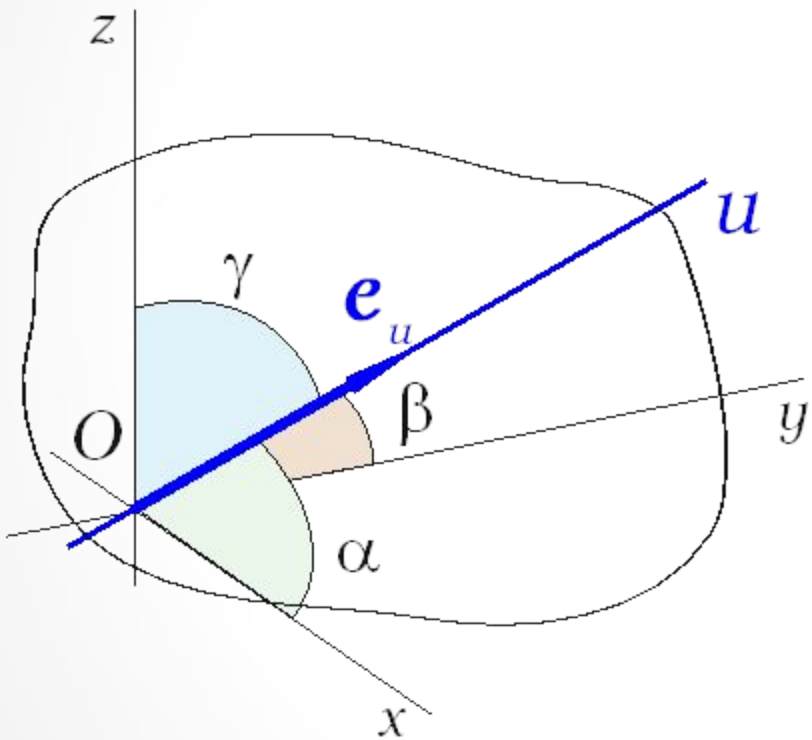
Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку



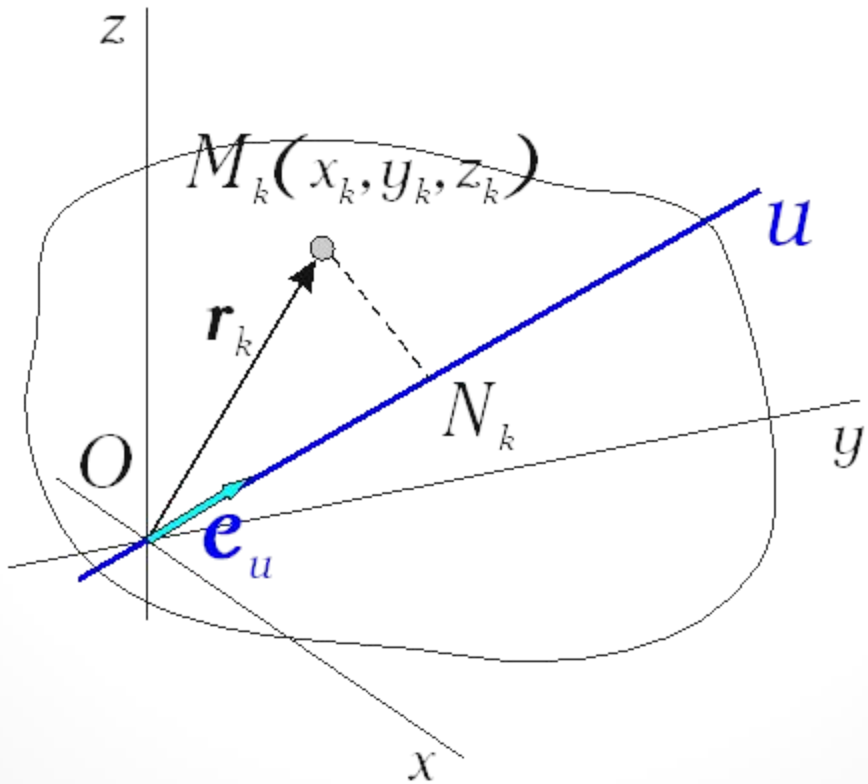
$$\bar{e}_u = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$I_u = ?$$

• Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку

$$\bar{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$$

$$ON = np_u \bar{r}_k = \bar{r}_k \cdot \bar{e}_u = x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma$$



$$I_u = \sum_{k=1}^{n} m_k M_k N_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(r_k^2 - ON_k^2 \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \left[\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \right) \cdot 1 - \left(x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma \right) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$I_u = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right) \cos^2\alpha + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + z_k^2 \right) \cos^2\beta + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right) \cos^2\gamma -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k \cos\alpha \cos\beta - 2\sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \cos\beta \cos\gamma - 2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k \cos\alpha \cos\gamma$$

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma -$$

$$- 2I_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2I_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2I_{xz} \cos\alpha \cos\gamma$$

Тензор инерции

$$I_u = I_u\left(\left(I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}\right), \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)\right)$$

Тензор инерции ***I*** – симметричный тензор 2-го ранга

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

Исходная система координатных осей $Oxyz$

Новая система координатных осей $Ox'y'z'$

Матрица перехода от исходной системы к новой $\boldsymbol{A_{3,3}}$

Преобразование компонент тензора инерции $I' = A^{-1}IA$

Главные оси и моменты инерции

Ось ***Ox*** называется главной осью инерции, если

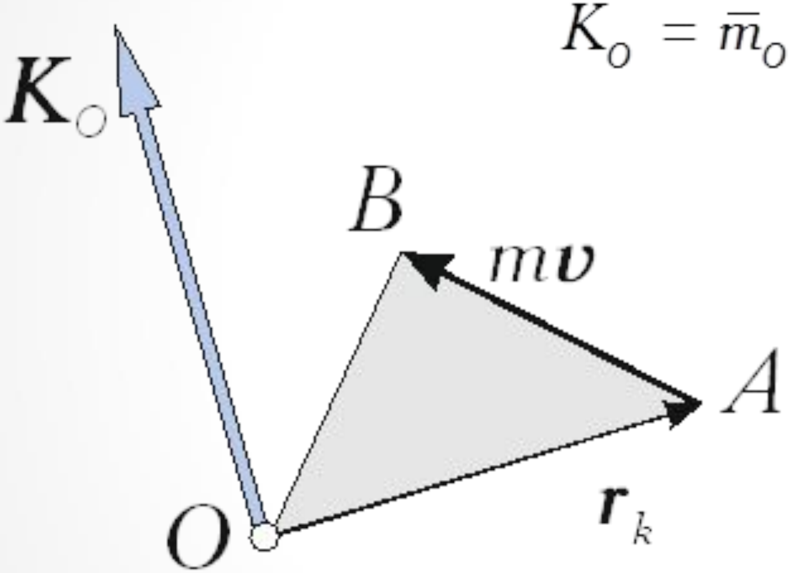
$$I_{xy} = I_{xz} = 0$$

Тензор инерции в главных осях

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma$$

Кинетический момент материальной точки и механической системы



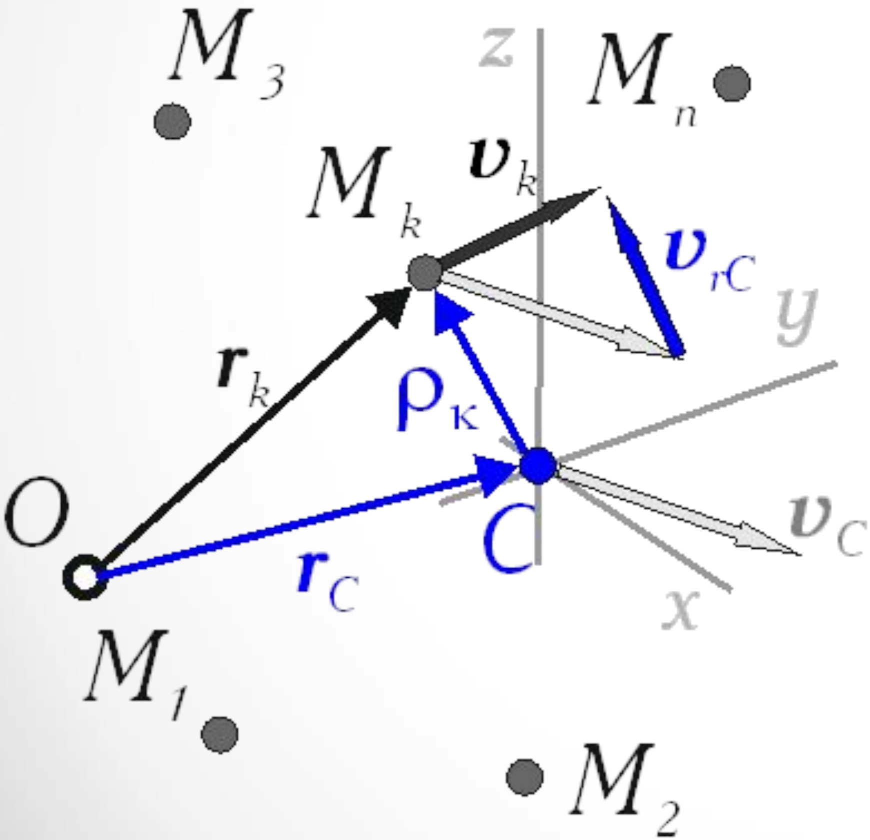
$$\bar{K}_O = \bar{m}_O\left(m\bar{v}\right) = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{K}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$$

$$K_x = m_{O1}\left(m\vec{v}\right)$$

Кинетический момент механической системы

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{\upsilon}_C + \bar{K}_{rC}$$



$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{K}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{\upsilon}_k =$$

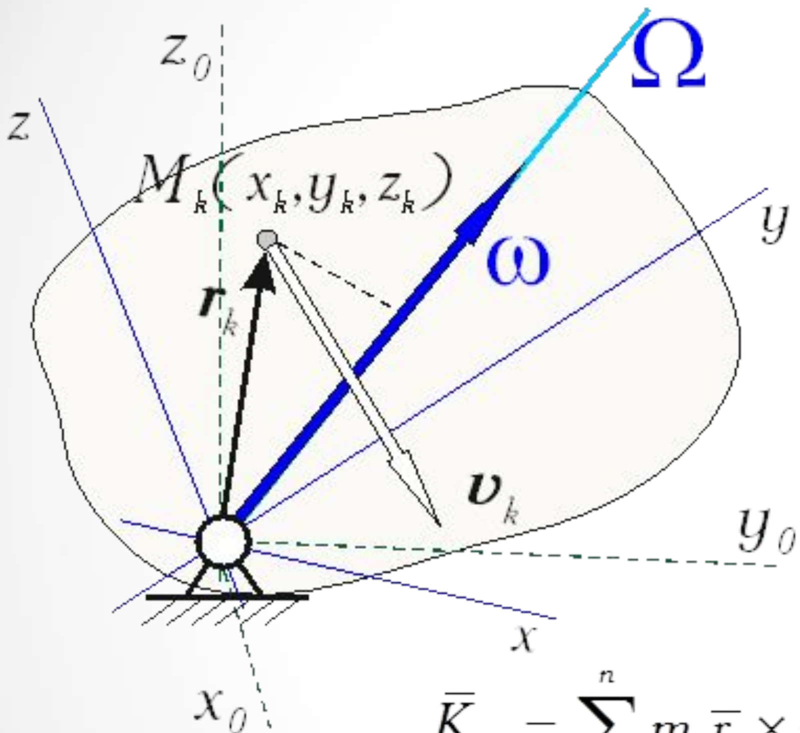
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{r}_C + \bar{\rho}_k\right) \times m_k \left(\bar{\upsilon}_C + \bar{\upsilon}_{rk}\right) =$$

$$= \bar{r}_C \times \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)}_{M} \bar{\upsilon}_C + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\rho}_k\right)}_{M\bar{\rho}_C = 0} \times \bar{\upsilon}_C +$$

$$+ \bar{r}_C \times \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\upsilon}_{rk}\right)}_{M\bar{\upsilon}_{rC} = 0} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \times m_k \bar{\upsilon}_{rk}\right)}_{\bar{K}_{rC}} =$$

$$= \bar{r}_C \times M\bar{\upsilon}_C + \bar{K}_{rC}$$

Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра



$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{\upsilon}_k, \qquad \bar{\upsilon}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$$

