Курс общей физики
Механика

Лекция №3

Динамика вращательного движения

к.ф.-м.н., доцент ШЕН
Стеблий Максим Евгеньевич

г. Владивосток
2017

Силы инерции

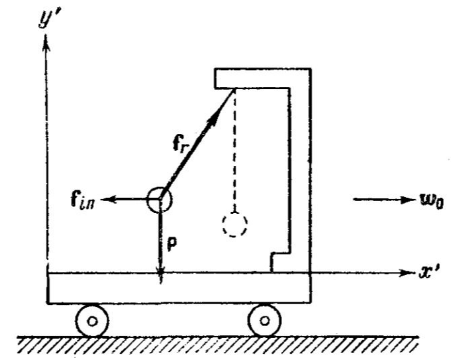
Поступательное движение

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета – изменение скорости (ускорение) обусловлено действием результирующей силы.

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета движущуюся поступательно с ускорением a_{in}.

$$a' = a - a_{in}$$

$$\boxed{\vec{f}_{in} = -m\vec{a}_{in}}$$ сила инерции при поступательном движении



a_{in}

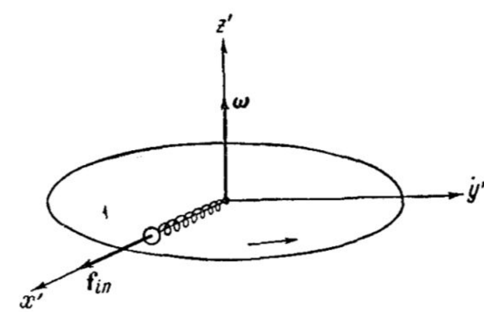
$$ma' = f + f_{in}$$

Введение сил инерции позволяет описывать движение тел в неинерциальных системах отсчета использую законы инерциальных систем.

Силы инерции фиктивны: не соответствуют взаимодействию, а, а являются свойством конкретной системы отсчета.

Вращательное движение

Рассмотрим вращающийся с угловой скоростью диск с шаром закрепленным на пружине. Шар займет такое положение, при котором сила натяжения пружины станет равной по величине центростремительному ускорению, умноженному на массу.



$$kdx = m\frac{\upsilon^2}{R}$$

$$\frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

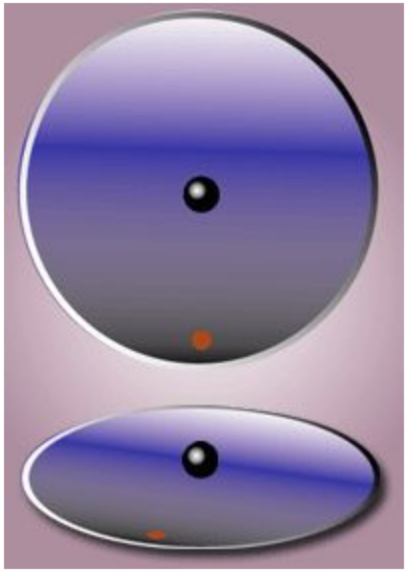
$$f_{in} = m\omega^2 R$$

Используя связь поступательной и вращательной скорости

Эта сила инерции, возникающая во вращательной системе отсчета, называется ***центробежной силой инерции***.
Эта сила действует на тело во вращающейся системе независимо от того движется тело или покоится.

$$\boxed{\vec{f}_{in} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]]}$$ Центробежная сила в векторном виде.

Сила Кориолиса. Общий случай неинерциальной системы.

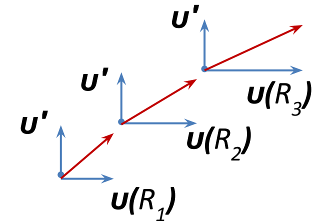


Во вращающейся со скоростью $\boldsymbol{\omega}$ системе на движущееся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon'}$ тело действует дополнительная сила – ***сила Кориолиса***.

