

# Методы решения уравнений



Развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны и сообщены. Всякий, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого *собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением.* Извне он может получить только возбуждение.

А. Дистервег

# Общие методы решения уравнений:

Замена уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

Метод введения  
новой  
переменной

Нетрадиционные методы

Метод  
разложения  
на множители

Функционально-  
графический  
метод

# Замена уравнения более простым уравнением

Суть метода: от уравнения вида

$$h(f(x))=h(g(x))$$

осуществить переход к уравнению вида

$$f(x)=g(x)$$

## Метод применяется:

- При решении показательных уравнений:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad a \neq 1; a > 0$$

$$f(x) = g(x)$$

- При решении логарифмических уравнений:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad a \neq 1; a > 0 \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x)$$

- При решении иррациональных уравнений:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

Метод применяется:

если функция монотонная

$$f(x)^{2k+1} = g(x)^{2k+1}$$
$$f(x) = g(x)$$

Например:

$$(2x+3)^3 = (5x-9)^3$$

$$2x+3 = 5x-9$$

$$x=4$$

Ответ: 4

Метод нельзя использовать:

если функция  
периодическая

Например,

$$\sin(3x-1) = \sin(3x+4)$$

если функция четная

Например,

$$(2x+7)^2 = (5x-12)^2$$

1

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

2

$$\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$$

3

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

4

$$7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$$

5

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$$

6

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

7

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

8

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$

9

$$\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$$

10

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$$

1

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

2

$$\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$$



3

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

4

$$7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$$



5

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$$



6

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

7

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

8

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$

9

$$\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$$



10

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$$

2  $\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$

4  $7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$

5  $\sqrt[3]{7 - x} = \sqrt[3]{5x + 1}$

9  $\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$

6  $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$

8  $2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$

1  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

7  $\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$

3  $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

10  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$

Замена  
уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

## Метод разложения на множители:

Суть метода: уравнение  $f(x)g(x)h(x)=0$

можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x)=0 ; g(x)=0; h(x)=0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Например,

$$(\sqrt{x+5}-3)(2^{x+6}-1)\log_2(x-8)=0$$

2  $\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$

4  $7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$

5  $\sqrt[3]{7 - x} = \sqrt[3]{5x + 1}$

9  $\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$

6  $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$

8  $2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$

1  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

7  $\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$

3  $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

10  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$

Замена  
уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

2

$$\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$$

4

$$7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$$

5

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$$

9

$$\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$$

6

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

8

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$

1

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

7

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

3

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

10

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$$



Замена  
уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

Метод  
разложения на  
множители

## Метод введения новой переменной:

Суть метода: ввести новую переменную  $u = g(x)$ .

Решить уравнение относительно новой переменной  $u$ .

Вернуться к переменной  $x$  и решить совокупность уравнений :

$$g(x)=u_1 ; g(x)=u_2 \dots g(x)=u_n.$$

где  $u_1, u_2, u_n$  - корни уравнения замены

2

$$\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$$

4

$$7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$$

5

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$$

9

$$\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$$

6

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

8

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$

1

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

7

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

3

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

10

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$$



Замена  
уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

Метод  
разложения на  
множители

2

$$\log_2 (2x - 3) = \log_2 (3x - 6)$$

4

$$7^{x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$$

5

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$$

9

$$\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$$

6

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

8

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$

1

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

7

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

3

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

10

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$$

Замена  
уравнения  
 $h(f(x))=h(g(x))$   
уравнением  
 $f(x)=g(x)$

Метод  
разложения на  
множители

Метод  
введения  
новой  
переменной

- Умение решать задачи - практическое искусство, подобное плаванию или катанию на лыжах, или игре на фортепиано: научиться этому можно, лишь постоянно тренируясь.

Д. Пойа

**Задание:**

Найти все значения  $x$ , при каждом из которых произведение выражений

$$\sqrt{7^{x-2} - 49} \quad \text{и} \quad 2^{(x-4)^2 - 12} - 2^{x^2 - 8x} - 60$$

равно нулю.

## Решите уравнения:

### 1 уровень

$$7^{x-2} = 49$$

$$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$$

$$\log_2(3x - 6) = \log_2(2x - 3)$$

$$\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$$

$$x^4 + 7x^2 - 8 = 0$$

### 2 уровень

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{7-x} = 49^{x+2}$$

$$\log_{0,2} \sqrt{5x - 4} = \log_{0,2} x$$

$$x^5 + 8x^4 + 12x^3 = 0$$

$$2 \log_{\frac{2}{5}} x + 5 \log_5 x + 2 = 0$$

$$\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$$

### 3 уровень

$$2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$$

$$\ln(0,25^x - 7) = \ln(9 - 3 * 0,25^x)$$

$$\lg^2 x + 2 \log_{100} x = 6$$

$$2^{2x+1} - 5 * 2^x - 88 = 0$$

$$2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$$