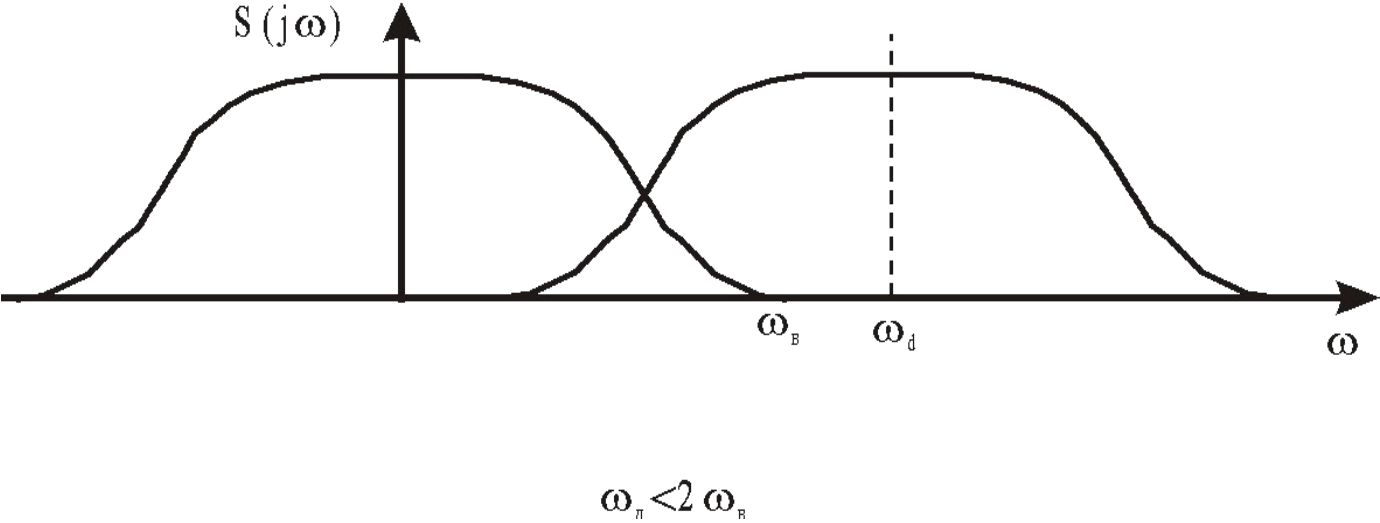
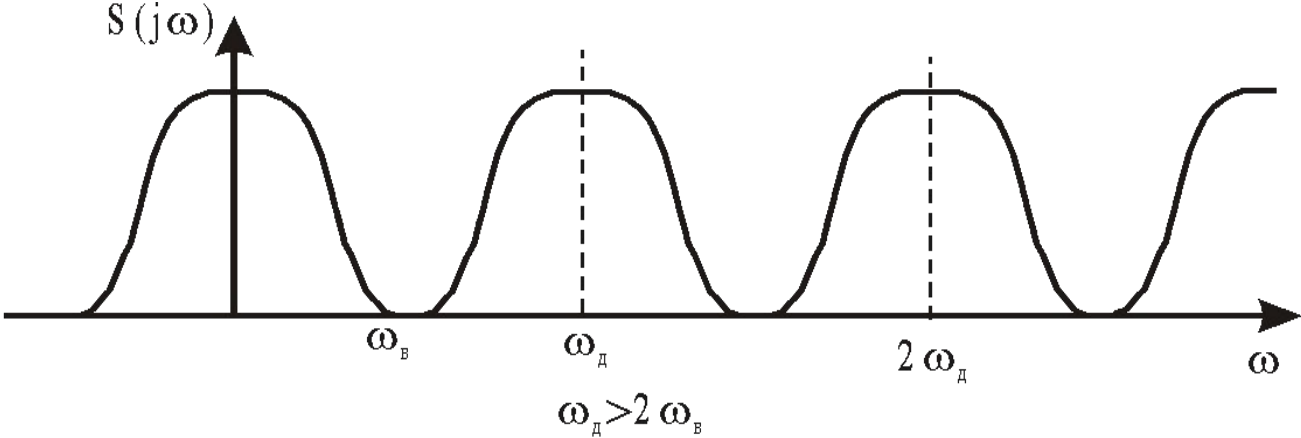
Обозначим $\varphi_k(t) = \frac{\sin \omega_B (t - k\Delta t)}{\omega_B (t - k\Delta t)}$, тогда $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \varphi_k(t)$

$$N = T_c / \Delta t = 2F_B T_c \quad x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{-N/2}^{N/2} x_k \varphi_k(k\Delta t)$$

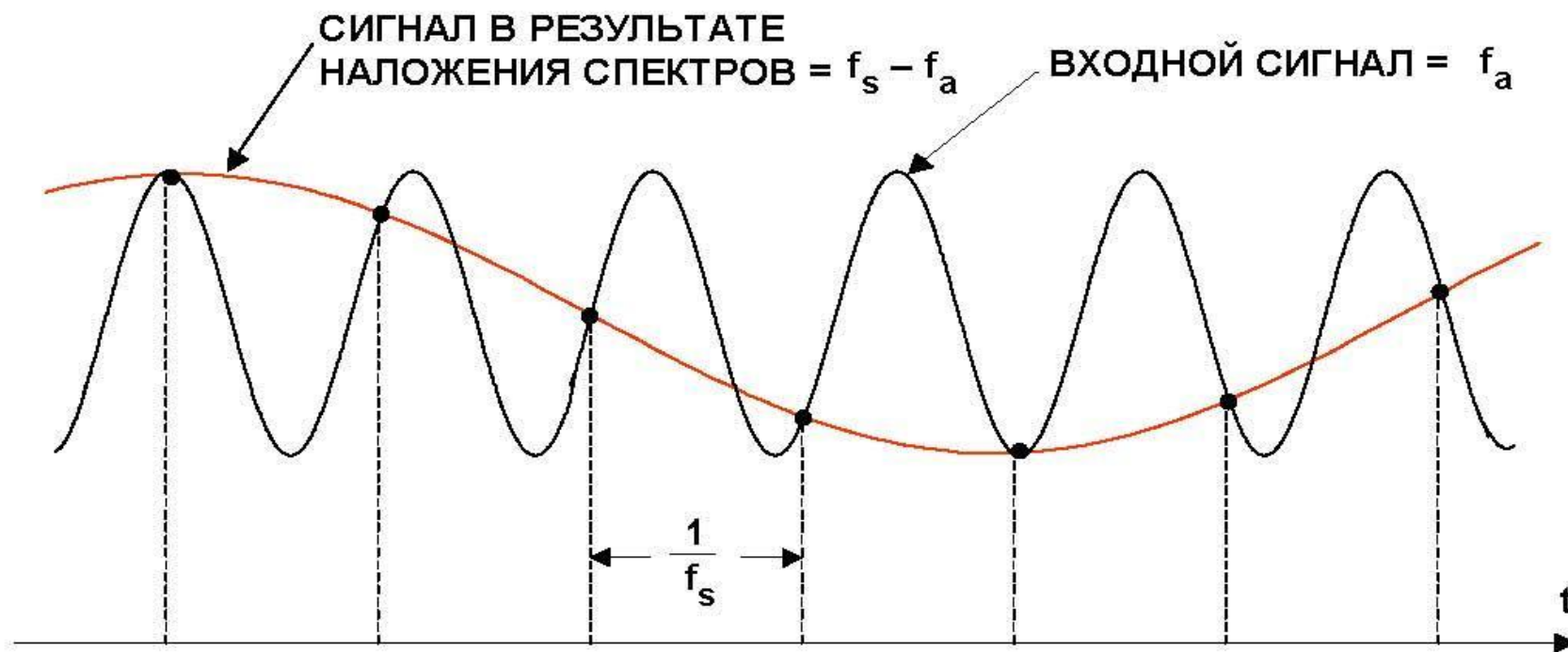
$$\delta_T^2 = \frac{\int_0^{T_c} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt}{\int_0^{T_c} x^2(t) dt} = \frac{\int_0^{T_c} \varepsilon^2(t) dt}{E_x}$$

$$\delta_D^2 = \delta_F^2 + \delta_T^2 \leq 2 \frac{\int_0^{\omega_B} G(\omega) d\omega}{E_x}$$

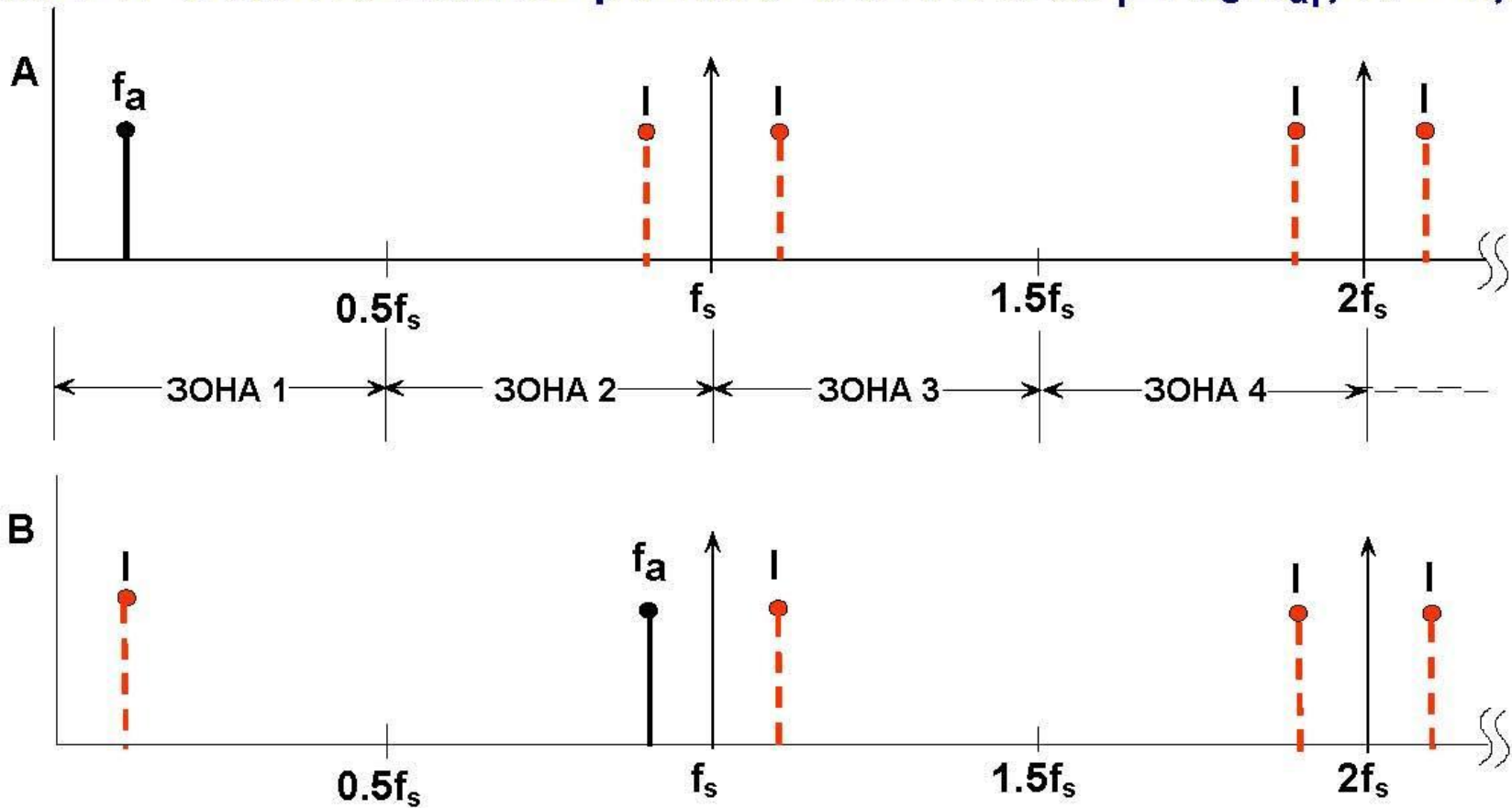
Важное условие – ограниченность спектра по частоте



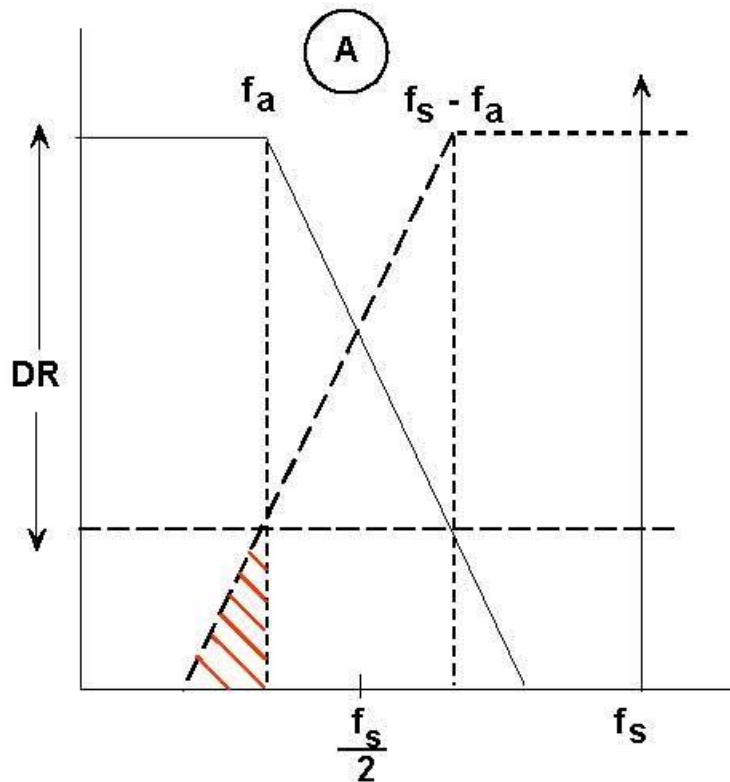
ЭФФЕКТ НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ



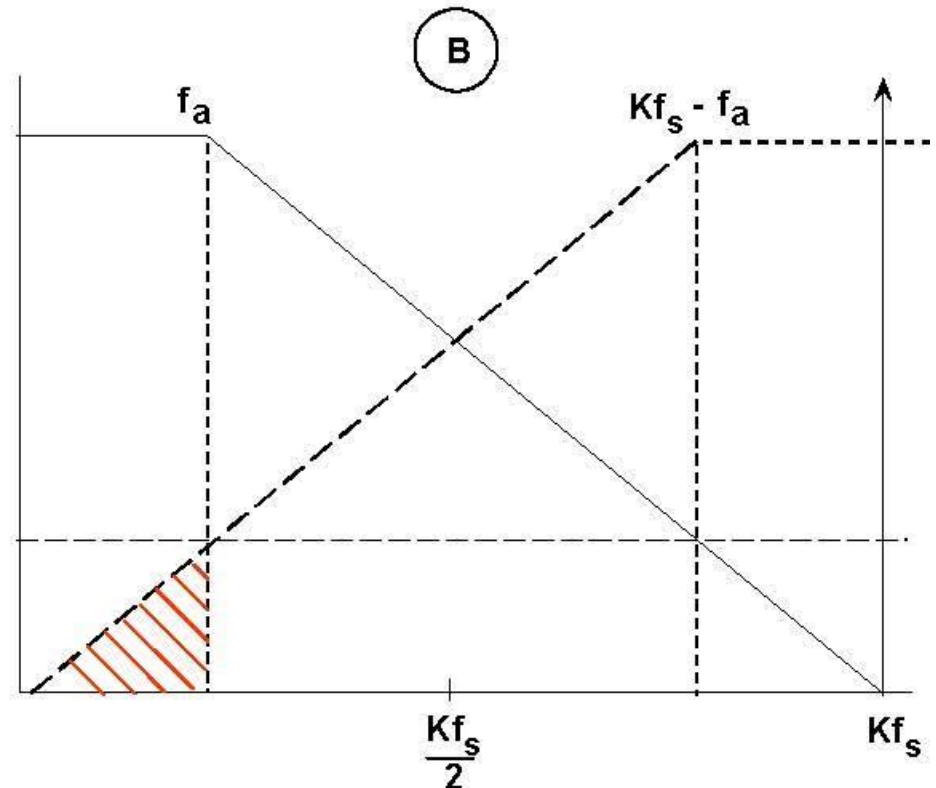
**АНАЛОГОВЫЙ СИГНАЛ С ЧАСТОТОЙ f_a ,
ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫЙ ИДЕАЛЬНЫМ АЦП С ЧАСТОТОЙ f_s ,
ИМЕЕТ СОСТАВЛЯЮЩИЕ НА ЧАСТОТАХ $|\pm Kf_s \pm f_a|$, $K = 1, 2, 3, \dots$**



ИЗБЫТОЧНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УМЕНЬШАЕТ ТРЕБОВАНИЯ К КРУТИЗНЕ СПАДА ФНЧ

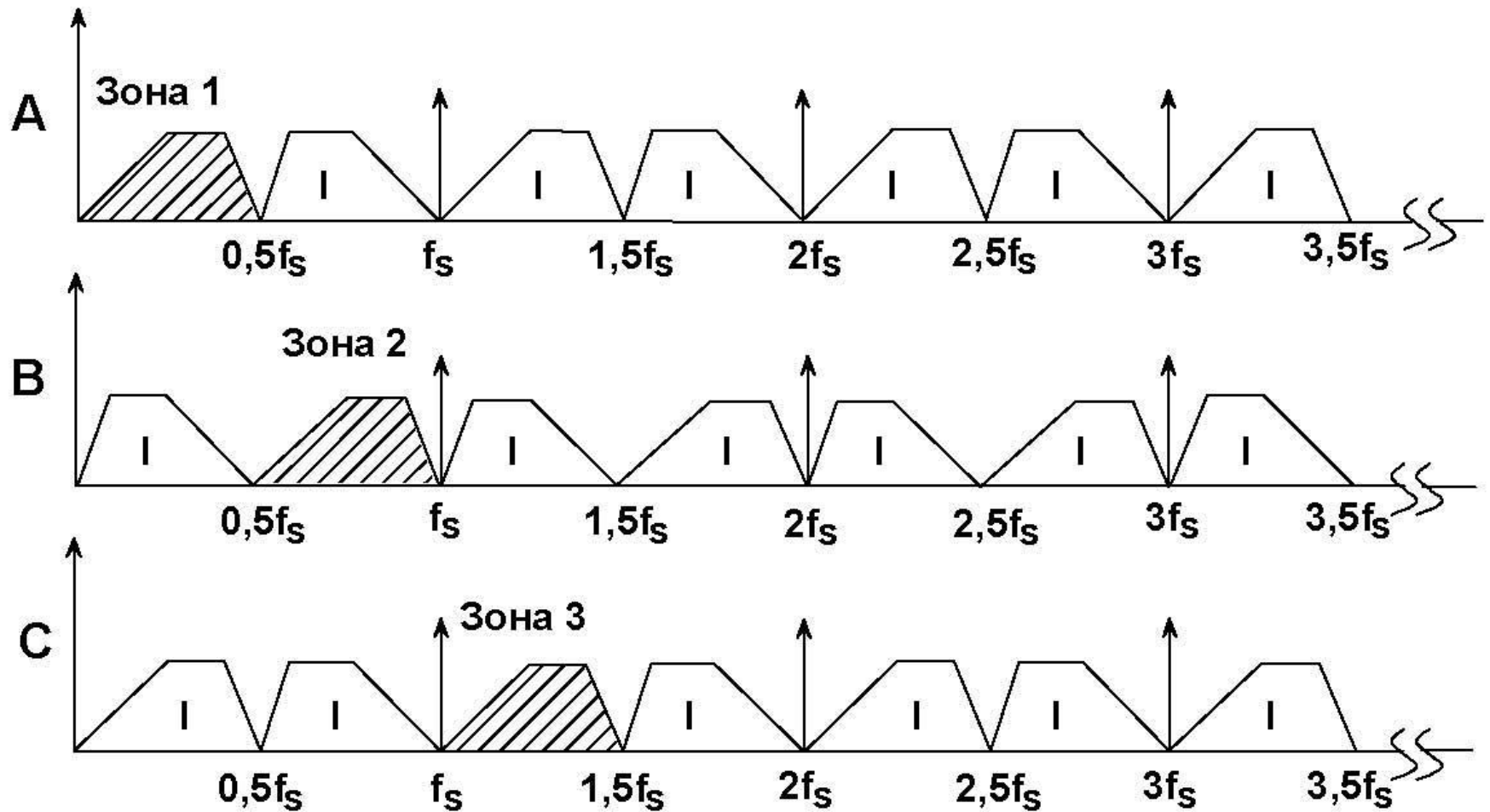


Затухание в полосе задержки = DR
Полоса пропускания: от f_a до $f_s - f_a$
Частота точки перегиба АЧХ: f_a



Затухание в полосе задержки = DR
Полоса пропускания: от f_a до $Kf_s - f_a$
Частота точки перегиба АЧХ: f_a

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА ГАРМОНИКАХ



КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА

- Частота дискретизации f_s сигнала с шириной полосы f_a должна удовлетворять условию $f_s > 2f_a$, в противном случае информация о сигнале будет потеряна
- Эффект наложения спектров возникает, когда $f_s < 2f_a$
- Эффект наложения спектров широко используются в таких задачах, как прямое преобразование ПЧ в цифровую форму

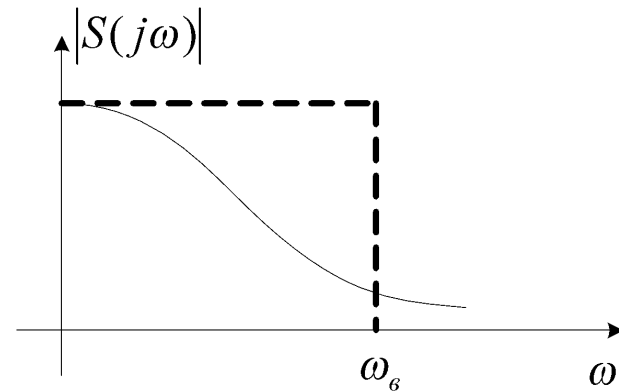
$$2f_{\max} / q \leq f_s \leq 2f_{\min} / (q - 1), \quad \text{где } q = 1, 2, \dots, E_q[f_{\max} / (f_{\max} - f_{\min})]$$

Восстановление сигналов по дискретным отсчётам

1. На основе теоремы Котельникова

Фильтровой способ

$$g(t) = 2F_B \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}$$



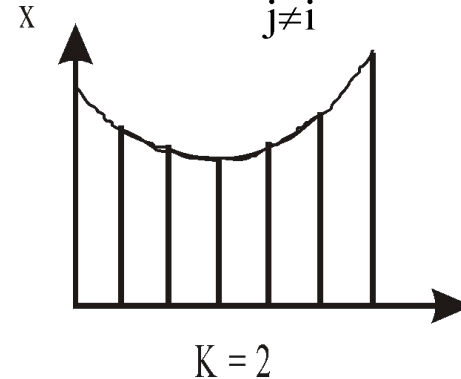
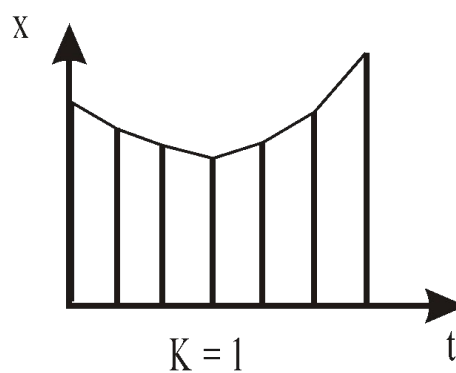
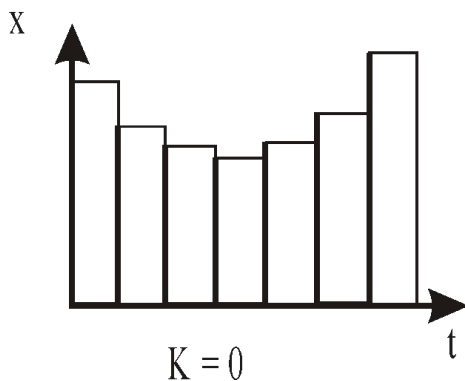
Интерполяционный способ

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin \omega_B (t - k\Delta t)}{\omega_B (t - k\Delta t)}$$

2. Практические способы восстановления на основе интерполяционных многочленов.

Многочлены Лежандра:

$$x(t) \approx f_k(t) = \sum_{i=1}^k x(t_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$



Выбор интервала дискретизации

При $k=0$ $\Delta t_{cm} \approx 0,55\delta_0\Delta t_{np}$, где $\Delta t_{np} = 1/2F_{\epsilon}$; $\delta_0 = \frac{\max|x(t) - \hat{x}(t)|}{X_{\max}}$

$$k=1 \quad \Delta t_l = 1,35\sqrt{\delta_0}\Delta t_{np}$$

$$k=2 \quad \Delta t_{nap} = \sqrt[3]{\delta_0}\Delta t_{np}$$

Пусть $\delta_0 = 10^{-3}$, тогда

$$\Delta t_{cm} \approx 0,55 \cdot 10^{-3} \Delta t_{np},$$

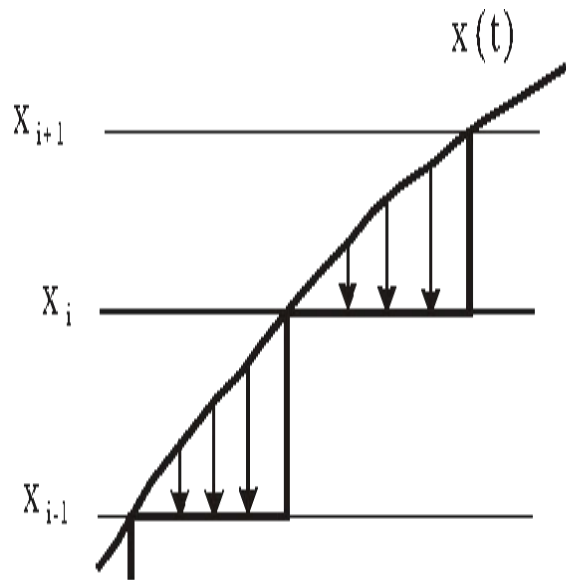
$$\Delta t_l = 0,0427 \Delta t_{np}$$

$$\Delta t_{nap} = 0,1 \Delta t_{np}$$

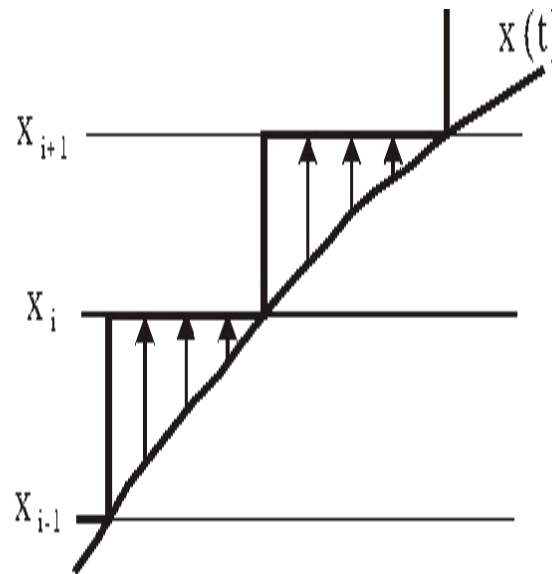
Квантование непрерывных сигналов

Способы квантования:

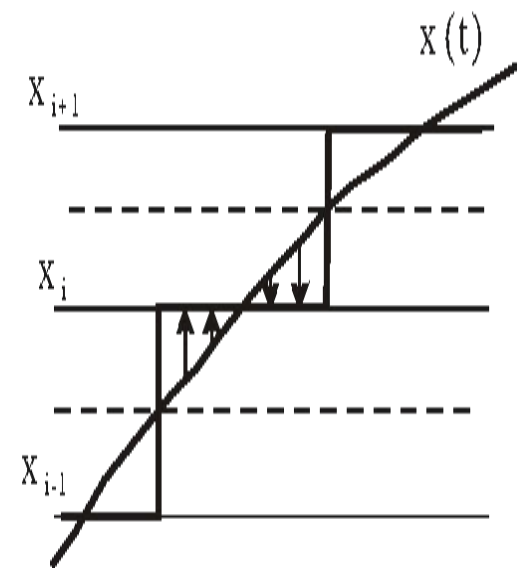
- значение квантуемой величины заменяется ближайшим нижним значением сетки квантования;
- значение квантуемой величины заменяется ближайшим верхним значением сетки квантования;
- значение квантуемой величины заменяется ближайшим верхним или нижним значением сетки квантования (по правилу округления).



$$\delta_X = X_i - X$$

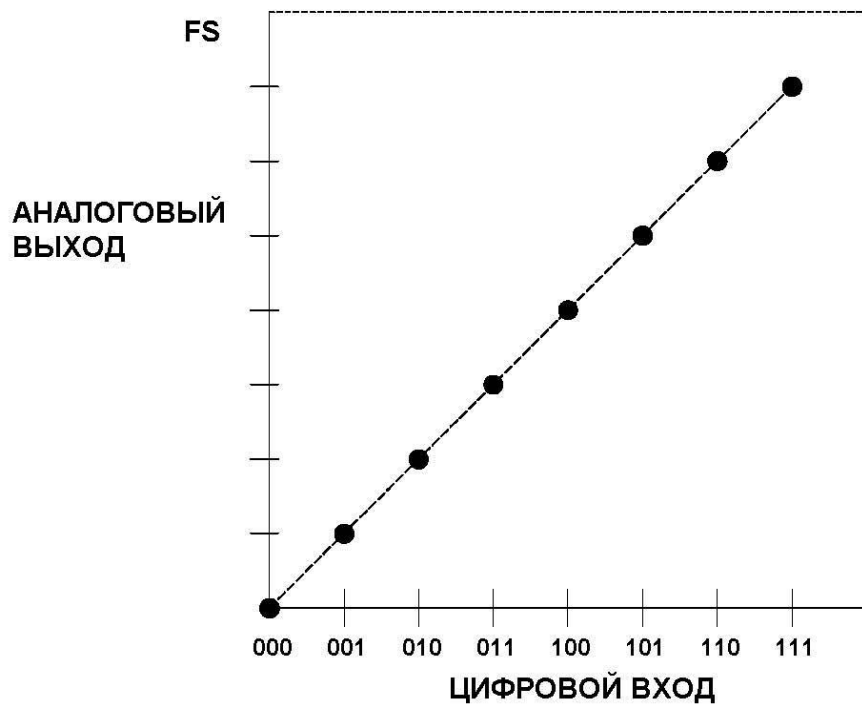


$$|\delta_X| \leq \Delta X$$

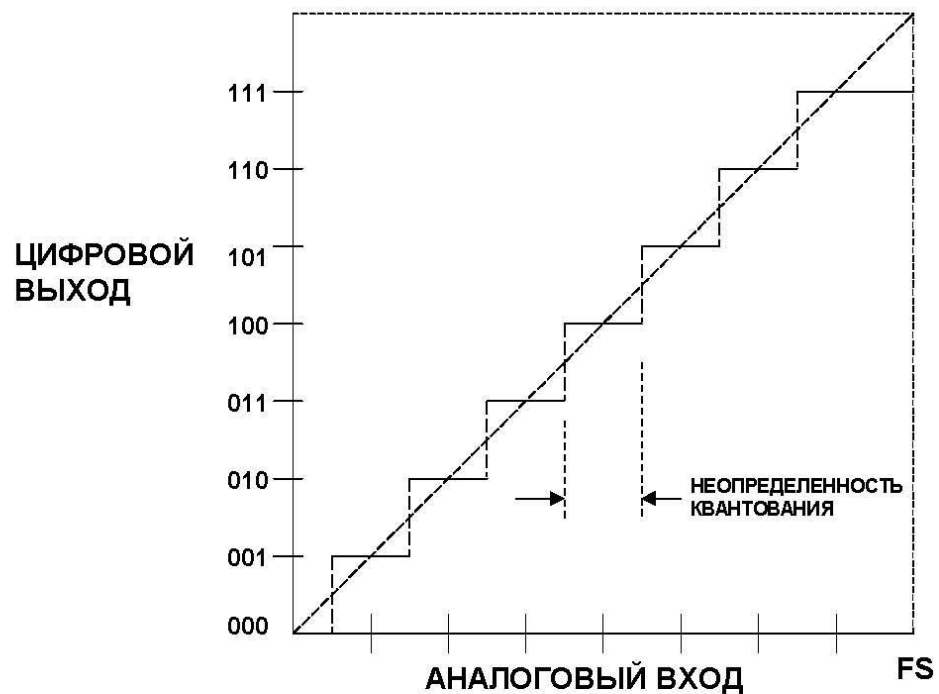


$$|\delta_X| \leq \frac{\Delta X}{2}$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ИДЕАЛЬНОГО 3-РАЗРЯДНОГО ЦАП



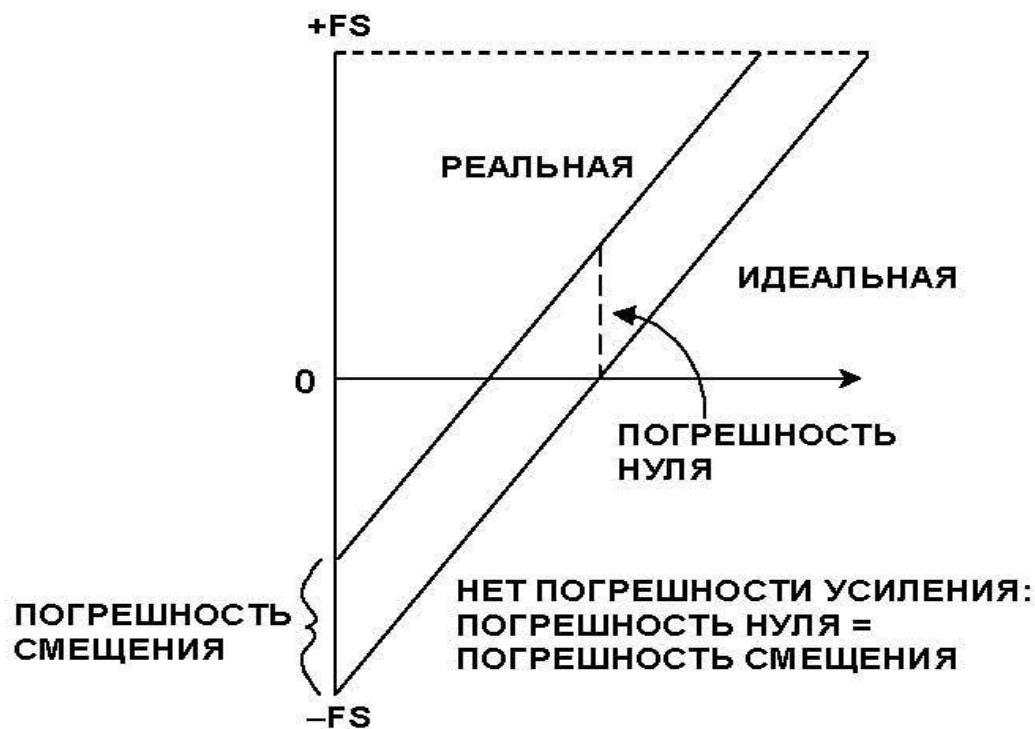
ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ИДЕАЛЬНОГО 3-РАЗРЯДНОГО АЦП



типы погрешностей по **постоянному току** в АЦП и ЦАП :

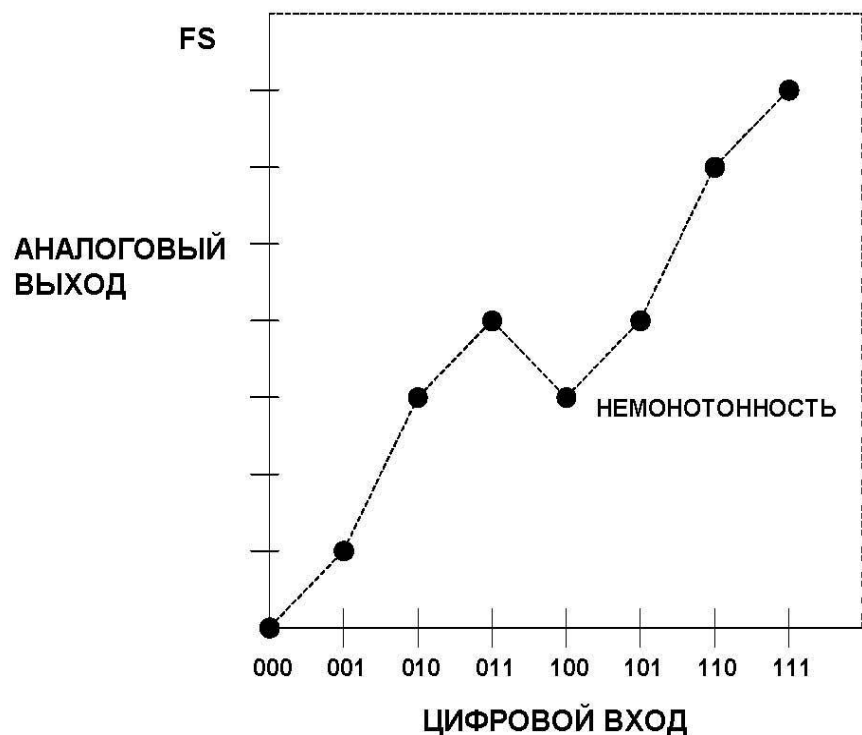
погрешность смещения, погрешность усиления, дифференциальная нелинейность (DNL), пропущенные коды.