Рассмотрим движение тела из цента вращающегося диска к периферии. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, однако, линейная скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ каждой точки диска зависит от радиуса $\boldsymbol{r}$: чем дальше от центра, тем большее расстояние пройдет точка при повороте на фиксированный угол.

$$\vec{\upsilon} = [\vec{R}\vec{\omega}]$$

Тело, изменяя свое положение относительно центра О, также приобретает эту дополнительную скорость $\boldsymbol{\upsilon(R)}$, касательную к текущему радиусу. При этом собственная скорость $\boldsymbol{\upsilon'}$ остается неизменной как по величине, так и по направлению (никаких сил не действует). В результате происходит изменение величины и ориентации результирующей скорости так, как будто на тело действует сила:

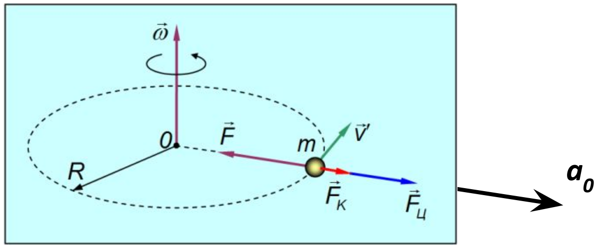


$$\boxed{\vec{f}_k = 2m[\vec{\upsilon}'\vec{\omega}]}$$

На поступательно движущееся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon'}$ тело, во вращающуюся, ускоренной системе отсчета, будет действовать суммарная сила инерции:

$$\boxed{\vec{f}_{in} = \overset{F}{-m\vec{a}_0} + \overset{F_к}{2m[\vec{\upsilon}'\vec{\omega}]} + \overset{F_ц}{m[\vec{\omega}[\vec{r}\vec{\omega}]]}}$$

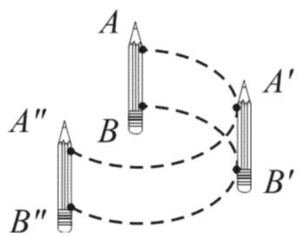
Система отсчета



где $\boldsymbol{a_0}$ – ускорение системы отсчета;
$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость системы отсчета;
$\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор тела относительно оси вращения системы отсчета;
$\boldsymbol{\upsilon'}$ – скорость тела относительно неинерциальной системы отсчета.

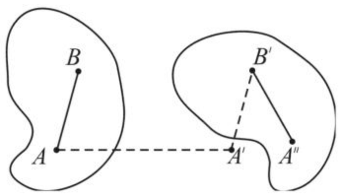
Центр инерции

При ***поступательном*** движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равное по величине и направлению перемещения, в следствие чего скорость и ускорение всех точек в каждый момент времени оказываются одинаковыми.



При ***вращательном*** движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

В предыдущих разделах «Кинематика» и «Динамика» рассматривалось движение материальной точки. При этом как при поступательном, так и при вращательном движении вся масса ***m*** была сконцентрирована в одной точке с радиус-вектором ***r***.



Рассматривая твердое тело вводится понятие центра инерции (центр масс). Для определения его положения необходимо разбить тело на элементарные объемы с массой m_i и радиус-вектором r_i.

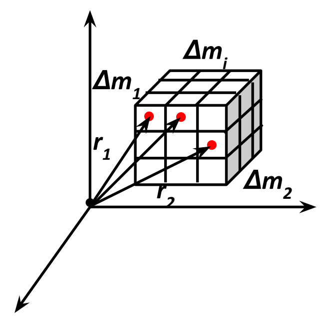
Центром инерции называется точка, определимая следующим образом

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_1 + \ldots + m_N} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}} \longrightarrow$$

$$\vec{\upsilon}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum m_i\dot{\vec{r}}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{\upsilon}_i}{m}$$

$$\vec{a}_c = \dot{\vec{\upsilon}}_c = \ddot{\vec{r}}_c$$

$$\boxed{m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i}$$



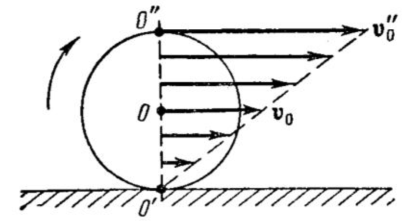
Центр инерции твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенный к телу сил.

