

Презентация по
Математическому Анализу
Лекция 18

Уравнение Бернулли. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение Бернулли.

Так называется уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (15)$$

где $m \neq 0, m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение линейно, при $m = 1$ - с разделяющимися переменными). Это уравнение решается одним из следующих способов:

1. Уравнение Бернулли сводится к $z' = (1-m)y^{-m}y'$ подстановкой $z = y^{1-m}$ (при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$).

Действительно, $z' = (1-m)y^{-m}y'$, $y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}$; после деления

уравнения (15) на y^m

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$$

- линейное уравнение.

Пример: $xy' - y = y^2 \ln x$ (уравнение Бернулли, $m = 2$).

Подстановка

а:

$$z = y^{1-2} \Rightarrow z = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{z}, y' = -\frac{z'}{z^2}, -x \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{\ln x}{z^2}, xz' + z = -\ln x$$

Решаем полученное линейное

уравнение:

$$z = uv, z' = u'v + uv', x(u'v + uv') + uv = -\ln x, u(xv' + v) + xu'v = -\ln x, x \frac{dv}{dx} + u = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \ln |v| = -\ln |x|, v = \frac{1}{x}, x \frac{1}{x} u' = -\ln x, u' = -\ln x, u = -\int \ln x dx = -x \ln x + x + C,$$

$$z = \frac{-x \ln x + x + C}{x}; y = \frac{x}{-x \ln x + x + C}, y = 0$$

2. Можно сразу решать уравнение Бернулли методом, которым решаются линейные уравнения, т.е. заменой $y(x) = u(x) v(x)$:

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + puv = qu^m v^m, \quad u'v + v(v' + pv) = qu^m v^m,$$

$$v' + pv = 0, \quad v = e^{-\int p dx}, \quad e^{-\int p dx} u' = qe^{-m \int p dx} u^m, \quad \frac{du}{u^m} = qe^{-(m-1) \int p dx}, \quad \frac{1}{(1-m)u^{m-1}} = \int qe^{-(m-1) \int p dx} dx,$$

из этого выражения
находим

$$u(x), \quad \text{и } y(x) = u(x) v(x).$$

Пример:

решить задачу Коши

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y}, y(2) = 1.$$

Как и в предыдущем примере, это уравнение не попадает ни под один из рассмотренных типов: оно не является ни уравнением с разделяющимися переменными (наличие суммы $x^2 + y$), ни уравнением с однородной правой частью (слагаемые разных порядков - первого и второго в этой сумме), ни линейным, ни Бернулли (другая структура).

Попробуем опять представим это уравнение как уравнение относительно $x = x(y)$:

$$x' = \frac{x^2 + y}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Это уже уравнение Бернулли с $m = -1$.

Начальное условие примет вид $x(1) = 2$.

Решаем
уравнение:

$$x = uv, x' = u'v + uv', u'v + uv' = \frac{uv}{y} + \frac{1}{uv}, u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = \frac{1}{uv},$$

$$v' - \frac{v}{y} = 0, \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}, \ln |v| = \ln |y|, v = y$$

Тогда

$$yu' = \frac{1}{yu}, u \frac{du}{dy} = \frac{1}{y^2}, udu = \frac{dy}{y^2}, \frac{u^2}{2} = -\frac{1}{y} + \frac{C}{2},$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{Cy - 2}{y}}, x = \pm y \sqrt{\frac{Cy - 2}{y}} = \pm \sqrt{y(Cy - 2)}$$

Это общее решение уравнения (утерянное решение $y = 0$ не удовлетворяет начальному условию).

Ищем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $1 = \sqrt{2(2C - 2)} \Rightarrow C = \frac{5}{4}$

Решение задачи
Коши:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{y(5y - 8)}$$

9. Уравнение в полных дифференциалах.

Так называется уравнение вида:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (16)$$

$(P(x, y), Q(x, y))$ - непрерывно дифференцируемы) в случае, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если существует

такая функция $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Если (16) - уравнение в полных дифференциалах, то его правая часть равна

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

т.е. (16) принимает вид $du(x, y) = 0$.

На решении $y(x)$ получим $du(x, y(x)) = 0$, следовательно, $u(x, y(x)) = C$, где C - произвольная постоянная. Соотношение $u(x, y) = C$ и есть общее решение уравнения в полных дифференциалах.

Для нахождения функции $u(x, y)$ решается система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим $u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой по y функции $\varphi(y)$ (эта функция играет роль постоянной интегрирования; так как интегрирование ведётся по переменной x); затем из второго уравнения определяется $\varphi(y)$.

Приме найти общее решение
р: уравнения

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$

Убедимся, что это - уравнение в полных дифференциалах.

Здес
ь:

$$P(x, y) = \frac{\sin 2x}{y} + x; Q(x, y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}; \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2 \sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

т.е. это действительно уравнение рассматриваемого типа.

Ищем функцию $u(x, y)$ такую,
что

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$u(x, y) = \int \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \varphi(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

Дифференцируем эту функцию по y и приравниваем выражению, стоящему во втором уравнении системы:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

Если мы правильно решаем это уравнение (т.е. правильно определили его тип и правильно выполнили предыдущие действия), то в полученном уравнении для $\varphi'(y)$ должны остаться только члены, зависящие от y .