ПОГРЕШНОСТЬ СМЕЩЕНИЯ НУЛЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ И ПОГРЕШНОСТЬ УСИЛЕНИЯ

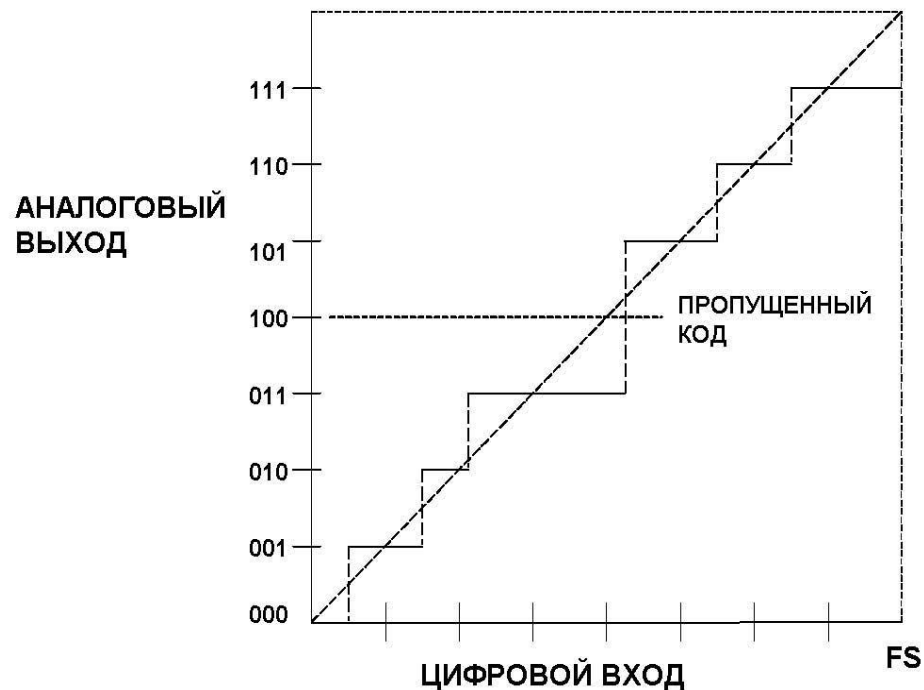


дифференциальная нелинейность (DNL), пропущенные коды.

ФУНКЦИЯ ПЕРЕДАЧИ НЕИДЕАЛЬНОГО 3-РАЗРЯДНОГО ЦАП



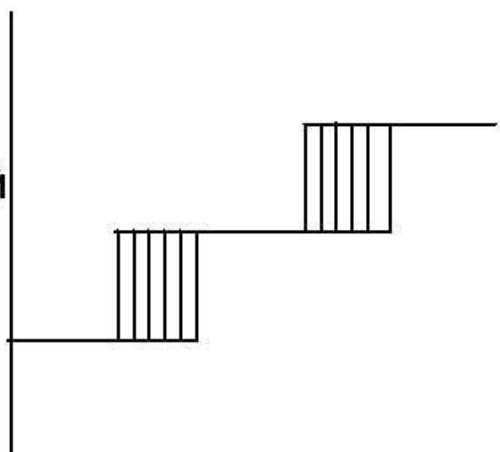
ФУНКЦИЯ ПЕРЕДАЧИ НЕИДЕАЛЬНОГО 3-РАЗРЯДНОГО ЦАП



СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ШУМА ПЕРЕХОДА КОДА АЦП И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ (DNL)

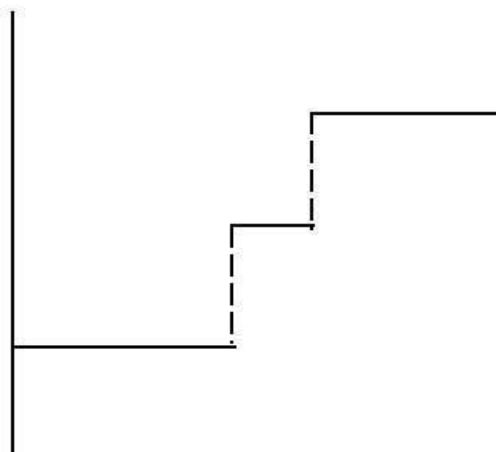
ШУМ ПЕРЕХОДА КОДА

ВЫХОДНОЙ
КОД АЦП



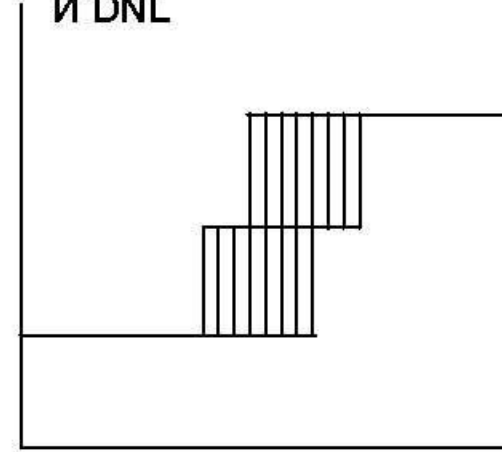
ВХОД АЦП

DNL



ВХОД АЦП

ШУМ ПЕРЕХОДА КОДА
И DNL

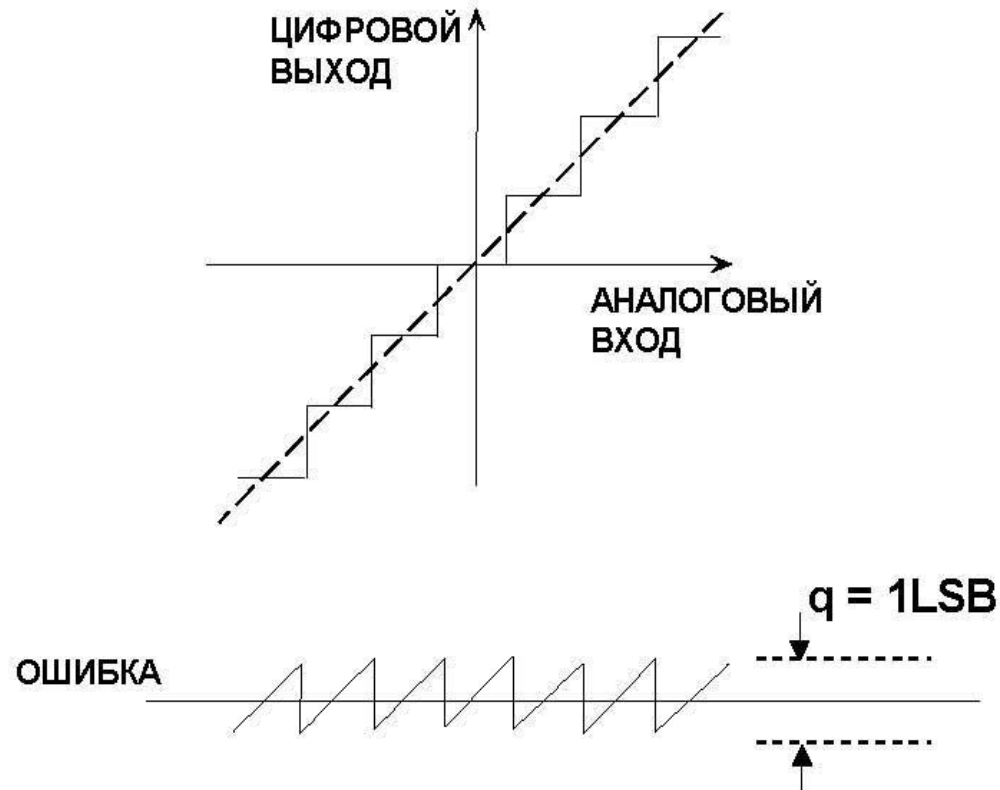


ВХОД АЦП

Погрешности по переменному току в преобразователях АЦП/ЦАП и их причины

- Искажения и шум в идеальном N -разрядном АЦП.
- Явления интегральных и дифференциальных нелинейных искажений.
- Гармонические искажения.
- Интермодуляционные искажения.
- Приведенный ко входу тепловой шум.
- Дрожание апертуры и апертурная задержка.
- Время установления ЦАП.
- Переходная характеристика ЦАП.
- ...

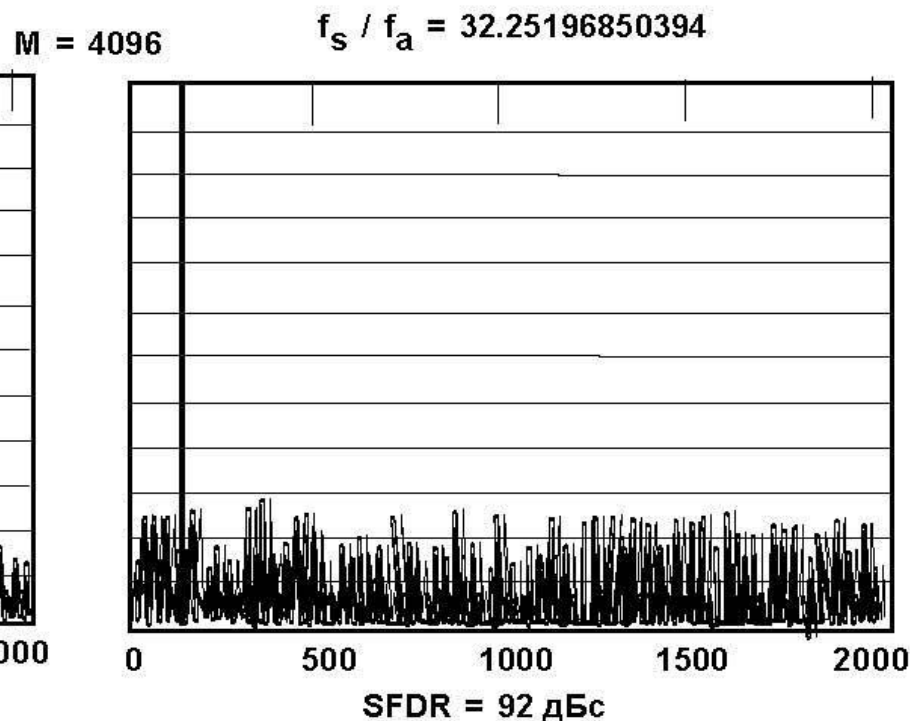
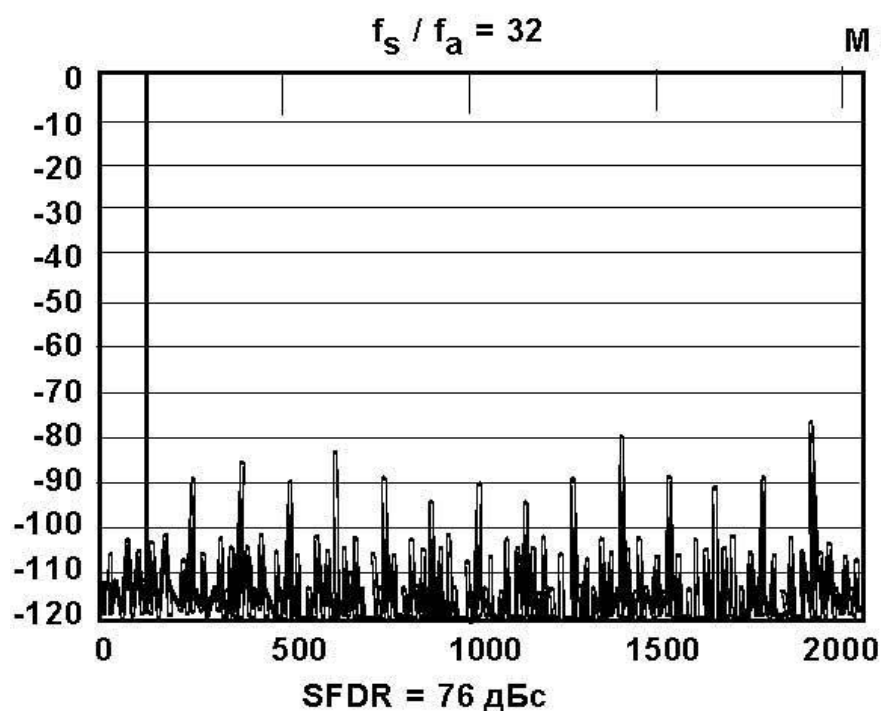
ШУМ КВАНТОВАНИЯ ИДЕАЛЬНОГО N-РАЗРЯДНОГО АЦП



СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ = $q/\sqrt{12}$

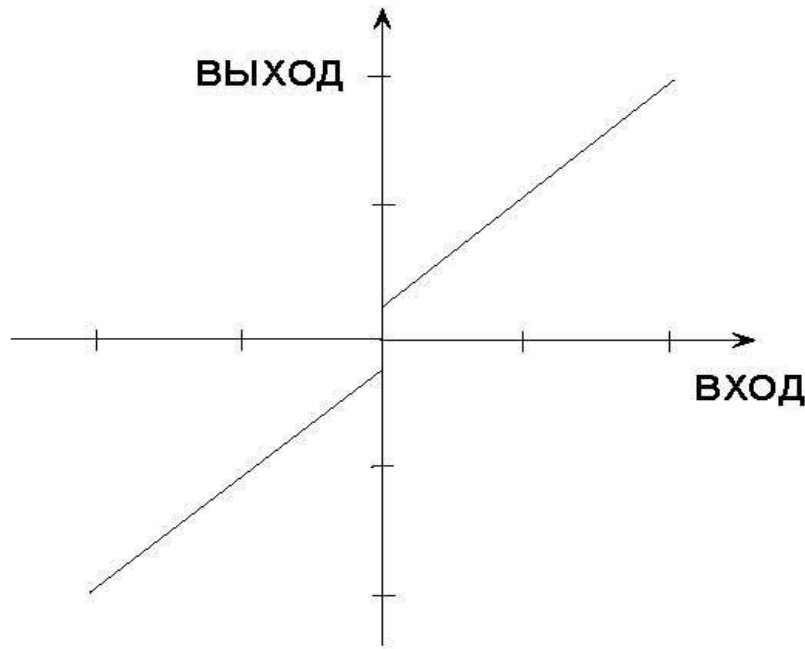
С/Ш (SNR) = $6.02N + 1.76$ дБ + $10\log\left[\frac{f_s}{2 \cdot \text{BW}}\right]$ для синусоидального сигнала, соответствующего полной шкале АЦП

ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ К ВХОДНОЙ ЧАСТОТЕ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН (SFDR) ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО 12-РАЗРЯДНОГО АЦП