Движение твёрдого тела можно рассматривать как суперпозицию движения центра масс и вращательного движения тела вокруг его центра масс.

Тогда для описания этого движения применимы все законы Ньютона. Во многих случаях можно вообще не учитывать размеры и форму тела и рассматривать только движение его центра масс.

Описание плоского движения

Любое движение твердого тела можно представить как наложение поступательного и вращательного движения. Рассмотрим на примере плоского движения – качения цилиндра.

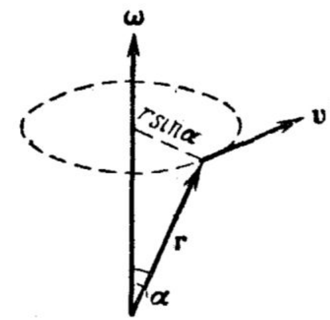


За промежуток времени dt каждая точка цилиндра совершит перемещение связанное с поступательным и вращательным движением:

$$d\vec{s} = d\vec{s}_{пост} + d\vec{s}_{вращ}$$

Дифференцируя по времени можно найти скорости обусловленные этими движениями:

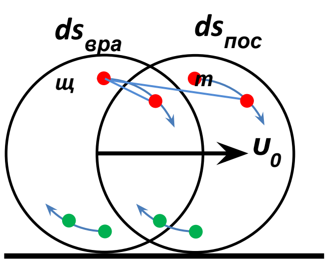
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}_{пост}}{dt} + \frac{ds_{вращ}}{dt} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}',$$



Используя связь между поступательной скоростью и угловой скоростью:

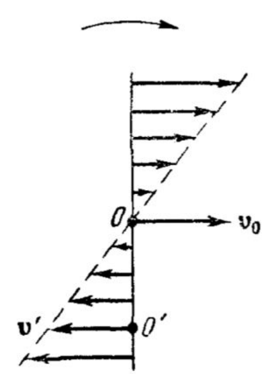
$$\vec{\upsilon}' = [\vec{\omega}\vec{r}]$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}]}$$



Скорость каждой точки твердого тела участвующего в поступательном и вращательной движении описывается скоростью $\boldsymbol{\upsilon_0}$ движения оси вращения ***O*** и угловой скоростью ***ω*** вращения тела вокруг этой оси.

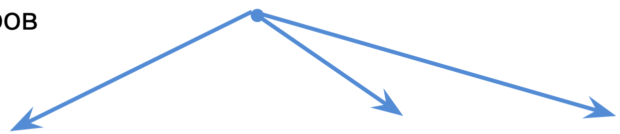
В теле, одновременно участвующем в поступательном и вращательном движении, существует точка с нулевой мгновенной скоростью – мгновенный центр вращения, через который проходит ***<u>мгновенная ось вращения</u>***. В случае катящегося цилиндра он совпадает с точкой касания с поверхностью.

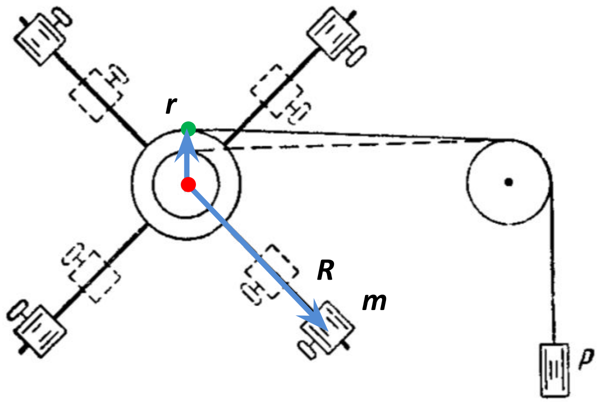


В общем случае, сложное движение можно описывать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенной оси и ее перемещений.