Действительно, представляя $\cos 2x$ как $1 - 2\sin^2 x$,
получим:

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{2y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Rightarrow \varphi(y) = \int \left(y - \frac{1}{2y^2} \right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

Следовательно
но,

$$u(x, y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

и общее решение уравнения имеет вид:

$$-\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} = C$$

10. **Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.**

1. **Однородное уравнение.**

Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеют вид,
$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1).$$

Если k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0$ (2), то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1. $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$

2. $y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$

3. $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i, (\beta \neq 0)$

2. Неоднородное уравнение

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ (3) можно записать в виде суммы $y = y_0 + Y$, где y_0 - общее решение соответствующего уравнения (1) без правой части, определяемое по формулам (1)-(3), и Y - частное решение данного уравнения (3).

Функция Y может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n .

Если a не является корнем характеристического уравнения (2), т.е. $\varphi(a) \neq 0$

, то полагают $Y = e^{ax} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения (2), т.е. $\varphi(a) = 0$ $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$

где r - кратность корня a ($r=1$ или $r=2$)

2. $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$. $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, то
 Если полагают
 $Y = e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx]$, $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены
 где степени
 $N = \max\{n, m\}$.

Если же $\varphi(a \pm bi) = 0$ то полагают

$$Y = x^r e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx]$$

где $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены степени $N = \max\{n, m\}$, r – кратность корней $a \pm bi$
 (для уравнений 2-го порядка $r=1$).

В общем случае для решения уравнения (3) применяется **метод вариации произвольных постоянных**.

Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения **n -го** порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации для уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ заключается в следующем.

Пусть известна фундаментальная система решений y_1, y_2 .

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

, где функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам:

$$C_1(x) = \int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}; C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}$$

в силу чего $y(x)$ можно сразу определить по формуле:

$$y(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}$$

здесь $W(y_1, y_2)$ - вронскиан y_1, y_2
решений

Рассмотрим решения линейных однородных и неоднородных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = 0$$

Решени

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$; его корни $k_1 = 6; k_2 = 1$

Следовательн

e^{6x}, e^x - частные линейно независимые решения, а **общее решение** имеет вид

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$$

2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Решение

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$; его корни $k_1 = k_2 = 1$

Следователь

e^x, xe^x - частные линейно независимые решения, а **общее решение** имеет

$$y = e^x (C_1 + C_2 x)$$

3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Решени

е.
Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0 ; \text{ его корни } k = 2 \pm 3i$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, а поэтому им соответствуют **частные решения** $e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x$, а **общее решение**

имеет вид

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

4. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

Решение

Составим характеристическое уравнение
Следовательно

$$k^2 - 2k - 3 = 0 ; \text{ его корни } k_1 = 3; k_2 = -1$$

но e^{3x}, e^{-x} - частные линейно независимые решения, а общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

Частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y = Ae^{4x}$ (так как в правой части отсутствует синус и косинус, коэффициентом при показательной функции служит многочлен нулевой степени, т. е. $m=n=0$ и $r=0$, поскольку $\alpha = 4$ не является корнем характеристического уравнения).

$$\text{Ита к} \quad + \begin{cases} -3 \\ -2 \\ 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = Ae^{4x} \\ y' = 4Ae^{4x} \\ y'' = 16Ae^{4x} \end{array} \right.$$

$$y'' - 2y' - 3y = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x} \Rightarrow A = 1/5$$

Следовательно, общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$$

5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 3 \sin x$$

Решение

Характеристическое уравнение **решение** однородного уравнения:

$k^2 + 1 = 0$; имеет корни $k_{1,2} = \pm i$, а поэтому **общее**

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Частное решение следует искать в виде:

$$y = x(A \cos x + B \sin x)$$

(в данном случае так как i является простым корнем характеристического уравнения, то $m=n=0$ и $r=1$, имеем:

$$\text{Итак } \begin{cases} 1 & \left\{ \begin{array}{l} y = (A \cos x + B \sin x)x \\ y' = (-A \sin x + B \cos x)x + (A \cos x + B \sin x) \\ y'' = 2(-A \sin x + B \cos x) + (-A \cos x - B \sin x)x \end{array} \right. \end{cases}$$

$$y'' + y = -2A \sin x + 2B \cos x \equiv 3 \sin x \Rightarrow A = -3/2; B = 0$$

Следовательно, **общее решение** данного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2} x \sin x$

6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Решени

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0 ; \text{ имеет корни } k_{1,2} = \pm i$$

а поэтому общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Частное решение исходного уравнения методом неопределенных

коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)$, в отличие от предыдущего имеет другую структуру), а поэтому воспользуемся методом вариации произвольных

постоянных.

Будем искать решение уравнения в виде $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, где

функции $C_1(x), C_2(x)$ нужно искать из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}; C_2'(x) = \sin x$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx + A = \sin x - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + A; C_2 = -\cos x + B$$

Таким образом, **общее решение** исходного уравнения:

$$y = A \cos x + B \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right)^{4x}$$