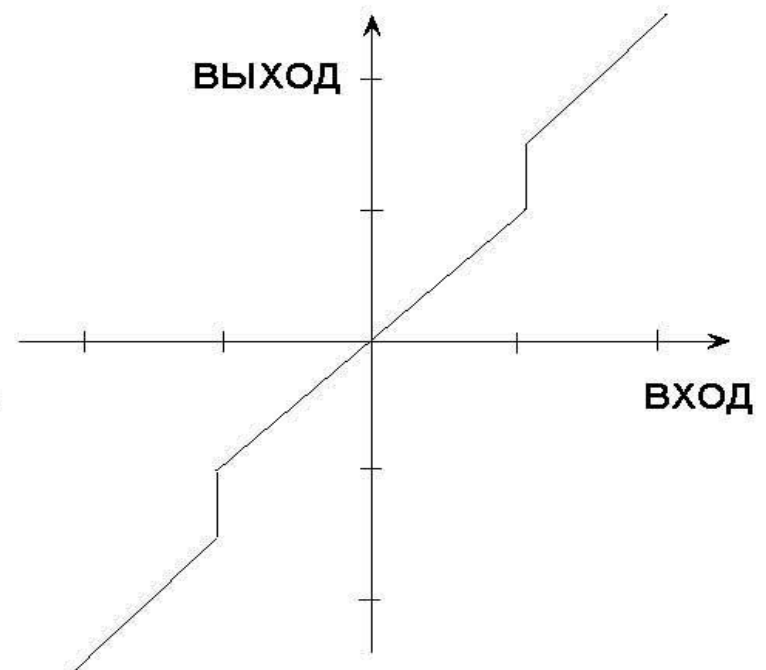


SFDR- динамический диапазон, свободный от гармоник

ТИПИЧНЫЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ (DNL) АЦП/ЦАП



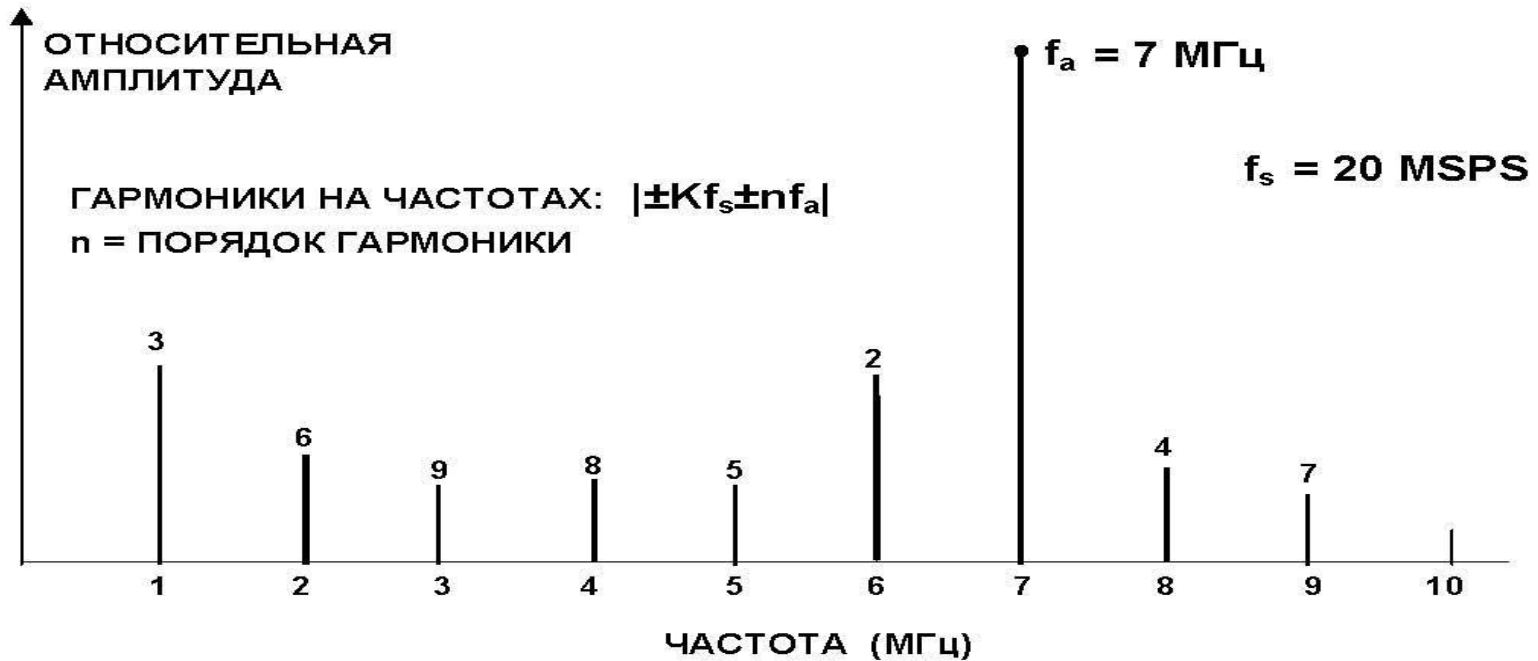
DNL В СЕРЕДИНЕ ШКАЛЫ



DNL В ТОЧКАХ 1/4 И 3/4 ПОЛНОЙ ШКАЛЫ

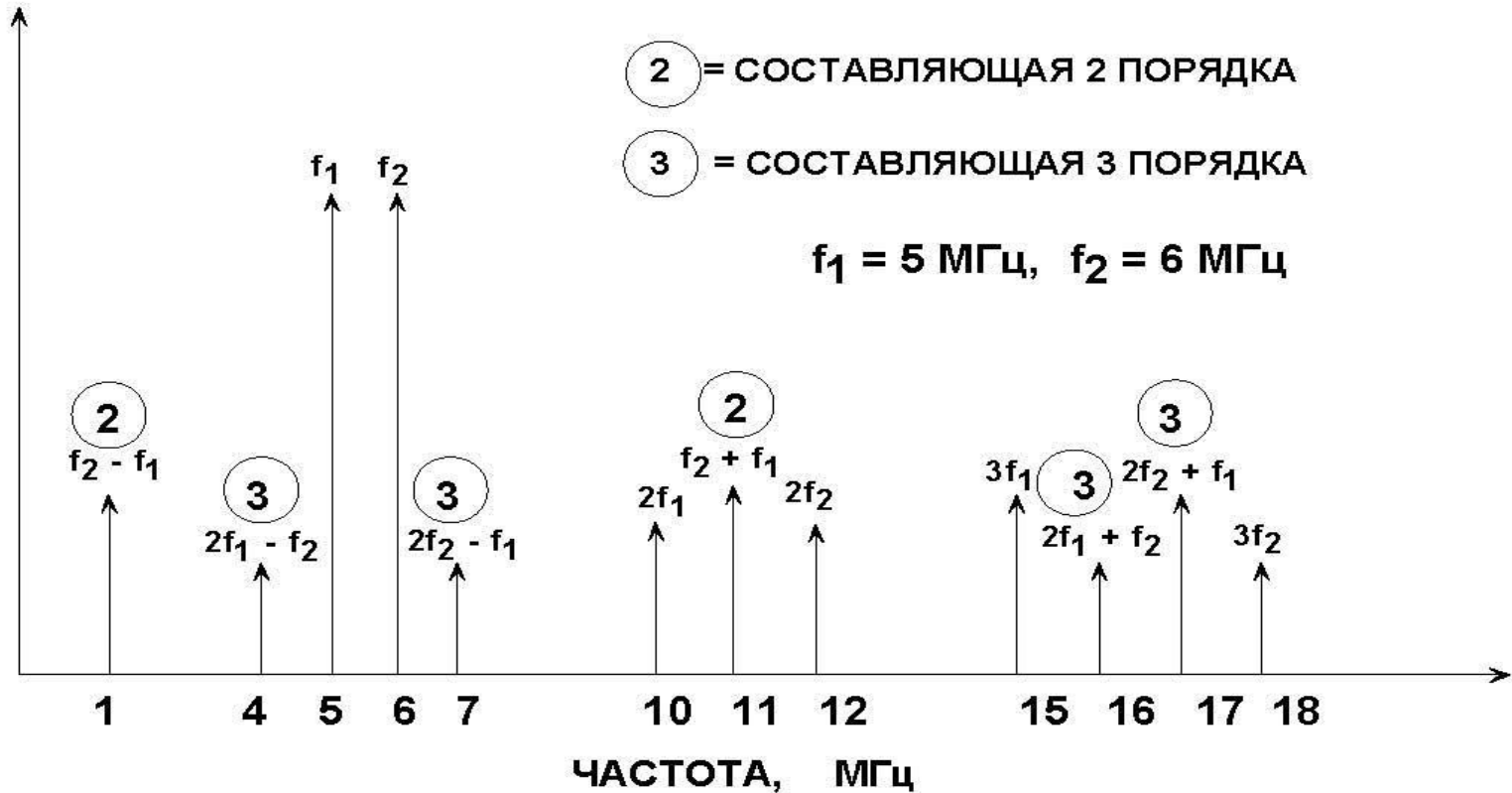
Частоты гармоник: $|\pm Kf_s \pm n f_a|$,
где n – порядок гармоники, $K = 0, 1, 2, 3, \dots$

РАСПОЛОЖЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ: ВХОДНОЙ СИГНАЛ = 7 МГц, СКОРОСТЬ (ЧАСТОТА) ДИСКРЕТИЗАЦИИ = 20 MSPS



Наихудшие гармоники, общие гармонические искажения

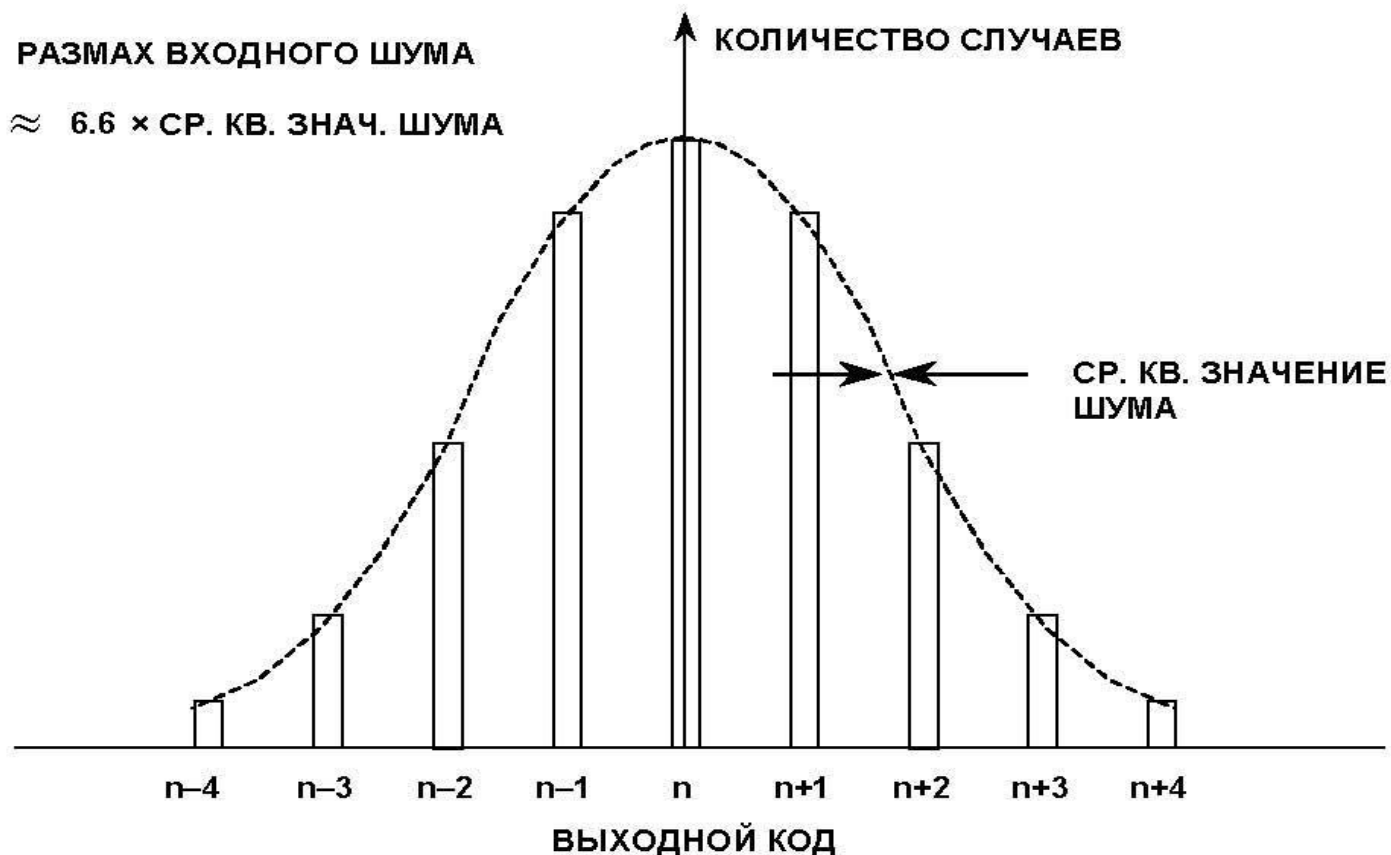
СОСТАВЛЯЮЩИЕ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ДВУХТОНАЛЬНОГО СИГНАЛА $f_1 = 5$ МГц, $f_2 = 6$ МГц



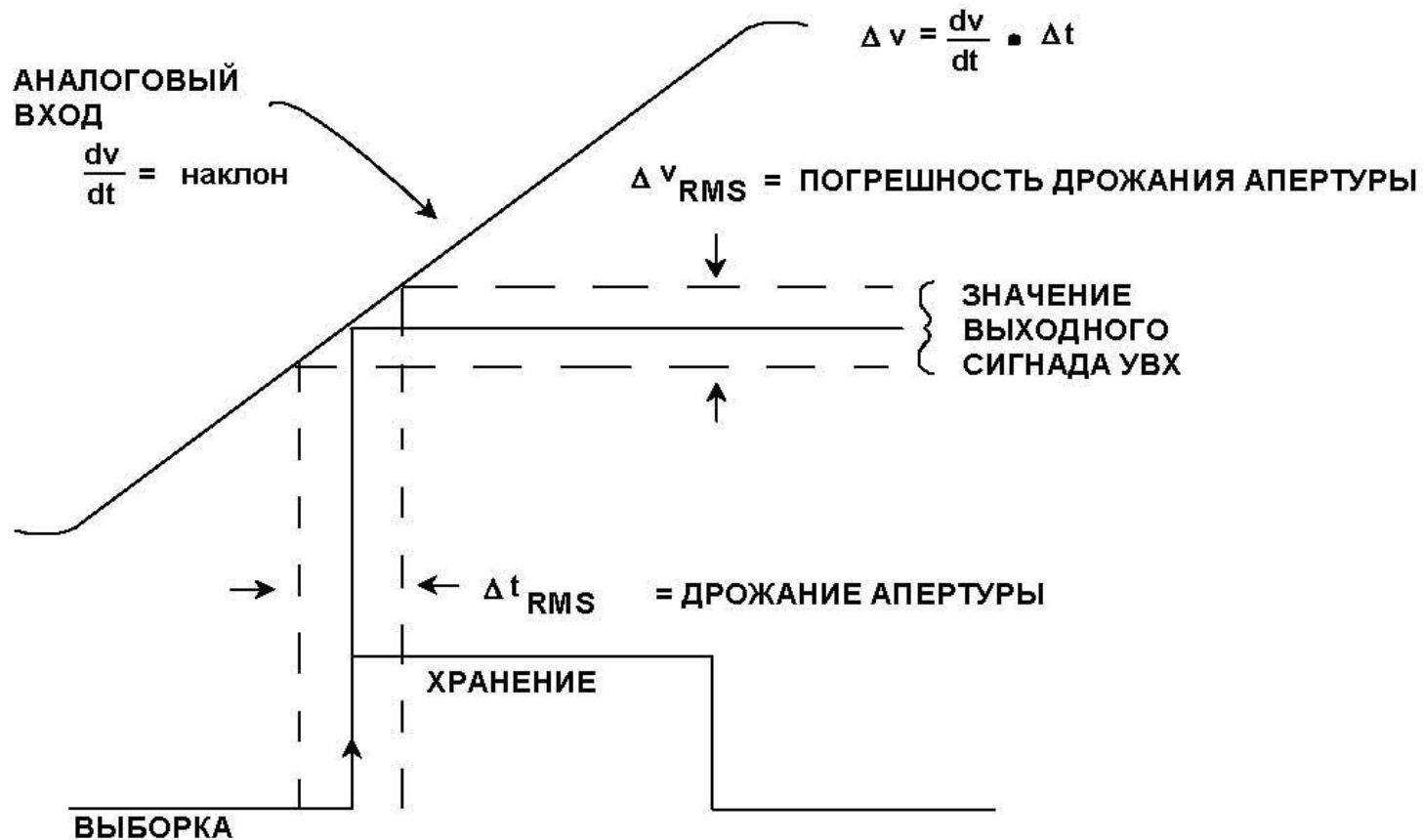
Двухтональные и многотональные интермодуляционные искажения

Приведенный ко входу тепловой шум

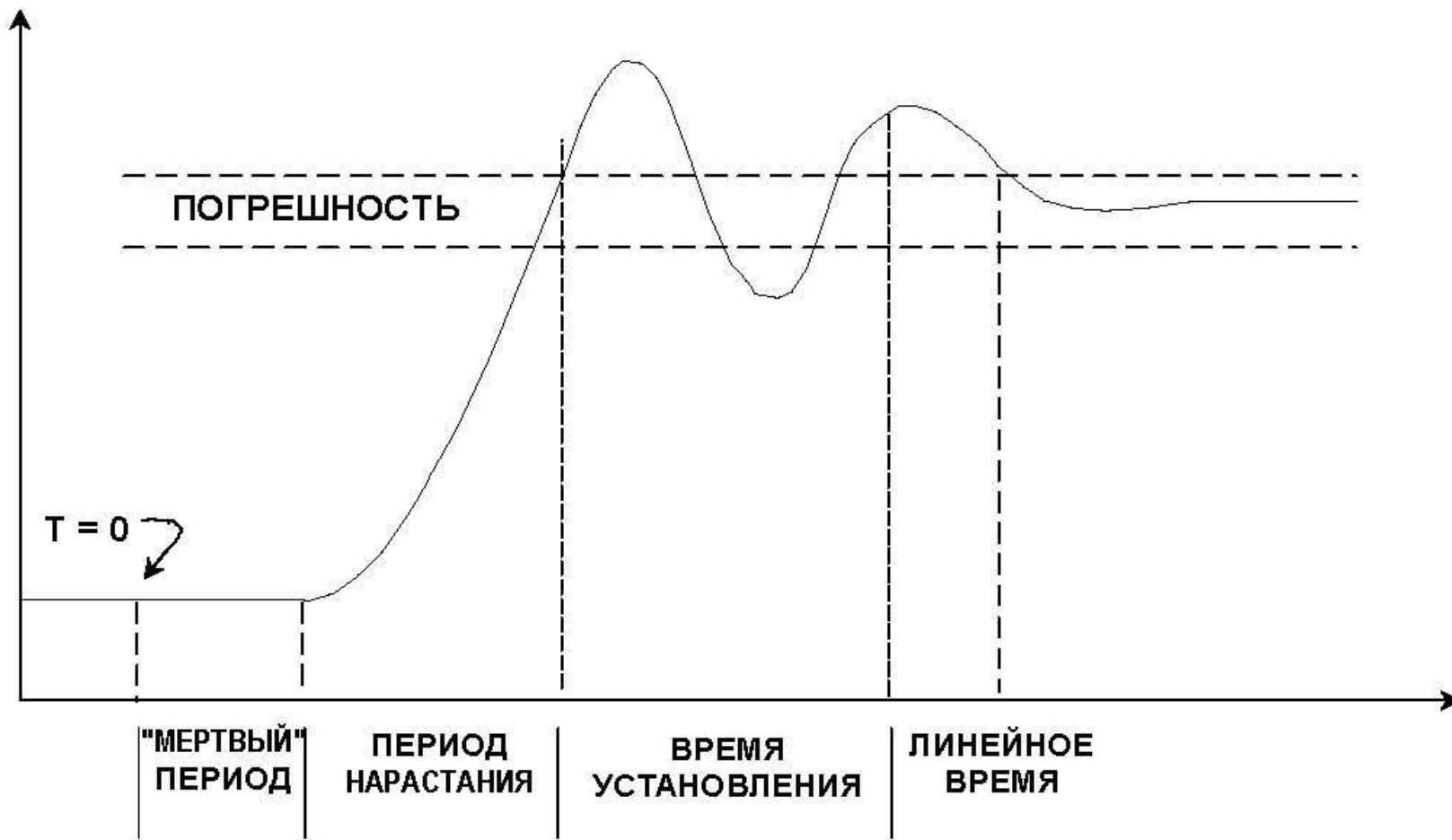
ГИСТОГРАММА, ПОКАЗЫВАЮЩАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДНОГО КОДА ПРИ ДЕЙСТВИИ ШУМА НА ВХОД АЦП