Момент силы

Рассмотрим причины вращательного движения. Отпустим груз ***p*** – крестовина начнет крутится с угловым ускорением **β**. Меняя параметры системы можно обнаружить, что ускорение **β** зависит от следующих параметров

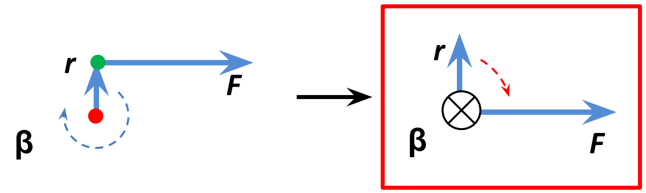




массы груза ***p*** *(чем больше тем больше* **β***)*

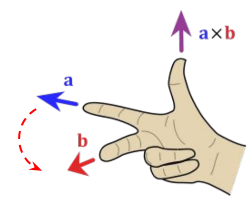
радиуса от оси вращения до точки приложения силы ***r*** *(чем больше тем больше* **β***)*

распределения ***R*** масс ***m*** на крестовине *(чем больше тем меньше* **β***)*



Установлено, что причиной вращательного движения является не сила, а ***момент силы (M)*** - векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведённого от оси вращения к точке приложения силы, на вектор этой силы. Характеризует вращательное действие силы на твёрдое тело. Единица измерения - ***[Н*м]***.

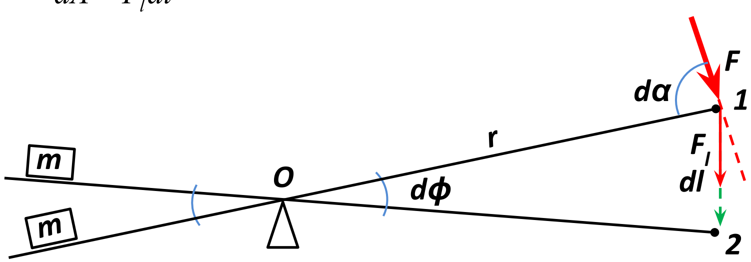
$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]}$$

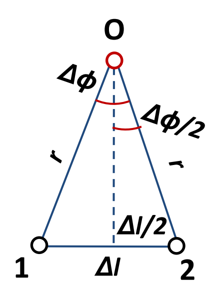


Вектор момента силы ориентирован вдоль оси вращения – аксиальный. Направление определяется по правилам векторного произведения.

Это определение можно получить рассматривая работу совершаемую с помощью рычага:

$$dA = F_l dl$$





$$\frac{dl}{2} = r\sin\frac{d\varphi}{2} \approx r\frac{d\varphi}{2}$$

$$dl \approx r d\varphi$$

$$F_l = F\sin\alpha$$

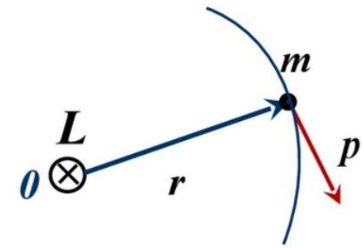
Подставив, получим связь между поворотом и силой:

$$dA = \boxed{Fr\sin\alpha} d\varphi \longrightarrow \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$

Момент импульса

По аналогии с понятием момента силы вводится понятие момента импульса.

Момент импульса (L) - векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведённого от оси вращения к вращающейся точке, на импульс этой точки – относительная величина. Характеризует количество вращательного движения. Единица измерения - ***[м²кг/с]***.



$$\boxed{\vec L = [\vec r \vec p]} = m[\vec r \vec \upsilon]$$

Найдем причину изменения момента импульса. Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec r \vec p] = \overbrace{[\frac{d\vec r}{dt}\vec p]}^{=0} + [\overbrace{\boxed{\frac{d\vec p}{dt}}}^{=F}\vec r]$$

$$\frac{d\vec L}{dt} = [\vec r \vec F]$$

$$\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = \vec M} \qquad \frac{d\vec p}{dt} = \vec F$$

Важным следствием этой взаимосвязи является то, что в замкнутой системе, в отсутствие сил (и моментов сил), величина суммарного момента импульса сохраняется.

Закон сохранения момента импульса – момент импульса замкнутой системы остается постоянным.