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

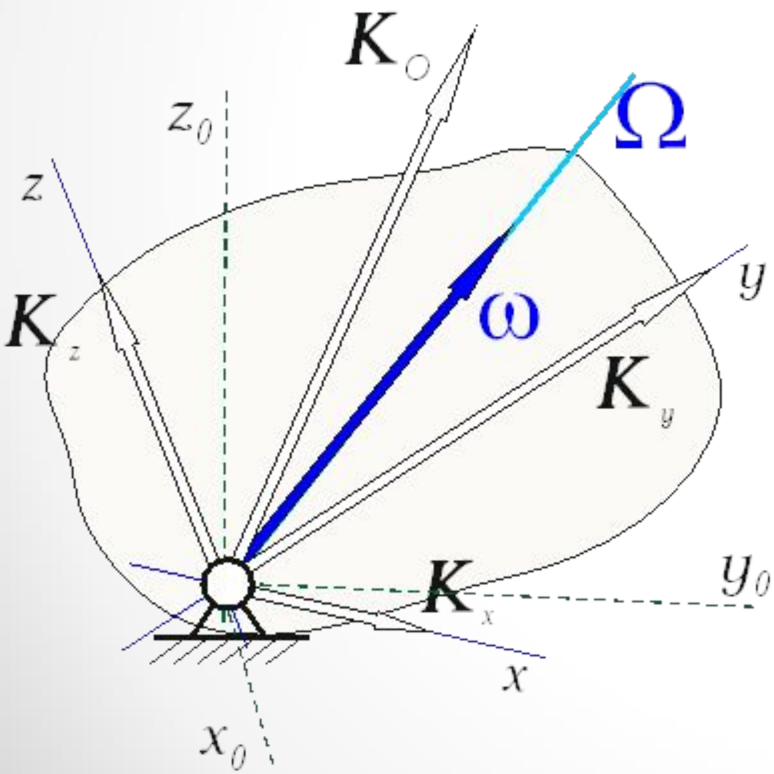
$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(\bar{r}_k \cdot \bar{r}_k)\bar{\omega} - (\bar{r}_k \cdot \bar{\omega})\bar{r}_k \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\bar{\omega} - (x_k \omega_x + y_k \omega_y + z_k \omega_z)\bar{r}_k \right]$$

Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра

$$K_x = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right)\right)\omega_x - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\right)\omega_y - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k\right)\omega_z =$$

$$= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$



$$\begin{cases} K_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z; \\ K_y = -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z; \\ K_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z. \end{cases}$$

Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра

1. Оси ***Ox, Oy, Oz*** – главные оси инерции тела

$$\begin{cases} K_x = I_x\omega_x; \\ K_y = I_y\omega_y; \\ K_z = I_z\omega_z. \end{cases}$$

2. Вращение вокруг неподвижной оси

$$Oz \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega \quad \begin{cases} K_x = -I_{xz}\omega; \\ K_y = -I_{yz}\omega; \\ K_z = I_z\omega. \end{cases}$$

3. Ось вращения – главная ось инерции тела

$$K_x = K_y = 0, \quad K_z = I_z\omega.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Полная производная от вектора кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра *O* равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к точкам и телам системы, относительного выбранного центра

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e, \quad \bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$$

В проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} \dfrac{dK_x}{dt} = M_x^e = \sum\limits_{k=1}^{n} m_x\left(\bar{F}_k^e\right); \\ \dfrac{dK_x}{dt} = M_x^e = \sum\limits_{k=1}^{n} m_y\left(\bar{F}_k^e\right); \\ \dfrac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum\limits_{k=1}^{n} m_z\left(\bar{F}_k^e\right). \end{cases}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Доказательство: $m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k = 1, \dots, n$

$$\bar{r}_k \times \Big| \, m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i,$$

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{\bar{r}}_k \times m_k \bar{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \dot{\bar{v}}_k =$$

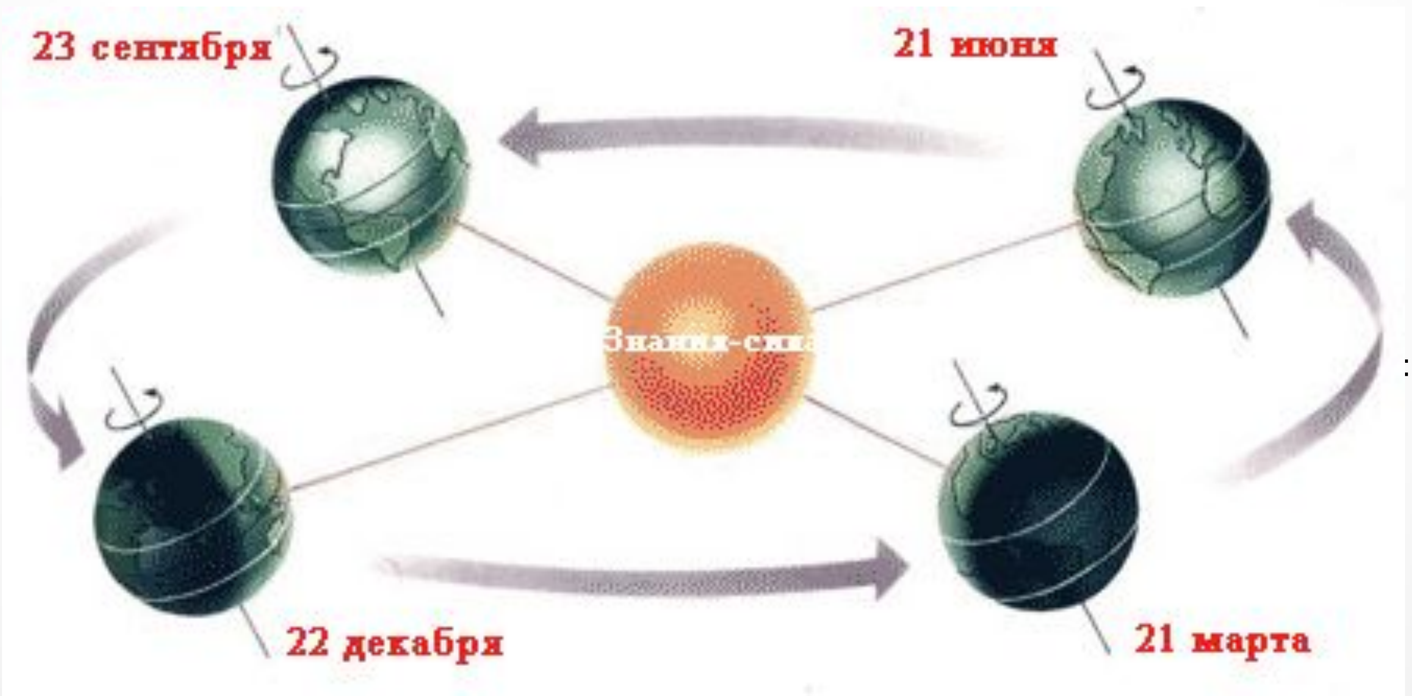
$$= \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k \times m_k \bar{v}_k}}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{w}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{w}_k = \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e}}_{=\bar{M}_O^e} + \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i}}_{=\bar{M}_O^i = 0} = \bar{M}_O^e.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Следствия:

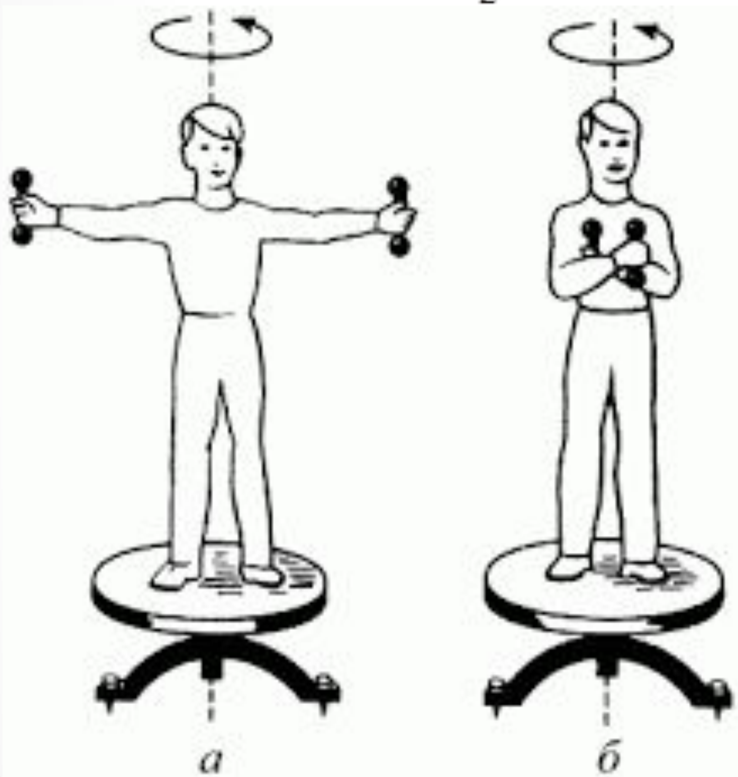
$$1.\ \bar{M}_O^e = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = const$$



: 0

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Следствия: $2.\ M_z^e = 0 \Rightarrow \dfrac{dK_z}{dt} = 0 \Rightarrow K_z = const$



$$I_a > I_b \quad \Rightarrow \quad \omega_a < \omega_b$$

3. Внутренние силы не могут непосредственно изменить кинетический момент механической системы.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Движение вокруг центра масс

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_{rC}$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt} = \bar{r}_C \times M\bar{w}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt}$$

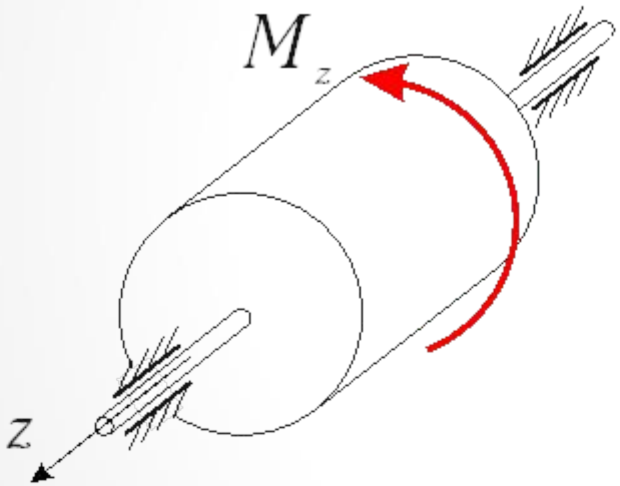
$$\bar{M}_O^e = \bar{M}_C^e + \bar{r}_C \times \bar{R}^e$$

$$\bar{r}_C \times M\bar{w}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt} = \bar{M}_C^e + \bar{r}_C \times \bar{R}^e \qquad - \left[\bar{r}_C \times \middle| M\bar{w}_C = \bar{R}^e\right]$$

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^e ,}$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \qquad K_z = I_z\omega \qquad I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^e$$



$$I\varepsilon = M_z \qquad mw = F_x$$

$$\varphi \qquad x$$

$$\omega = \dot{\varphi} \qquad v = \dot{x}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} \qquad w = \ddot{x}$$

Осевой момент инерции твердого тела – мера инертности тела при его вращении вокруг неподвижной оси