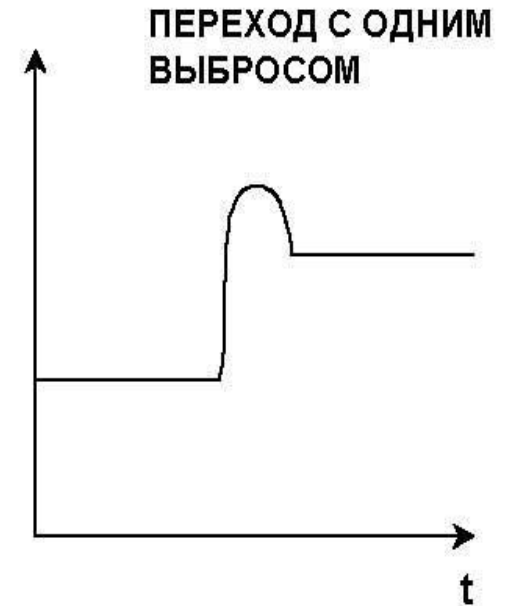
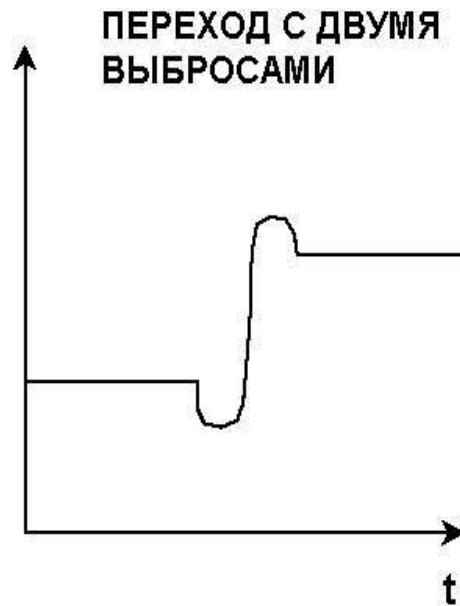
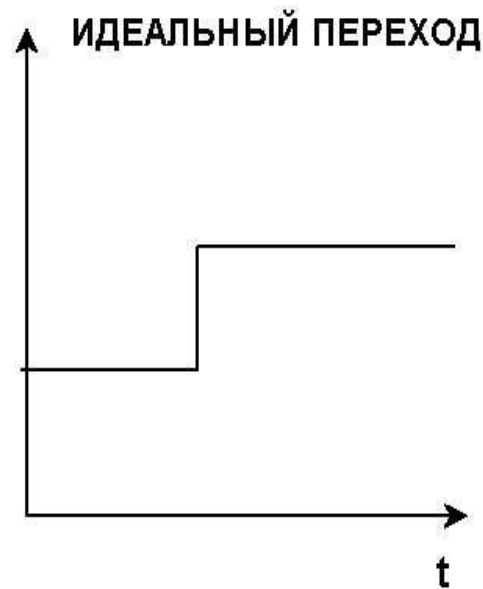
ВЛИЯНИЕ ДРОЖАНИЯ АПЕРТУРЫ И ФАЗОВОГО ШУМА ТАКТОВОГО ГЕНЕРАТОРА

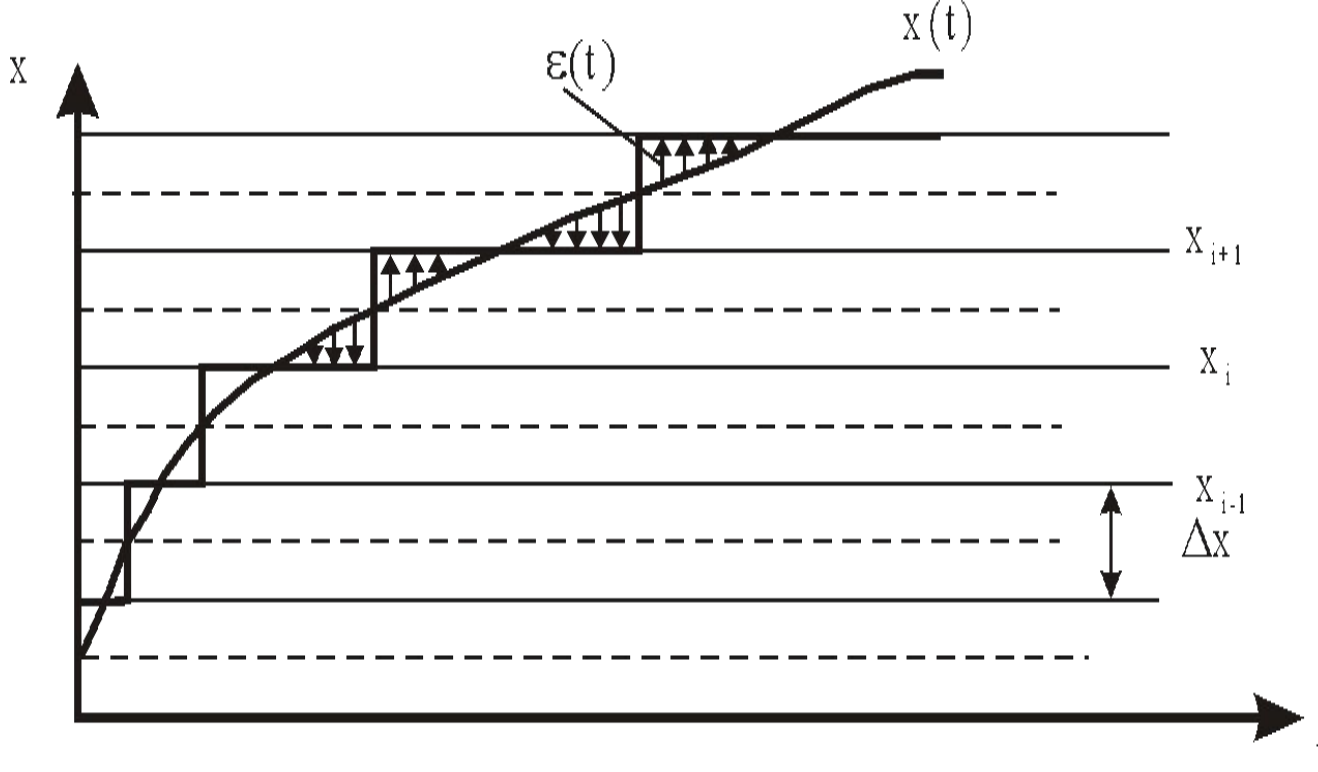


ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ЦАП



ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЦАП (С ПАРАЗИТНЫМИ ВЫБРОСАМИ)





$$\sigma_{\text{KB}}^2 = \frac{1}{N_{\text{KB}}} \sum \delta_{X_i}^2 = \frac{\Delta X^2}{12}; \quad \frac{P_C}{P_{\text{Ш}}} = \frac{X_{\text{ЭФ}}^2}{\frac{\Delta X^2}{12}} = \frac{3X_{\text{ЭФ}}^2}{\left(\frac{\Delta X}{2}\right)^2} = \frac{3}{\left(\frac{\Delta X}{2X_{\text{ЭФ}}}\right)^2} = \frac{3N_{\text{KB}}^2}{K_{\text{ПФ}}^2} = \frac{3 \cdot 2^{2r}}{K_{\text{ПФ}}^2}$$

Здесь обозначено:

$$N_{\text{KB}} = 2^{2r}; \quad K_{\text{ПФ}} = \frac{X_{\text{max}}}{X_{\text{ЭФ}}}; \quad \Delta X = \frac{X_{\text{max}}}{N_{\text{KB}}};$$

Для равномерно распределённого сигнала

$$K_{\text{ПФ}} = \sqrt{3} \quad \frac{P_C}{P_{\text{Ш}}} = 2^{2r} \quad \left(\frac{P_C}{P_{\text{Ш}}}\right)_{\text{дБ}} = 10 \lg\left(\frac{P_C}{P_{\text{Ш}}}\right) \approx 6r$$

Преобразование дискретного сигнала в цифровую форму

Система счисления с основанием n и числом разрядов r

Количество элементов кода: $U = n \cdot r$

Максимальное число: $X_{\max} = n^r - 1$

Отсюда: $n^r = X_{\max} + 1$; $r = \frac{\ln(X_{\max} + 1)}{\ln(n)}$;

Тогда: $U = n \frac{\ln(X_{\max} + 1)}{\ln(n)}$

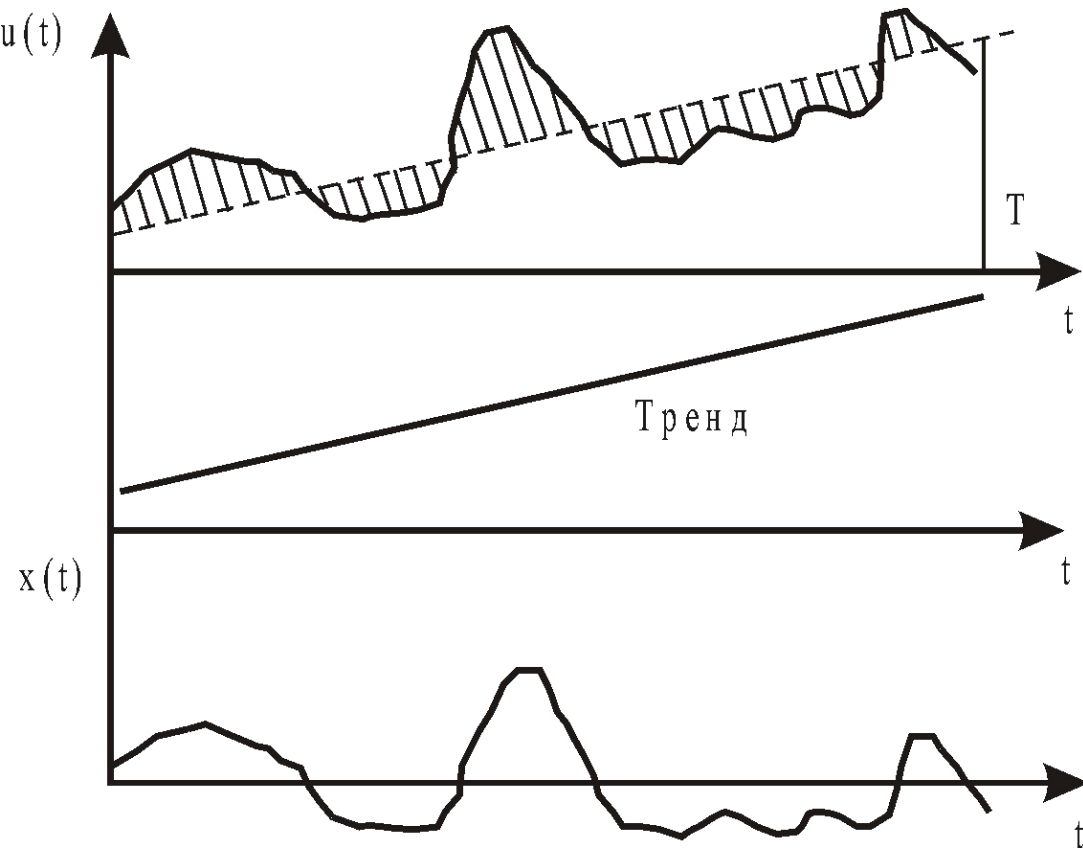
Находим экстремум: $\frac{dU}{dn} = \frac{\ln(n) - 1}{(\ln(n))^2} \ln(X_{\max} + 1) = 0$

$$\ln(n) - 1 = 0 \quad n = e$$

| | | | | | | | |
|-------------|------|-----------------|-------|------|------|------|------|
| n | 2 | 2,71 (e) | 3 | 4 | 8 | 10 | 12 |
| U/U_{opt} | 1,06 | 1 | 1,006 | 1,06 | 1,42 | 1,58 | 1,77 |

Предварительная обработка оцифрованных данных.

1. Изменение формата.
2. Преобразование данных в реальные физические величины. Калибровка.
3. Улучшение данных. Исключение выбросов, тренда, смещения нуля.



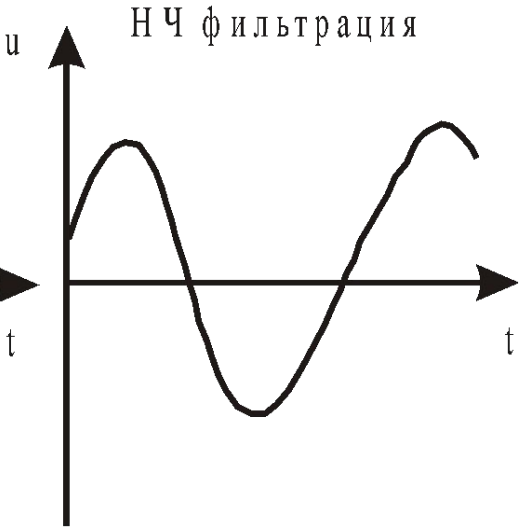
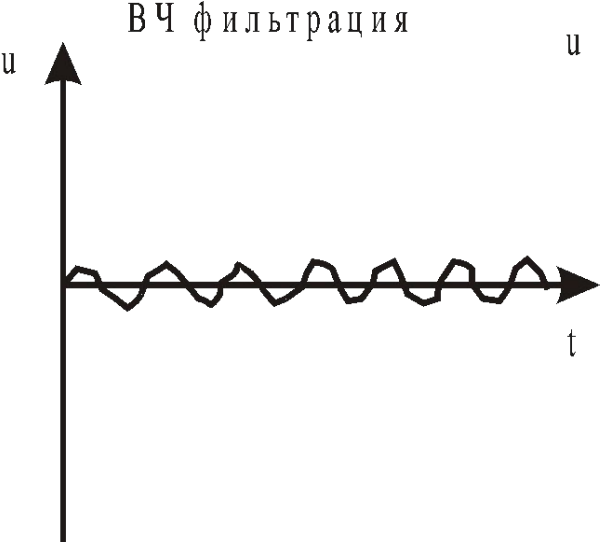
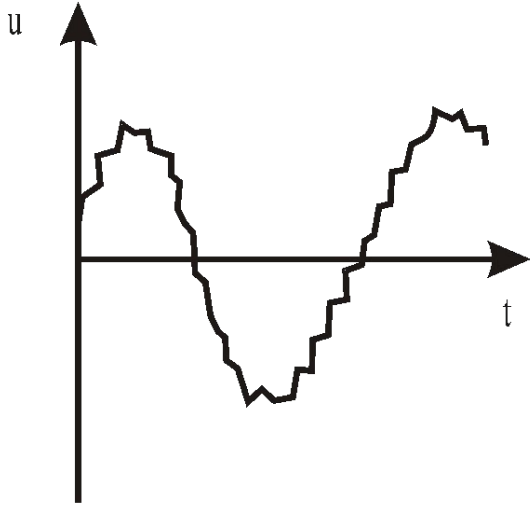
$$u(t) = \bar{u} + \alpha_u \left(t - \frac{T}{2} \right) + x(t)$$

Исключение линейного или полиномиального тренда методом наименьших квадратов

$$\alpha_u = \frac{1}{\left(\frac{T}{3}\right)\left(\frac{2T}{3}\right)} \left[\int_{\frac{2T}{3}}^T u(t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) dt \right];$$

$$\alpha_u = \frac{1}{\Delta t v_0 (N - v_0)} \left[\sum_{n=N-v_0}^N u_n - \sum_{n=1}^{v_0} u_n \right]$$

4. Фильтрация наблюдений:

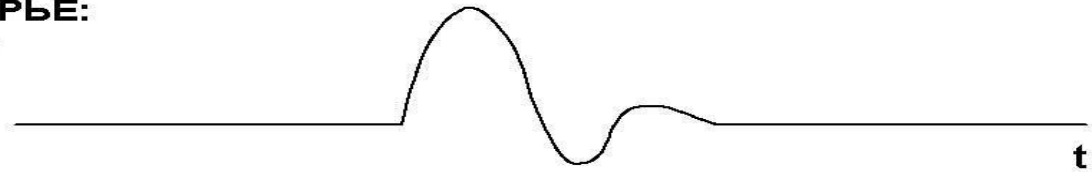


Разложение сигналов в базисе гармонических функций

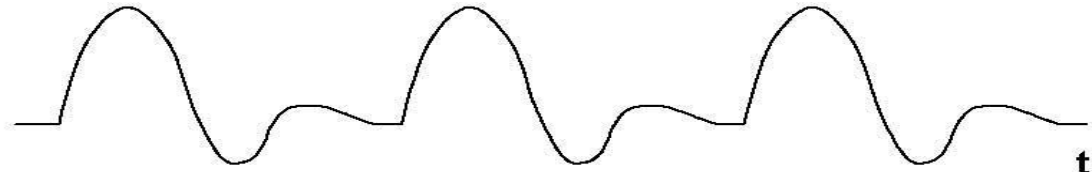
Дискретное и быстрое преобразования Фурье

СЕМЕЙСТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ КАК ФУНКЦИЯ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ:
сигнал непрерывный и
апериодический



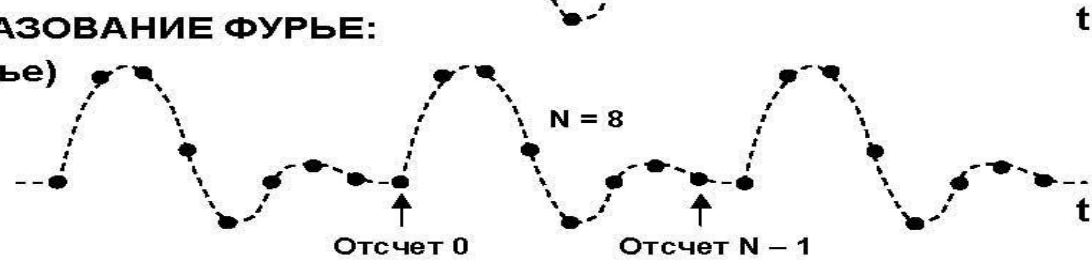
РЯДЫ ФУРЬЕ:
сигнал непрерывный и
периодический



ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ:
сигнал дискретный и
апериодический