Свяжем момент импульса с угловой скоростью вращения:

$$\vec L = [\vec r \vec p] = m[\vec r \vec \upsilon] \quad \leftarrow \quad \vec \upsilon = [\vec \omega \vec r]$$

$$\vec L = m[\vec r[\vec \omega \vec r]] = \vec \omega \overbrace{\boxed{(mr^2)}}^{=I}$$

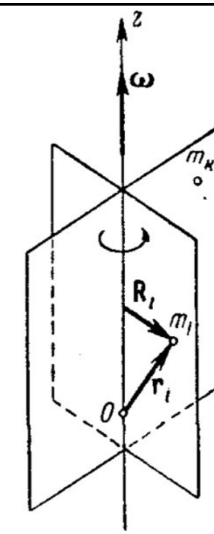
Момент инерции точки:

$$I = mr^2$$

Момент инерции тела:

$$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$$

Момент инерции - скалярная физическая величина, мера инертности во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является **мерой его инертности** в поступательном движении. Характеризуется распределением масс в теле. Единица измерения - ***[м²кг]***.



Тогда момент импульса можно записать в виде:

$$\vec L = \omega \vec I$$

Изменение момента импульса:

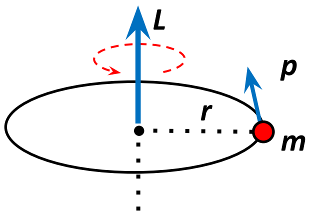
$$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d\vec \omega}{dt} I = \vec \beta I$$

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\boxed{\vec M = \vec \beta I}$$

Момент инерции

Момент инерции (I) — скалярная величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся, наряду с массой, мерой инертности тела при непоступательном движении.
Единица измерения - ***[кг*м²]***.



Момент инерции материальной точки определяется:
, где ***r***- расстояние от точки до оси вращения.

$$\boxed{I = mr^2}$$

• Момент инерции – относительная величина, зависит от выбора оси.

• Момент инерции – аддитивная величина, момент инерции тела определяется как сумма моментов инерции всех ***i*** «точек» его образующих.

$$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$$

Для тела с однородно распределенной массой момент инерции можно выразить через плотность:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$ - в неоднородном случае.

Элементарную массу можно выразить в виде:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

$$I = \sum \rho_i r_i^2 \Delta V_i$$

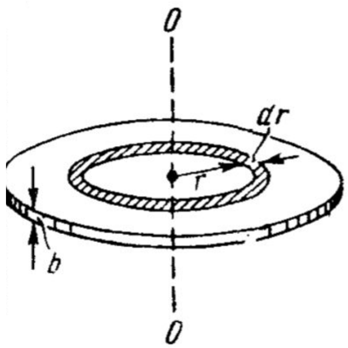
$$I = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i$$

В результате предельного перехода:

$$\boxed{I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV}$$

Рассмотрим расчет момента инерции на примере однородного диска:

Ввиду симметрии задачи в качестве элементарных объемов выберем кольца шириной ***dr***. Найдем объем такого кольца:



$$dV = bds$$

$$ds = \underbrace{\boxed{\pi(r+dr)^2}}_{S_2} - \underbrace{\boxed{\pi r^2}}_{S_1}$$

Можно пренебречь ввиду большего порядка малости.

$$ds = \pi r^2 + 2\pi r dr + \boxed{dr^2} - \pi r^2$$

$$ds = 2\pi r dr$$

$$dV = b2\pi r dr$$ - объем кольцевого слоя.