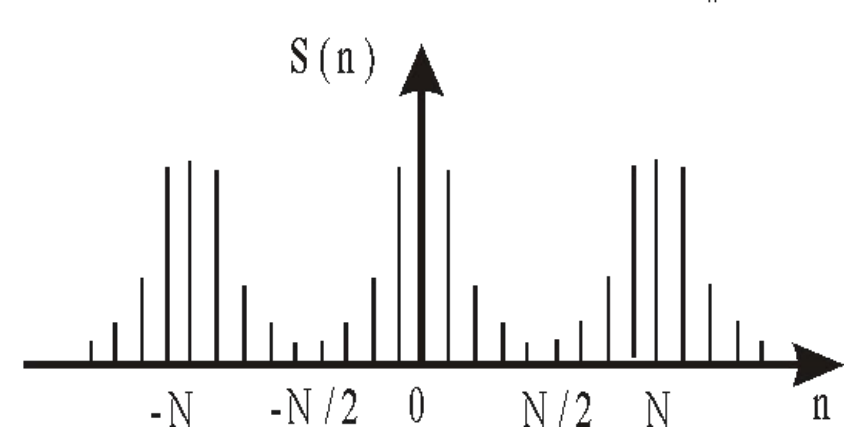
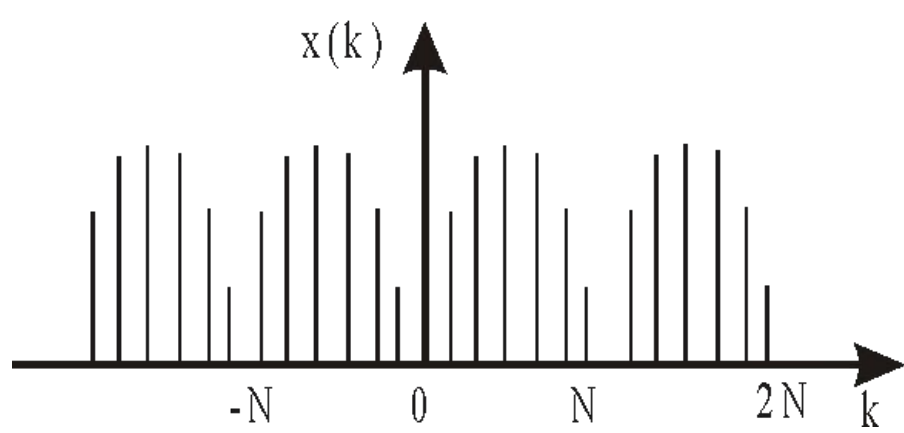
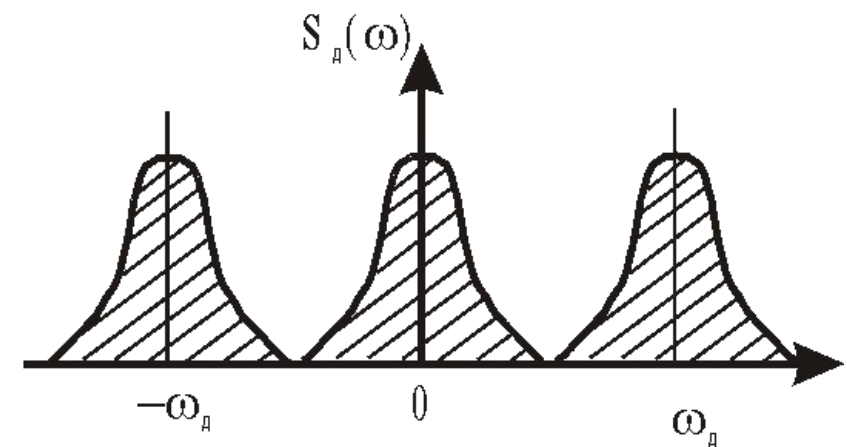
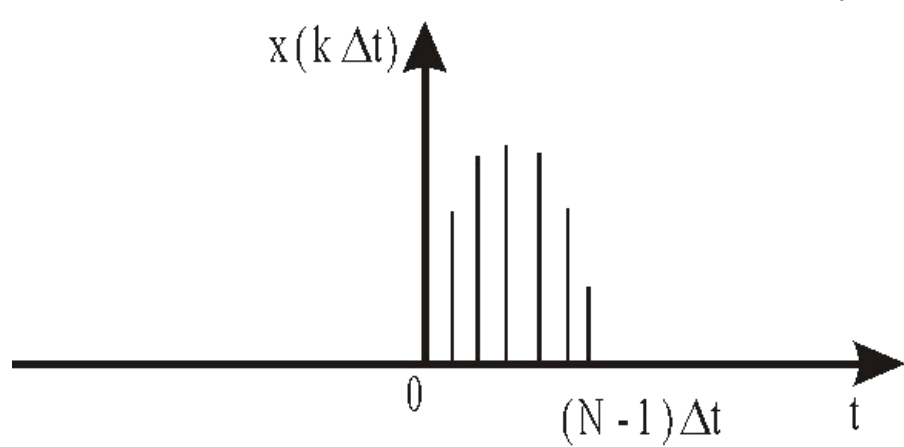
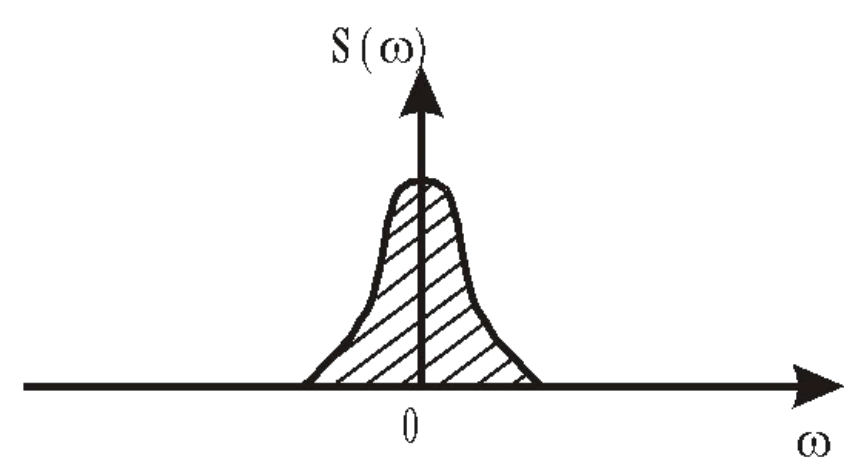
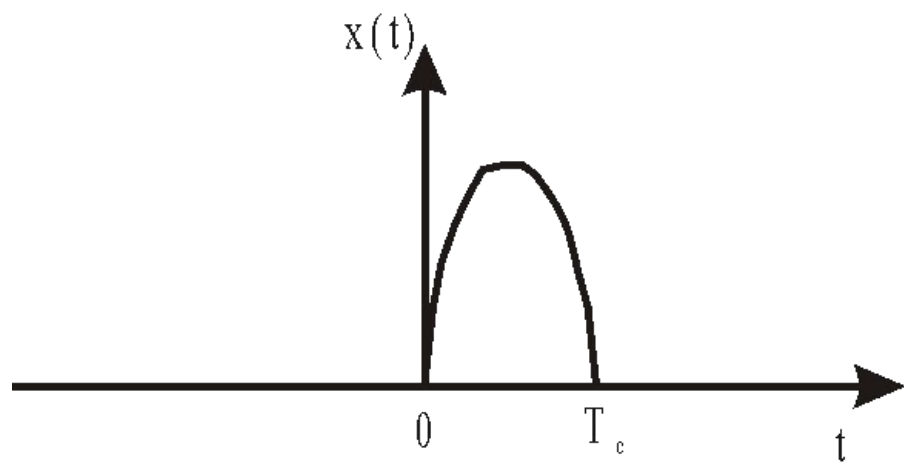


ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ:
(дискретные ряды Фурье)
сигнал дискретный и
периодический



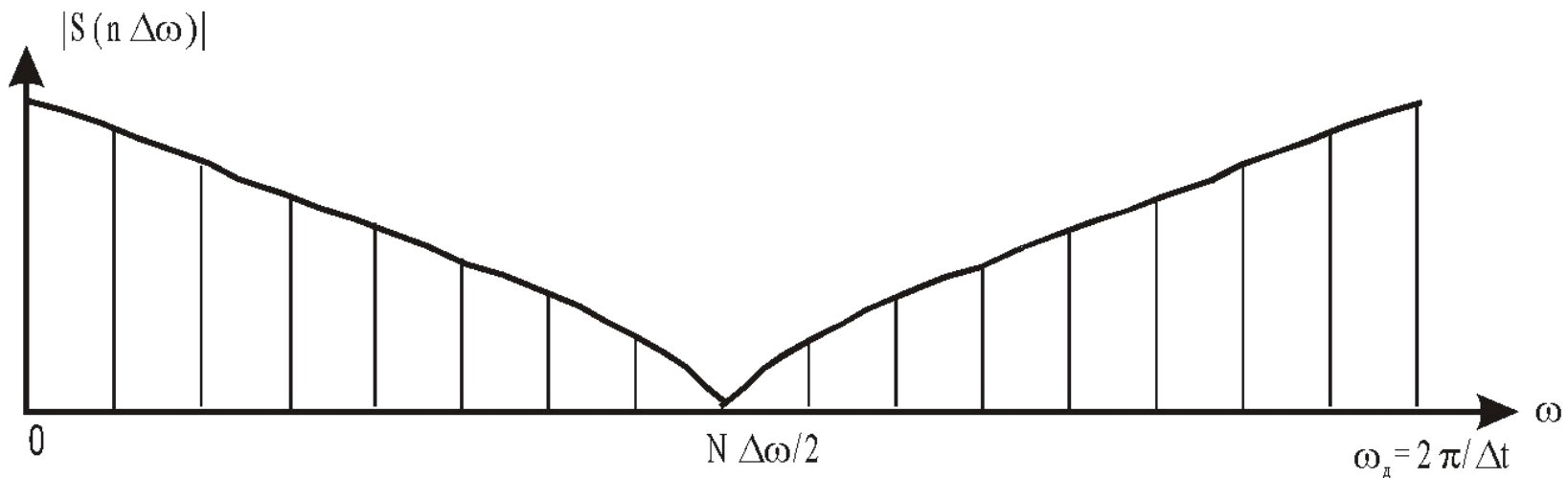
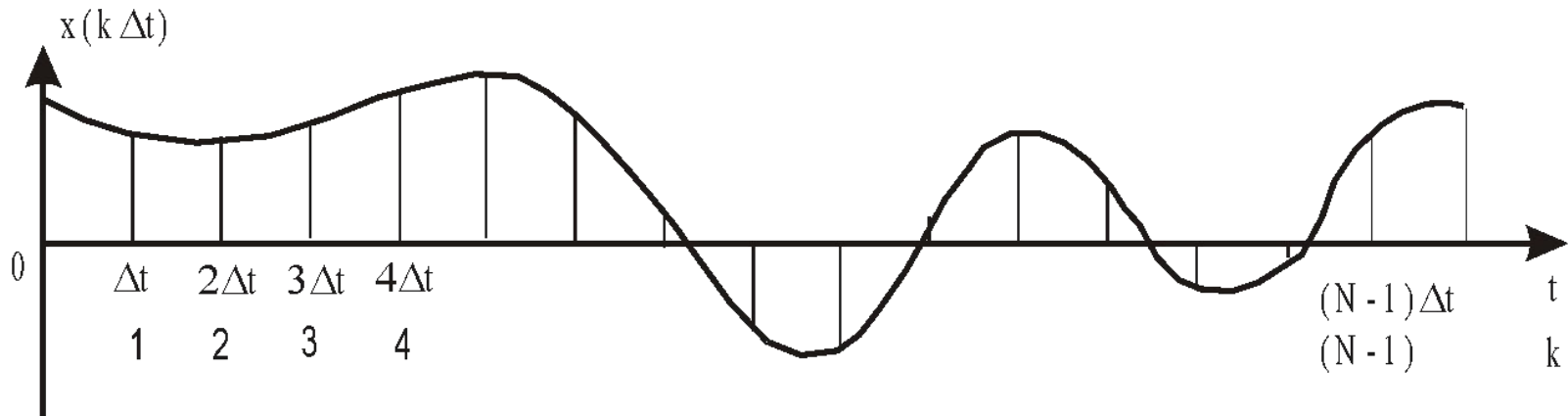
Дискретное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} S_d^*(\omega) &= \int_0^{\infty} x_d(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \left[e^{-j\omega} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \right] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - k\Delta t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j\omega k\Delta t} \end{aligned}$$



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad \omega = n\Delta\omega \quad S_D(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$S_D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_D(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$



Свойства ДПФ

1. **Периодичность.** Спектр и сигнал периодические с периодом N .

2. **Симметрия.** При чётном N и действительном $x(k)$ $\mathcal{S}\left(\frac{N}{2} + m\right) = \mathcal{S}^*\left(\frac{N}{2} - m\right)$

Доказательство

$$\mathcal{S}\left(\frac{N}{2} + m\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+m\right)k} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j\frac{2\pi}{N}\left(-\frac{N}{2}-m\right)k} = \mathcal{S}^*\left(-\frac{N}{2} - m\right) =$$

$$= \mathcal{S}^*\left(-\frac{N}{2} - m + N\right) = \mathcal{S}^*\left(\frac{N}{2} - m\right)$$

при $m = 0$ $\mathcal{S}\left(\frac{N}{2}\right) = \mathcal{S}^*\left(\frac{N}{2}\right)$, т.е. $\mathcal{S}\left(\frac{N}{2}\right)$ - Действительное число

$$\mathcal{S}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \quad - \text{Действительное число}$$

3. **Линейность.** Если $\mathcal{S}_x(n)$ ДПФ от $x(k)$ $\mathcal{S}_y(n)$ ДПФ от $y(k)$

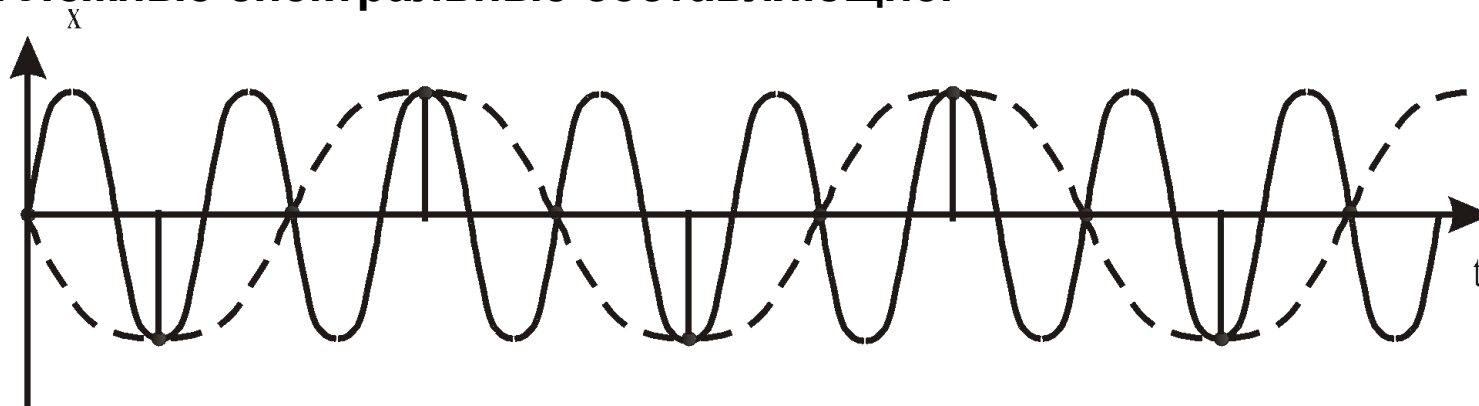
то $a\mathcal{S}_x(n) + b\mathcal{S}_y(n)$ ДПФ от $ax(k) + by(k)$

4. **Сдвиг.** Если $y(k) = x(k - k_0)$, то $\mathcal{S}_y(n) = \mathcal{S}_x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0}$

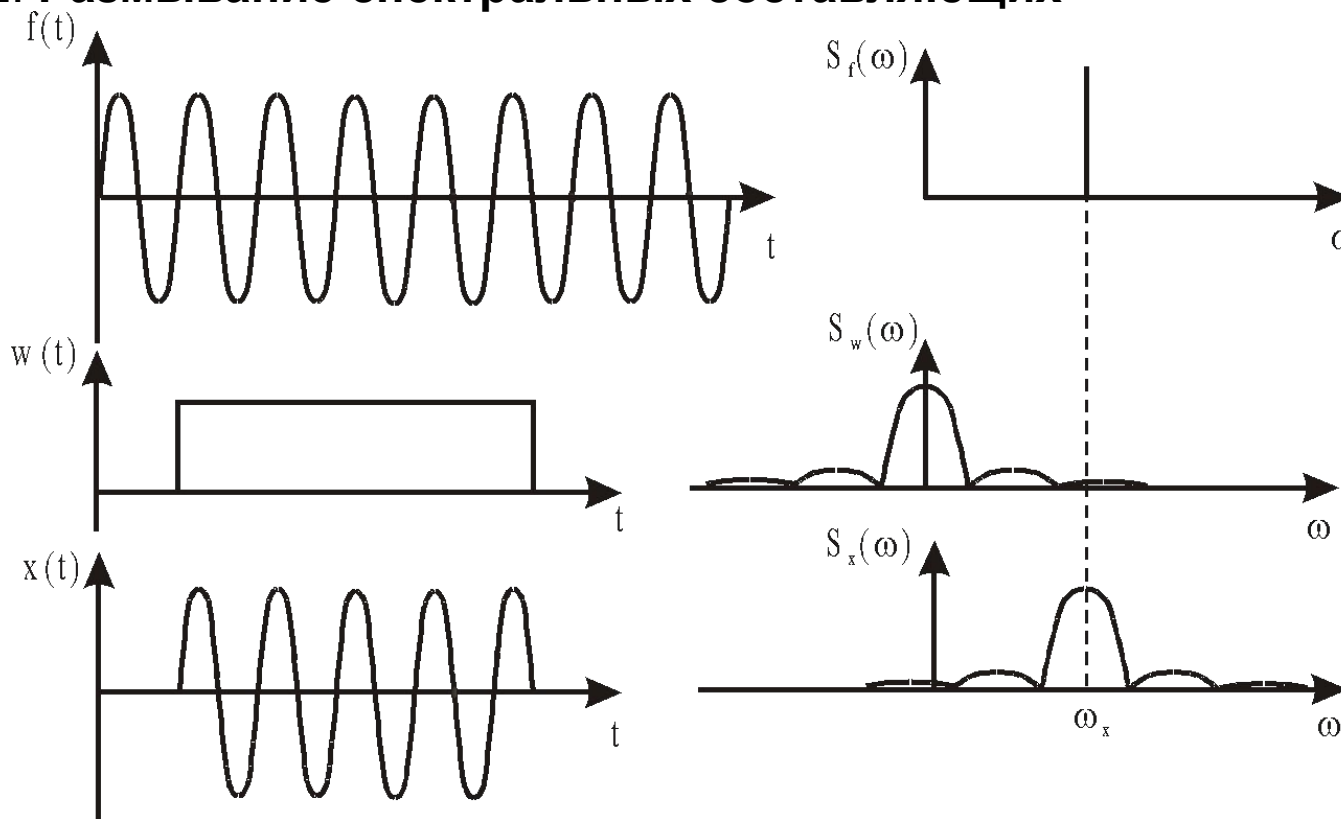
$$\mathcal{S}_y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k - k_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+k_0-k_0)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0} \sum_{k=0}^{N-1} x(k - k_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k-k_0)} = \mathcal{S}_x e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0}$$

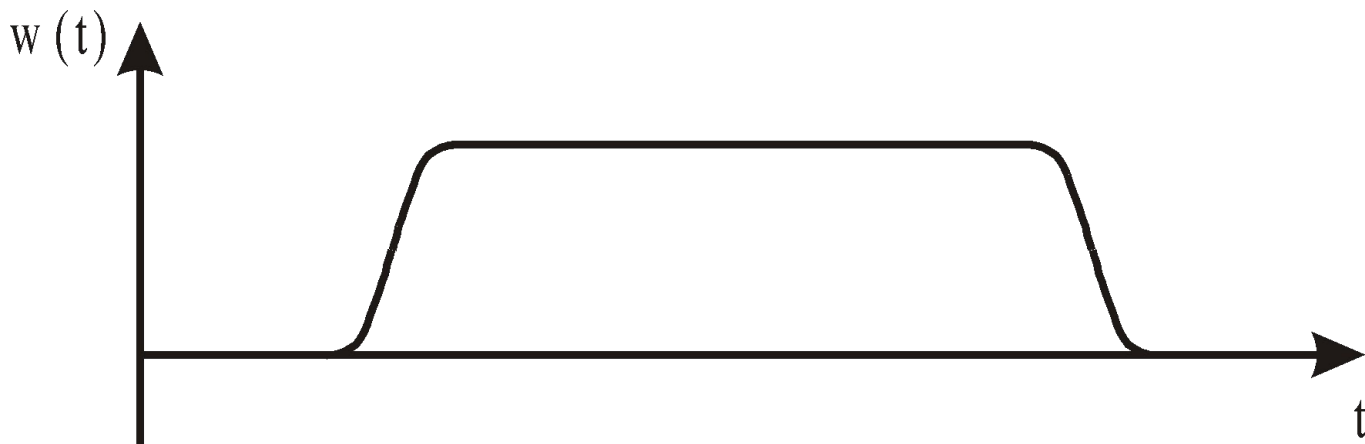
Особенности практического использования ДПФ

1. Ложные спектральные составляющие.



2. Размывание спектральных составляющих

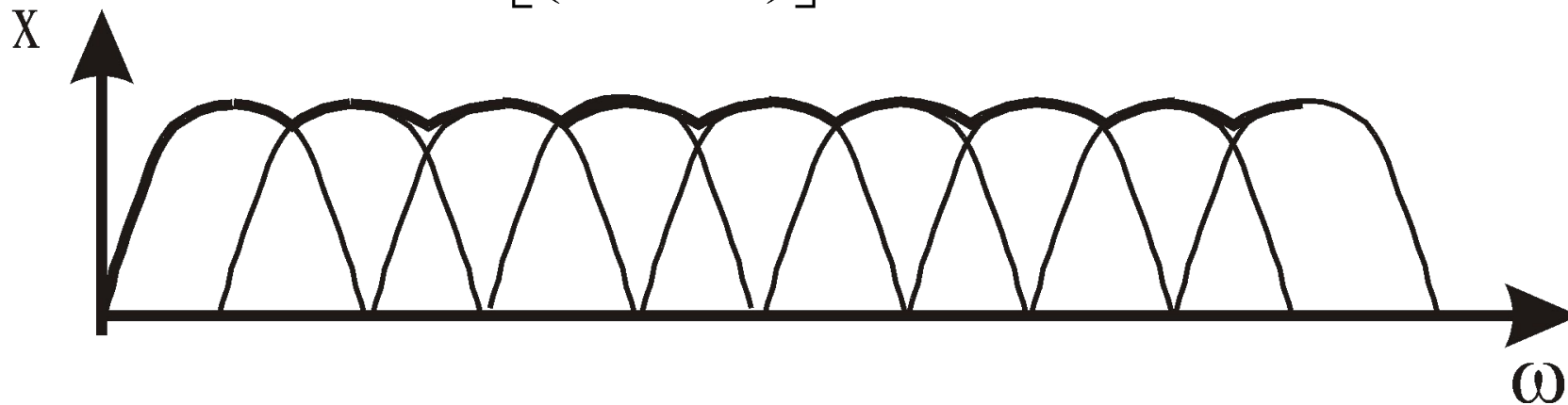




Функции:
 Тьюки
 Блэкман
 Хэнинг
 Хэминг
 Чебышев
 Бессель

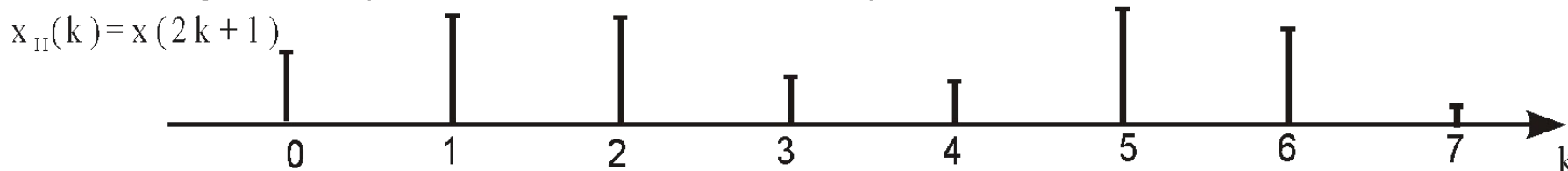
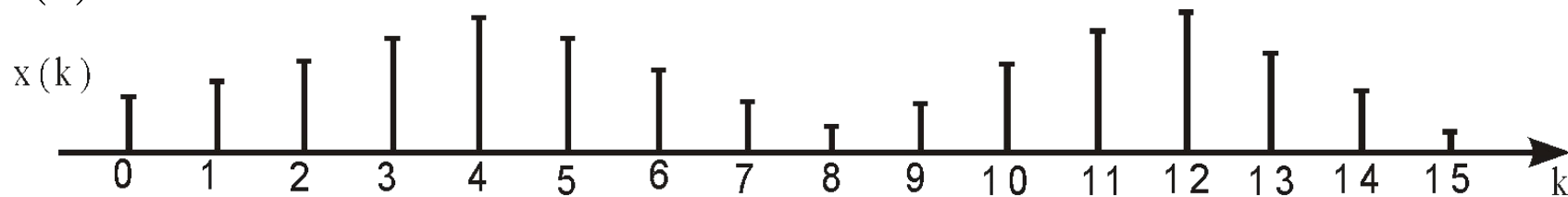
3. Паразитная амплитудная модуляция спектра

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}n\right)\frac{N}{2}\right]}{\frac{N}{2} \sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}n\right)\right]} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}n\right)\frac{N-1}{2}}$$



Быстрое преобразование Фурье. БПФ

$$x(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = 2^r$$



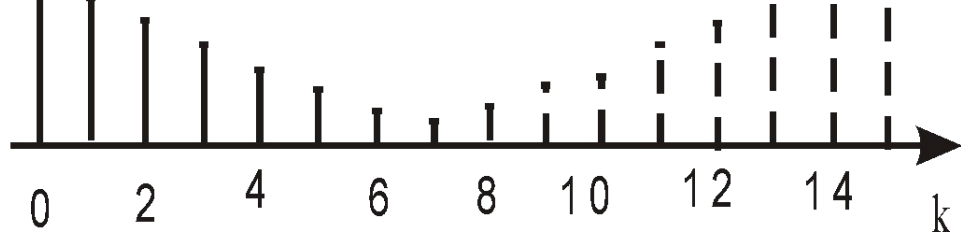
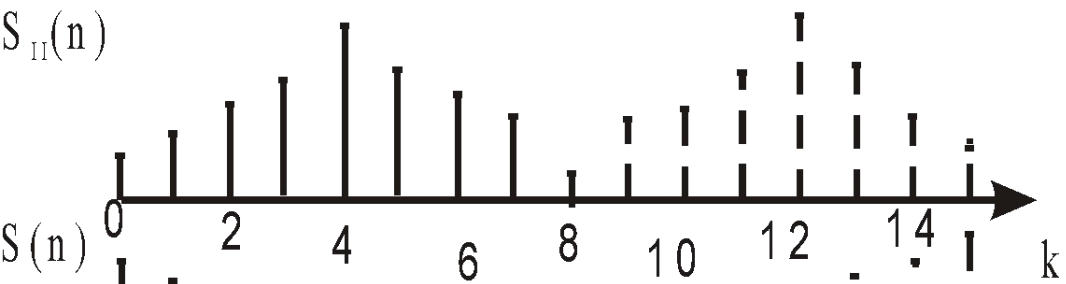
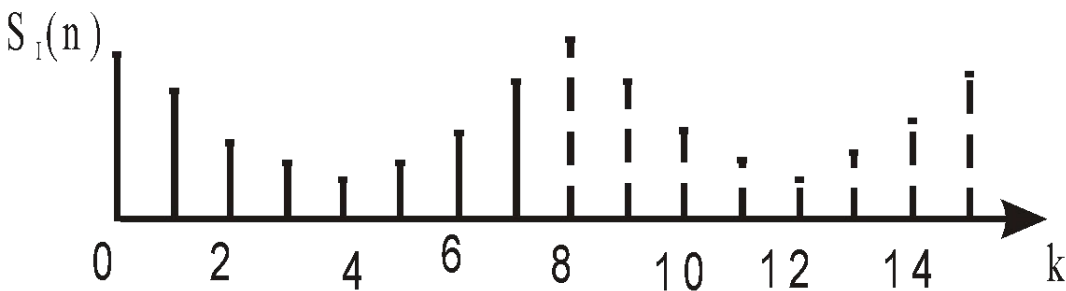
Обозначим $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$S_I(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) W_N^{2kn} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_I(k) W_N^{2kn}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$S_{II}(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) W_N^{(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{II}(k) W_N^{(2k+1)n} = W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{II}(k) W_N^{2kn}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}, \quad W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_I(k) W_{N/2}^{kn} = S_I(n); \quad W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{II}(k) W_{N/2}^{kn} = W_N^n S_{II}(n)$$



$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$S(n) = S_I(n) + W_N^n S_{II}(n)$$

$$n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, (N-1) \quad \mathcal{S}_I(n) = \mathcal{S}_I\left(n - \frac{N}{2}\right); \quad \mathcal{S}_{II}(n) = \mathcal{S}_{II}\left(n - \frac{N}{2}\right)$$

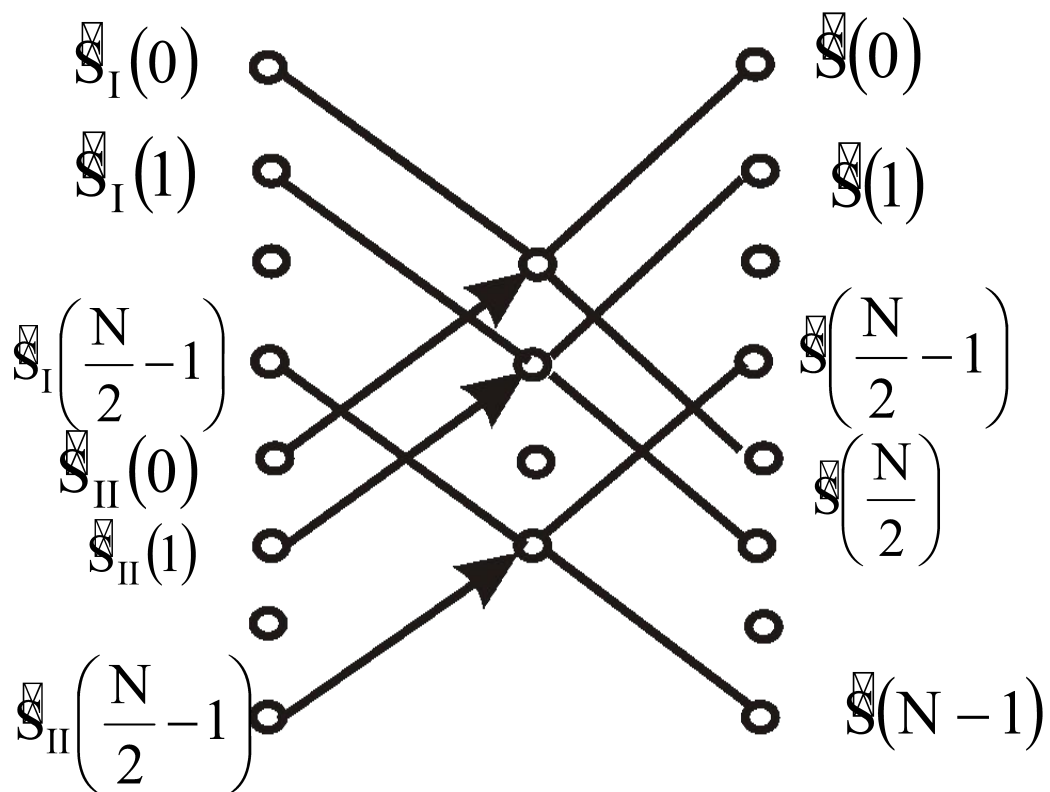
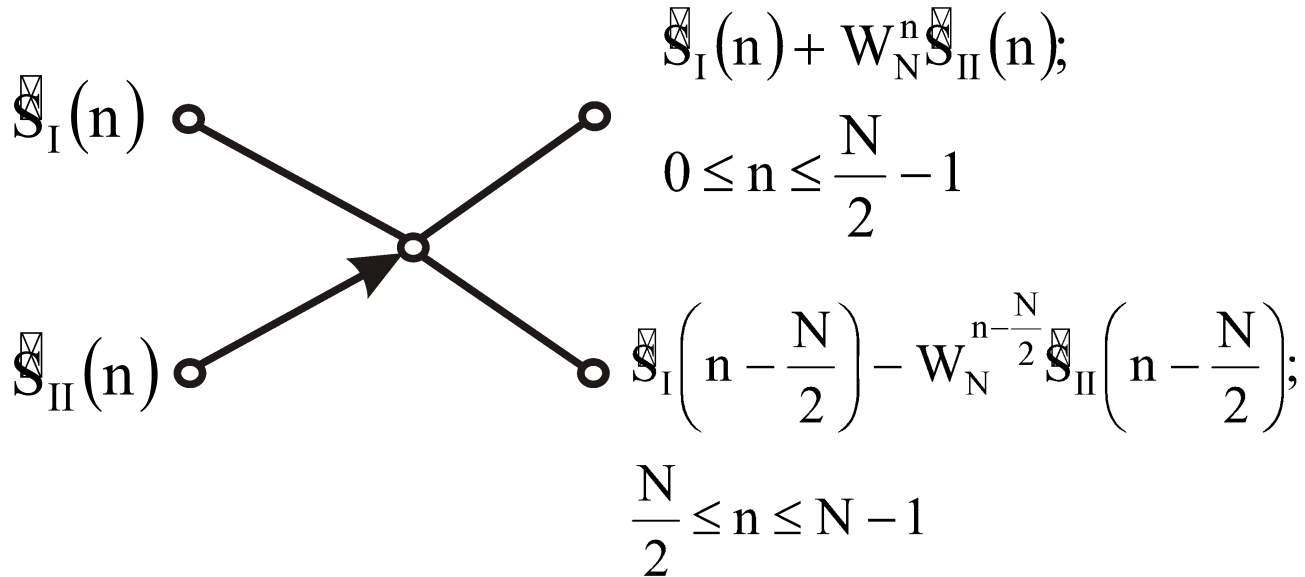
$$W_N^n = W_N^{\frac{N}{2} + n - \frac{N}{2}} = W_N^{\frac{N}{2}} W_N^{n - \frac{N}{2}} = -W_N^{n - \frac{N}{2}}, \quad \text{так как } W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi N}{N} \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$$

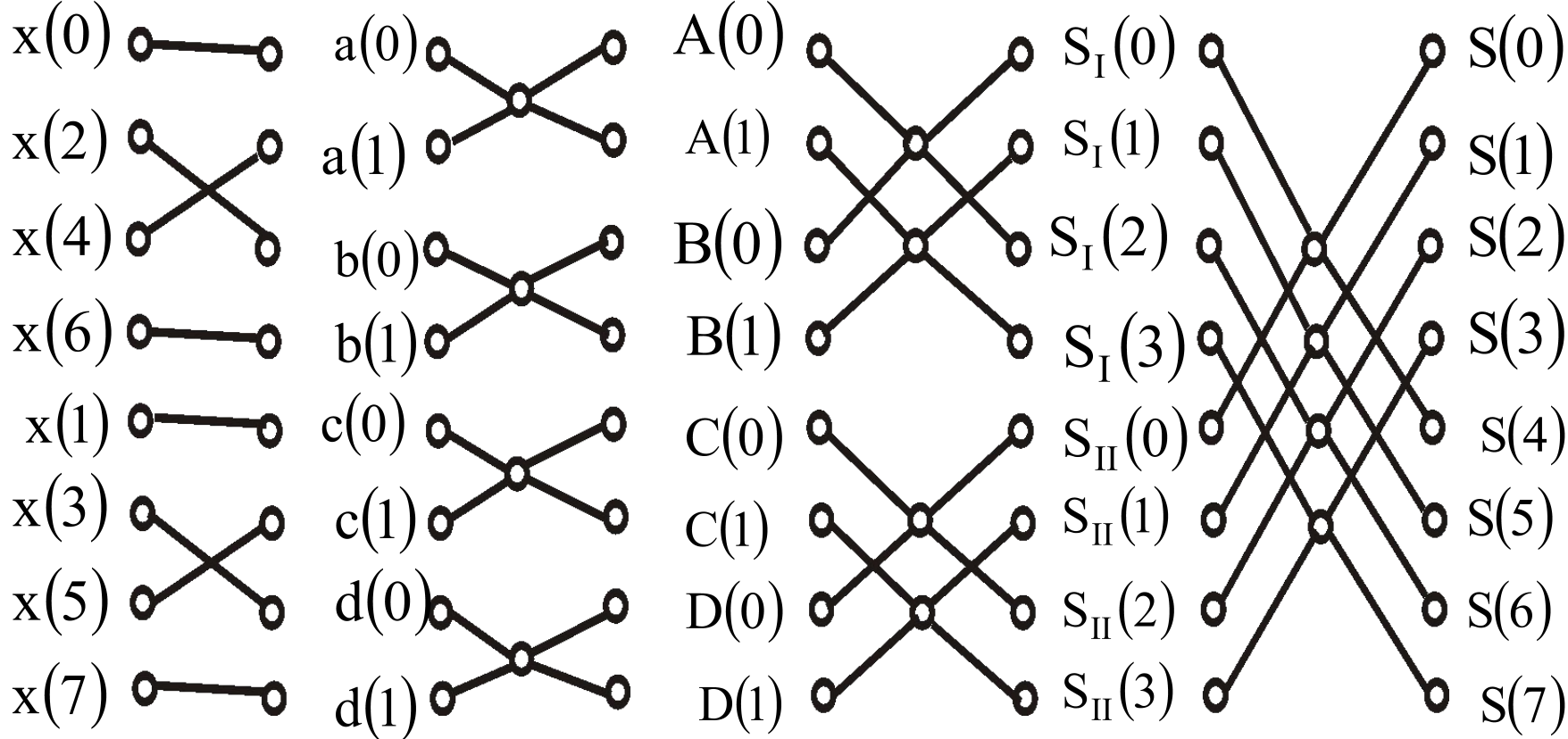
$$\mathcal{S}(n) = \begin{cases} \mathcal{S}_I(n) + W_N^n \mathcal{S}_{II}(n); & \text{для } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \mathcal{S}_I\left(n - \frac{N}{2}\right) - W_N^{n - \frac{N}{2}} \mathcal{S}_{II}\left(n - \frac{N}{2}\right); & \text{для } \frac{N}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