Подставив в общую формулу

$$I = \int r^2 \rho dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr$$

$$I = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b\rho \frac{R^4}{4} = \boxed{\boxed{\boxed{\pi R^2}\, b}\,\rho}\,\frac{R^2}{2}$$

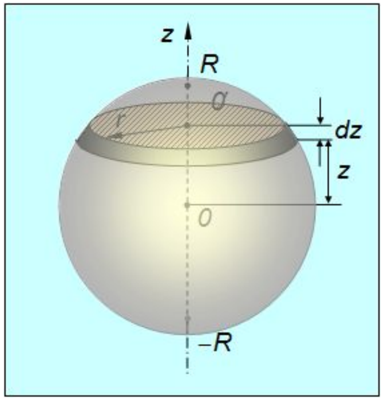
S V m

Момент инерции однородного диска

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2}}$$

Рассмотрим расчет момента инерции на примере однородной сферы:

Разобьем сферу радиусом ***R*** на диски толщиной ***dz***, перпендикулярно оси вращения. Найдем радиус такого диска, расположенного на высоте ***z*** от центра сферы:



$$\boxed{r} = \sqrt{R^2 - z^2}$$

Так как момент инерции диска $I = \dfrac{mR^2}{2}$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$\boxed{dm} = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 \rho \pi r^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$$dI = \frac{1}{2} \pi \rho \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) dz$$

$$I = \int_{-R}^{R} dI = 2\int_{0}^{R} dI = \pi\rho \int_{0}^{R} \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) dz$$

$$I = \pi\rho \left(R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5\right)\Bigg|_0^R$$

объем шара

$$I = \pi\rho\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}\rho \frac{2}{5} R^2$$

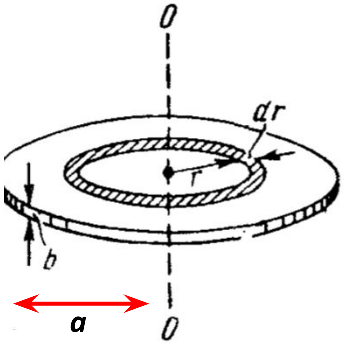
Момент инерции однородного шара

$$\boxed{I = \frac{2}{5} mR^2}$$

Гораздо более сложной является задача расчета величины момента инерции относительно осей не проходящих через центры симметрии тел.

Например, момент инерции диска относительно его оси ***OO*** $I := \dfrac{mR^2}{2}$

Однако прямой расчет этой величины относительно оси ***O'O'*** слишком сложен.



Теорема Гюйгенса – Штейнера

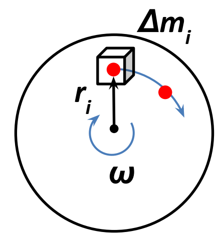
- момент инерции ***I*** относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела ***m*** на квадрат расстояния между осями ***a***.

$$\boxed{I = I_0 + ma^2}$$

Используя теорему Штейнера момент инерции диска относительно оси $I' := \dfrac{mR^2}{2} + ma^2$

Если тело участвует только во вращательном движении:

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то линейную скорость $\boldsymbol{\upsilon_i}$ элементарной массы тела $\boldsymbol{m_i}$, находящегося на расстоянии $\boldsymbol{r_i}$ от оси вращения, можно выразить как:



$$\upsilon_i = r_i\omega$$

Следовательно, кинетическая энергия этой $\boldsymbol{i}$–й массы:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

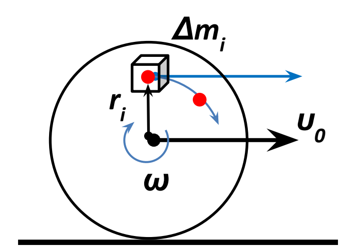
Кинетическая энергия тела слагается из кинетической энергии его частей:

$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\boxed{\sum \Delta m_i r_i^2}}_{I} \qquad \boxed{T = \frac{I\omega^2}{2}}$$

- кинетическая энергия вращательного движения.

Если тело участвует и в поступательном и во вращательном движении:

Сложное движение может быть представлено как наложение поступательного и вращательного движения. Скорость i-й точки участвующей в таком движении определяется:



$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}_i]$$

Кинетическая энергия i-й массы определяется в общем виде:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i \upsilon_i}{2} = \frac{1}{2}\Delta m_i \left(\vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}_i]\right)^2$$

$$\Delta T_i = \frac{1}{2}\Delta m_i \left(\upsilon_0^2 + 2\vec{\upsilon}_0[\vec{\omega}\vec{r}_i] + [\vec{\omega}\vec{r}_i]^2\right)$$

Учтем, что вектора $\boldsymbol{r_i}$ и $\boldsymbol{\omega}$ ортогональны и просуммируем по всем массам:

$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i \upsilon_0^2 + \sum \vec{\upsilon}_0[\vec{\omega}\Delta m_i \vec{r}_i] + \frac{1}{2}\sum \omega^2 \Delta m_i r_i^2$$

центр масс

$$\boxed{r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m}}$$

$$T = \frac{1}{2}\upsilon_0^2 \underbrace{\boxed{\sum \Delta m_i}}_{\text{масса тела}} + \vec{\upsilon}_0\vec{\omega}\boxed{\frac{m}{m}\sum \Delta m_i \vec{r}_i} + \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\boxed{\sum \Delta m_i r_i^2}}_{\text{Момент инерции}}$$

После всех замен получим:

$$T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \vec{\upsilon}_0 m[\vec{\omega}\vec{r}_c] + \frac{I\omega^2}{2}$$

Если центр масс совпадает с осью вращения, то кинетическая энергия плоского движения:

$$\boxed{T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}}$$

Работа при вращении твердого тела

Рассмотрим, какую работу совершает внешняя сила при вращении тела вокруг неподвижной оси.

За время ***dt i***–я масса проходит путь ***ds**$_i$*, который можно связать с углом поворота ***dφ***:

$$ds_i = r_i d\varphi$$

Тогда работа, рассматривая проекцию силы на траекторию ***ds**$_i$*:

$$dA_i = f_\tau ds_i = \boxed{f_\tau r_i} d\varphi$$

$$dA_i = M_i d\varphi$$

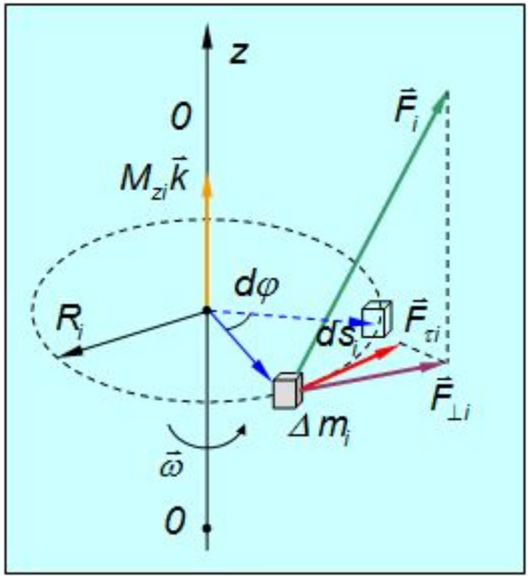
Суммируя работу над всеми точками

$$dA = \sum M_i d\varphi$$

$$dA = M d\varphi$$

$$\boxed{A = \int M d\varphi}$$

Где ***M*** – результирующий момент сил относительно оси вращения.



Описание поступательного и вращательного движения

	Поступательное	*Вращательное*
Координата	$\vec{r}$ $[м]$	φ $[рад]$
Мера инертности	m $[кг]$	$I=\sum m_i r_i^2$ $[кг\cdot м^2]$
Скорость	$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ $[м/с]$	$\vec{\omega}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$ $[рад/с]$
Ускорение	$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ $[м/с^2]$	$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $[рад/с^2]$
Момент количества движения	$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ $[кг\cdot м/с^2]$	$\vec{L}=[\vec{r}\vec{p}]=I\vec{\omega}$ $[кг\cdot м^2/с]$
Причина изменения движения	$\vec{F}$ $[Н]$	$\vec{M}=[r\cdot\vec{F}]$ $[Н\cdot м]$
Основное уравнение динамики	$m\vec{a}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_i$	$I\vec{\beta}=\frac{d\vec{L}}{dt}\sum\vec{M}_i$
Кинетическая энергия [Дж]	$T=\frac{m\upsilon_c^2}{2}$	$T=\frac{I_c\omega^2}{2}$
Работа [Дж]	$dA=\int F_l dl$	$dA=\int M_\omega d\varphi$