ДПФ - N^2 умножений

$$\mathcal{S}_I(n) - \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{4}$$

Всего: $2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$ умножений





$\frac{N}{2}$ умножений и всего $\log_2 N$ разбиений

$$\text{КУВ} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N}$$

| | | | | |
|-----|---|------|------|------|
| N | 4 | 128 | 1024 | 8192 |
| КУВ | 4 | 35,6 | 205 | 1263 |

Разновидности БПФ

1. Алгоритм с прореживанием по времени

2. Алгоритм с прореживанием по частоте

$$x_1(k) = x(k)$$

$$x_{11}(k) = x\left(k + \frac{N}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$S_1(n) = \sum [x_1(k) + x_2(k)] \cdot W_{N/2}^{nk}$$

$$S_{11}(n) = \sum [x_1(k) + x_2(k)] \cdot W_{N/2}^{nk} W_N^k$$

3. Алгоритм с произвольным составным $N = N_1 \cdot N_2$

$$n = n_1 + n_2 N_2 \quad k_1 \text{ и } n_2 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$$

$$k = k_1 + k_2 N_1 \quad k_2 \text{ и } n_1 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

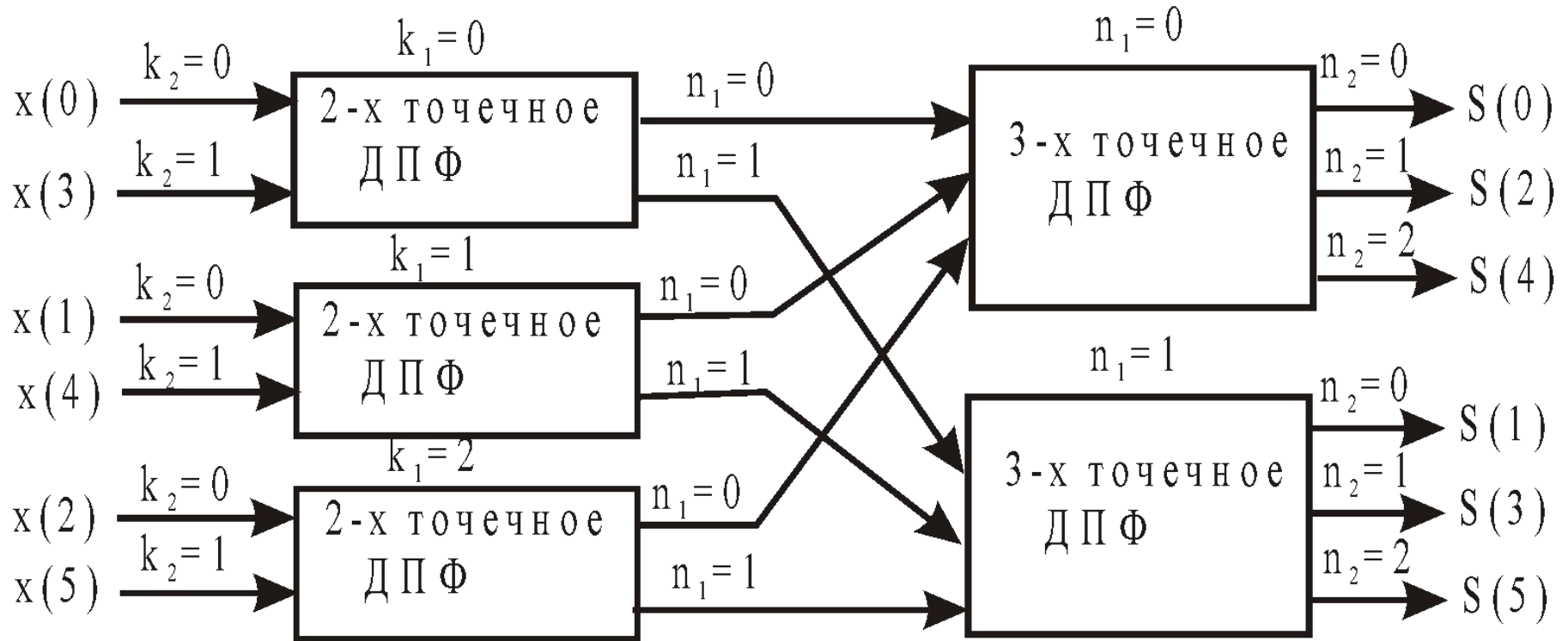
$$S(n_1 + n_2 N_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} x(k_1 + k_2 N_1) \cdot W_N^{(n_1 + n_2 N_2)(k_1 + k_2 N_1)}$$

$$W_N^{(n_1 + n_2 N_2)(k_1 + k_2 N_1)} = W_N^{n_1 k_1} \cdot W_N^{n_2 k_1 N_2} \cdot W_N^{n_1 k_2 N_1} \cdot W_N^{n_2 k_2 N_1 N_2}$$

$$W_N^{n_2 k_2 N_1 N_2} = e^{-j \frac{2\pi}{N_1 N_2} n_2 k_2 N_1 N_2} = 1$$

$$S(n) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \left\{ \left[\sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_1 + k_2 N_1) \cdot W_{N_2}^{n_1 k_2} \right] W_N^{n_1 k_1} \right\} \cdot W_{N_1}^{n_2 k_1}$$

Пусть: $N = 6$ $N_1 = 3$ $N_2 = 2$



Особенности практической реализации БПФ

1. Доступ к данным и запоминание промежуточного результата
2. Конкретный способ вычислений типа бабочка

$$W_N^{ql} = W_N^q \cdot W_N^{q(l-1)}$$

Вычисление корреляционного интеграла на основе БПФ

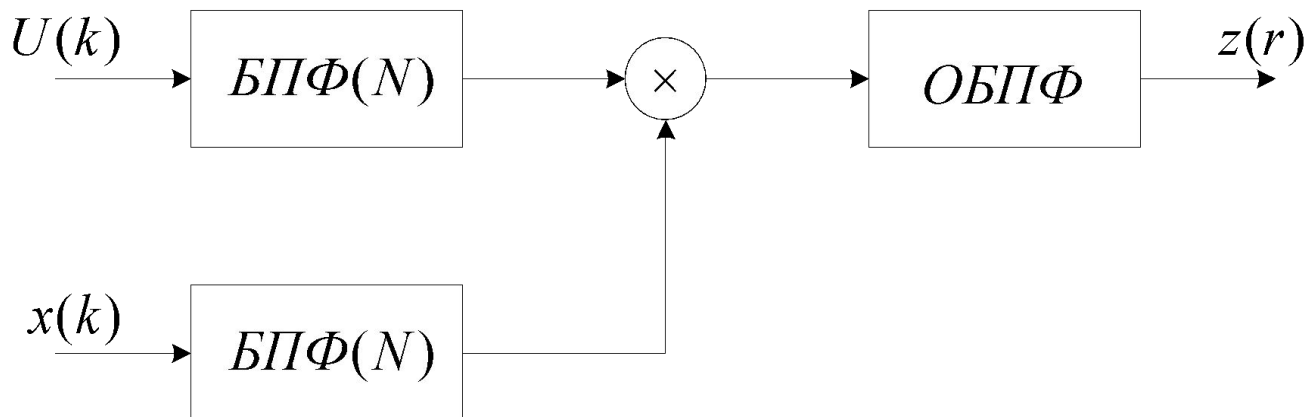
$$Z(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)x(t - \tau)dt$$

$$u(t) = x(t - \tau_0) + \xi(t)$$

$$Z(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{n=0}^{N-1-|\tau|} u(n) \cdot x(n - \tau) \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$$

Если $N \gg \tau$ то $Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|\tau|} u(n) \cdot x(n - \tau)$

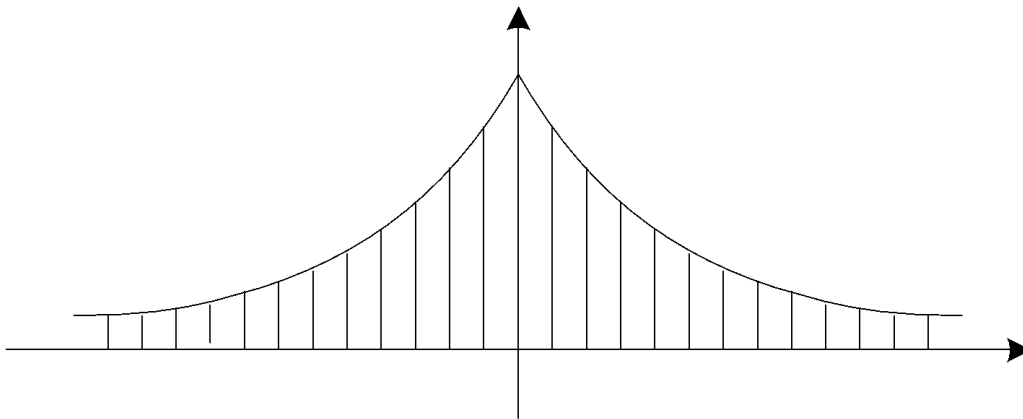
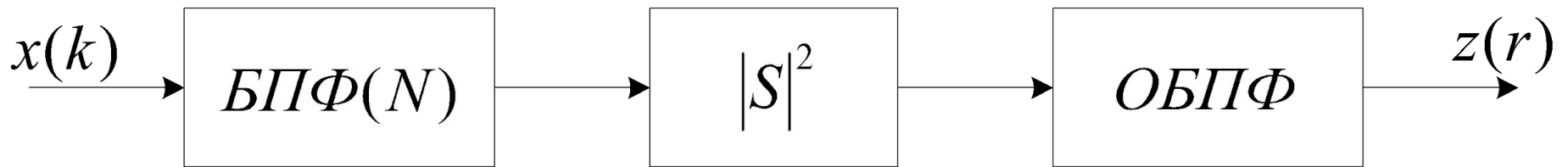
$$\dot{S}_Z(j\omega) = \dot{S}_U(j\omega) \dot{S}_X^*(j\omega)$$



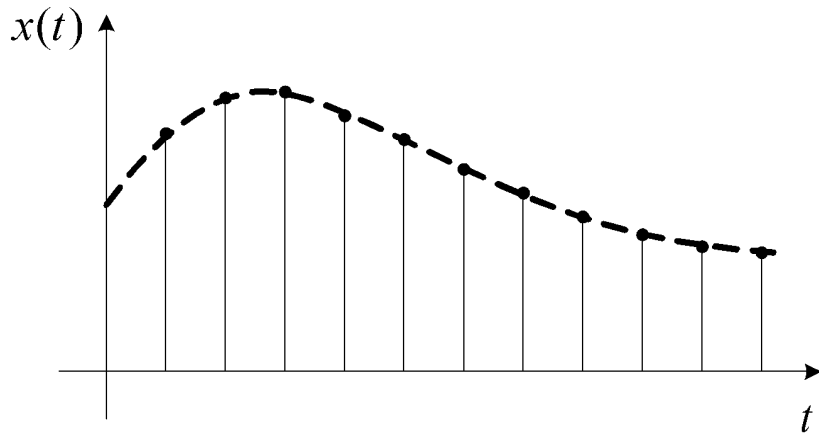
$$KYB = \frac{Nm}{N \log_2 N + N} \quad m \leq 0.1N \quad N = 1024$$

Для вычисления АКФ

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad \text{- преобразование Винера-Хинчина}$$



Использование БПФ для интерполяции функции времени



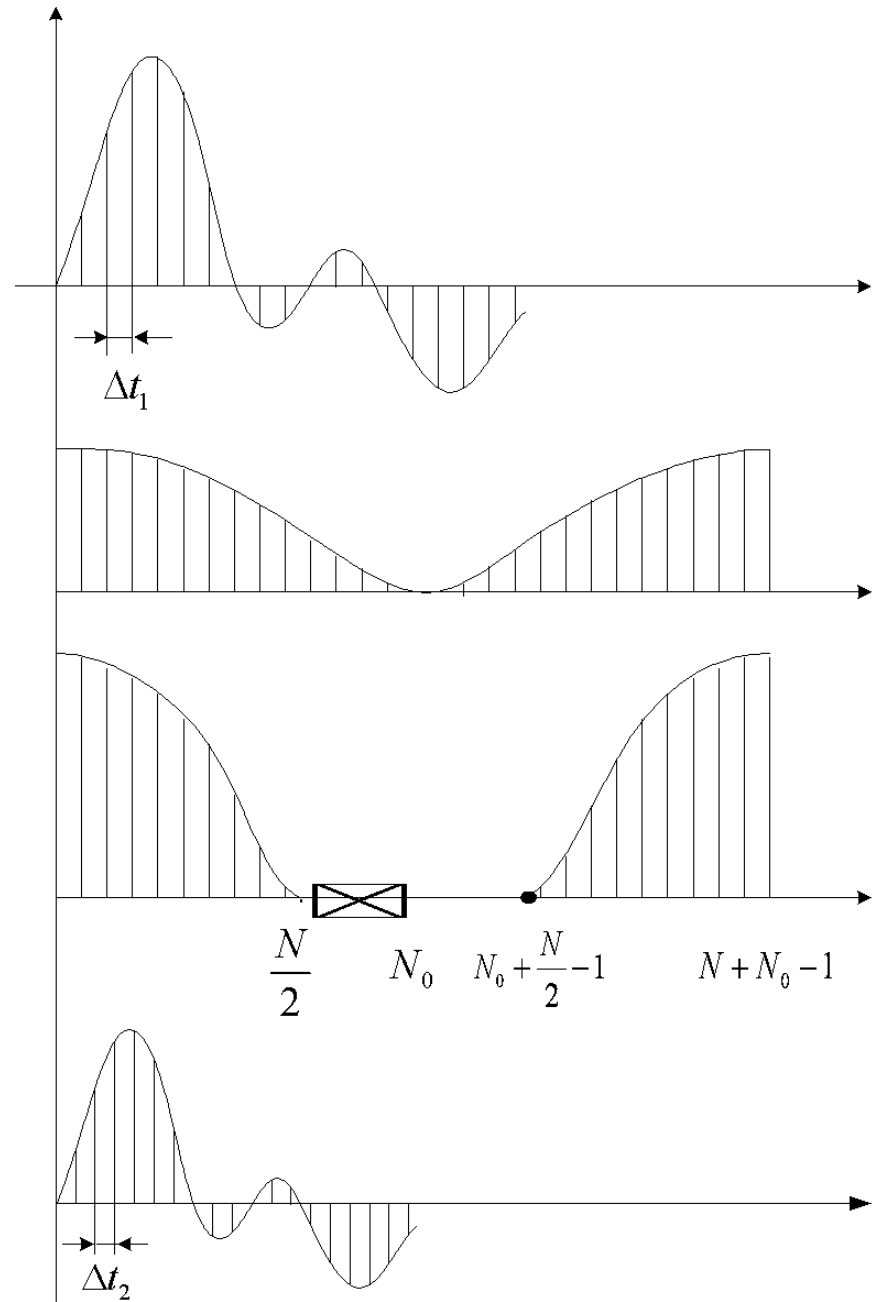
$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \psi_k(t)$$

1 $x(t) \rightarrow S(n)$

2 добавляем нули $\hat{S}(n)$
в

3. находим ОБПФ $\hat{S}(n) \rightarrow \hat{x}(k)$

$$\Delta t_1 = T/N \quad \Delta t_K = T/(N + N_0)$$



основная литература:

- Проектирование импульсных и цифровых устройств радиотехнических систем / Под ред. Ю.М. Казаринова. М. : Высшая школа, 1985 г.
- Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. Уч. пособие. 1990 г.
- Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер. 2003.
- Езерский В.В., Паршин В.С. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. / Рязань, 1996 г.
- Езерский В.В., Егоров А.В. Дискретизация и квантование сигналов. Методические указания к лабораторным работам./ РГРТА, 2004.
- Езерский В.В., Егоров А.В. Спектральный анализ сигналов. Методические указания к лабораторным работам./ РГРТА, 2004.
- Езерский В.В., Егоров А.В. Цифровая обработка сигналов и микропроцессоры. Методические указания к лабораторным работам./ РГРТА, 2000 г.
- Езерский В.В., Егоров А.В. Изучение методов цифрового формирования сигналов: Методические указания к лабораторной работе. / РГРТА, 2000 г.

дополнительная литература:

- Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971.
- Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
- Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн.1 и 2. Пер с англ. М.: Мир, 1982.
- Рабинер Л.Р., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
- Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Пер. с англ. М.: Связь, 1979.
- Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985.